

УДК 517.9

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН, ОПИСЫВАЕМЫХ ОБОБЩЕННЫМ УРАВНЕНИЕМ КАУПА–НЬЮЭЛЛА

© 2023 К.В. Кан^{1,*}, Н.А. Кудряшов^{1,**}

¹Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, 115409, Россия

*e-mail: kan_13@mail.ru

**e-mail: nakudr@gmail.com

Поступила в редакцию: 21.04.2023

После доработки: 26.04.2023

Принята к публикации: 11.05.2023

Исследуется распространение импульсов в оптическом волокне, описываемых обобщенным уравнением Каупа–Ньюэлла, учитывающим произвольный коэффициент отражения. Используя переменные бегущей волны, обобщенное уравнение Каупа–Ньюэлла сведено к системе нелинейных дифференциальных уравнений, соответствующих вещественной и мнимой частям. Найден условия совместности полученной системы уравнений. Получены точные решения уравнения при фиксированном $n = 1$, выраженные через эллиптическую функцию Вейерштрасса и эллиптический синус. С помощью обобщенного метода простейших уравнений найдены точные решения уравнения в виде уединенных волн при произвольном коэффициенте отражения. Сформулирована математическая модель, учитывающая периодические граничные условия. На регулярной сетке построено численное решение с использованием псевдоспектрального метода. Проведена верификация программного кода численного решения задачи путем сравнения полученных численного и аналитического решений в виде уединенных волн. С учетом ограничений на параметры модели исследована зависимость погрешности от шага по пространственной переменной. Построены и проанализированы графики аналитического и численного решений.

Ключевые слова: оптический импульс, обобщенное уравнение Каупа–Ньюэлла, псевдоспектральный метод.

DOI: 10.26583/vestnik.2023.254

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы большое внимание уделяется изучению распространения импульсов в оптическом волокне (см. работы [1–3]). В частности, изучаются математические модели, описывающие процесс распространения волн с учетом различных типов нелинейности [4–8]. Основным уравнением для построения моделей является нелинейное уравнение Шредингера [9–11]. Однако помимо этого внимание в последнее время уделяется обобщенному уравнению Каупа–Ньюэлла, предложенному в [12]:

$$u_t + i\alpha u_{xx} + b[|u|^{2n}u]_x = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1), также известное как уравнение Трики–Бисваса, является нелинейным уравнением в частных производных второго порядка. Точные решения уравнения с помощью метода R -функции были найдены в работе [13]. В [14] исследованы нелинейные солитонные решения уравнения Трики–Бисваса.

В данной работе приведены точные решения уравнения (1), выраженные с помощью функции Вейерштрасса, эллиптического синуса и в виде уединенных волн. Выполнено численное моделирование краевой задачи для уравнения (1) при периодических граничных условиях.

1. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ (1)

1.1. Точные решения уравнения (1), выраженные с помощью функции Вейерштрасса

Будем искать решение уравнения (1), используя переменные бегущей волны:

$$u(x, t) = y(z)e^{i(\psi(z) - \omega t)}, \quad z = x - C_0 t. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получаем, что действительная часть уравнения (1) имеет вид

$$C_0 y_z + \alpha y \psi_{zz} + y_z \psi_z - b(2n + 1) = 0, \quad (3)$$

а мнимая часть –

$$\alpha y_{zz} + b \psi_z y^{2n+1} - C_0 y \psi_z - \omega y - \alpha y \psi_z^2 = 0. \quad (4)$$

Умножая уравнение (3) на $y(z)$ и интегрируя по z , получаем

$$\frac{C_0}{2}y^2 + \alpha y^2 \psi_z - \frac{b(2n+1)}{2n+2}y^{2n+2} + C_1 = 0, \quad (5)$$

откуда

$$\psi_z = \frac{b(2n+1)}{(2n+2)\alpha}y^{2n} - \frac{C_0}{2\alpha} - \frac{C_1}{\alpha y^2}. \quad (6)$$

Подставив (6) в (4), получаем уравнение

$$\begin{aligned} \alpha y_{zz} + \frac{b^2(2n+1)}{4\alpha(n+1)^2}y^{4n+1} - \frac{bC_0}{2\alpha}y^{2n+1} + \\ + \frac{bnC_1}{\alpha(n+1)}y^{2n-1} + \left(\frac{C_0^2}{4\alpha} - \omega\right)y - \frac{C_1^2}{\alpha y^3} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Умножая полученное уравнение (7) на y_z и интегрируя по z , получаем к следующему:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2}y_z^2 + \frac{b^2}{8\alpha(n+1)^2}y^{4n+2} - \frac{bC_0}{4\alpha(n+1)}y^{2n+2} + \\ + \frac{bC_1}{2\alpha(n+1)}y^{2n} + \left(\frac{C_0^2}{8\alpha} - \frac{\omega}{2}\right)y^2 + \frac{C_1^2}{2\alpha y^2} + C_2 = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Умножая уравнение (8) на $\frac{8y^2}{\alpha}$ и используя замену $y = \sqrt{w(z)}$, приходим к

$$\begin{aligned} w_z^2 + \frac{b^2}{\alpha^2(n+1)^2}w^{2n+2} - \frac{2bC_0}{\alpha^2(n+1)}w^{n+2} + \\ + \frac{4bC_1}{\alpha^2(n+1)}w^{n+1} + \left(\frac{C_0^2}{\alpha^2} - \frac{4\omega}{\alpha}\right)w^2 + \\ + \frac{8C_2}{\alpha} + \frac{4C_1^2}{\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

При $n = 1$ уравнение (9) принимает вид

$$\begin{aligned} w_z^2 + \frac{b^2}{4\alpha^2}w^4 - \frac{2bC_0}{2\alpha^2}w^3 + \frac{4bC_1}{2\alpha^2}w^2 + \\ + \left(\frac{C_0^2}{\alpha^2} - \frac{4\omega}{\alpha}\right)w^2 + \frac{8C_2}{\alpha}w + \frac{4C_1^2}{\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Используя замену $w(z) = 1 / (V(z))$, уравнение (10) можно записать в виде

$$\begin{aligned} V_z^2 + \frac{4C_1^2}{\alpha}V^4 + \frac{8C_2}{\alpha}V^3 + \\ + \left(\frac{2bC_1}{\alpha^2} + \frac{C_0^2}{\alpha^2} - \frac{4\omega}{\alpha}\right)V^2 - \frac{bC_0}{\alpha^2}V + \frac{b^2}{4\alpha^2} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Рассмотрим уравнение (11) в случае, когда $C_1 = 0$:

$$\begin{aligned} V_z^2 + \frac{8C_2}{\alpha}V^3 + \left(\frac{C_0^2}{\alpha^2} - \frac{4\omega}{\alpha}\right)V^2 - \\ - \frac{bC_0}{\alpha^2}V + \frac{b^2}{4\alpha^2} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Общее решение уравнения (12) может быть получено с помощью эллиптической функции Вейерштрасса или эллиптической функции Якоби.

Уравнение для эллиптической функции Вейерштрасса имеет вид

$$\wp^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3. \quad (13)$$

Используя замену

$$\begin{aligned} V(z) = \frac{\omega}{6C_2} - \frac{C_0^2}{24\alpha C_2} - \wp(\xi), \\ \xi = (z - z_0)\sqrt{\frac{2C_2}{\alpha}}, \end{aligned} \quad (14)$$

где z_0 – произвольная постоянная, получим уравнение (14) с учетом того, что

$$\begin{aligned} g_2 = \frac{\omega^2}{3C_2^2} - \frac{bC_0}{2\alpha C_2} - \frac{\omega C_0^2}{6\alpha C_2^2} + \frac{C_0^4}{48\alpha^2 C_2^2}, \\ g_3 = \frac{C_0^6}{1728\alpha^3 C_2^3} - \frac{\omega C_0^4}{144\alpha^2 C_2^3} + \frac{bC_0^3}{48\alpha^2 C_2^2} + \\ + \frac{\omega^2 C_0^2}{36\alpha C_2^3} - \frac{b\omega C_0}{12\alpha C_2^2} + \frac{b^2}{8\alpha C_2} - \frac{\omega^3}{27C_2^3}. \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, решение уравнения (12) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} V(z) = M - \wp\left(\frac{2C_2}{\alpha}(z - z_0), g_2, g_3\right), \\ M = \frac{\omega}{6C_2} - \frac{C_0^2}{24\alpha C_2}. \end{aligned} \quad (16)$$

При $n = 1$, $C_1 = 0$ решение уравнения (7) имеет вид

$$\begin{aligned} y(z) = \left\{ M - \wp\left(\sqrt{\frac{2C_2}{\alpha}}(z - z_0), g_2, g_3\right) \right\}^{-1/2}, \\ M = \frac{\omega}{6C_2} - \frac{C_0^2}{24\alpha C_2}, \end{aligned} \quad (17)$$

а решение уравнения (1):

$$u(x, t) = \left\{ M - \wp \left(\sqrt{\frac{2C_2}{\alpha}} (z - z_0), g_2, g_3 \right) \right\}^{-1/2} \times (18) \\ \times e^{i(\Psi(z) - \omega t)}, \quad z = x - C_0 t,$$

где

$$\Psi_z = \frac{3b}{4} \left\{ M - \wp \left(\sqrt{\frac{2C_2}{\alpha}} (z - z_0), g_2, g_3 \right) \right\}^{-1} - \frac{2C_0}{4\alpha}, \\ g_2 = \frac{\omega^2}{3C_2^2} + \frac{bC_0}{2\alpha C_2} - \frac{\omega C_0^2}{6\alpha C_2^2} + \frac{C_0^4}{48\alpha^2 C_2^2}, \quad (19) \\ g_3 = \frac{C_0^6}{1728\alpha^3 C_2^3} - \frac{\omega C_0^4}{144\alpha^2 C_2^3} + \frac{bC_0^3}{48\alpha^2 C_2^2} + \\ + \frac{\omega^2 C_0^2}{36\alpha C_2^3} - \frac{b\omega C_0}{12\alpha C_2^2} + \frac{b^2}{8\alpha C_2} - \frac{\omega^3}{27C_2^3}, \\ M = \frac{\omega}{6C_2} - \frac{C_0^2}{24\alpha C_2}.$$

1.2. Точные решения уравнения (1), выраженные с помощью эллиптического синуса

Решение уравнения (1) можно также выразить посредством эллиптического синуса [15]. Для этого в уравнении (1) введем новую переменную $x = mz$:

$$V_x^2 + \frac{4C_1^2}{\alpha m^2} (V - v_1) \cdot (V - v_2) \times \\ \times (V - v_3) \cdot (V - v_4) = 0, \quad (20)$$

где v_1, v_2, v_3 и v_4 – корни алгебраического уравнения

$$\frac{4C_1^2}{\alpha} V^4 + \frac{8C_2}{\alpha} V^3 + \left(\frac{2bC_1}{\alpha^2} + \frac{C_0^2}{\alpha^2} - \frac{4\omega}{\alpha} \right) V^2 - \\ - \frac{bC_0}{\alpha^2} V + \frac{b^2}{4\alpha^2} = 0. \quad (21)$$

Используя формулу [15]

$$V(x) = v_1 + \frac{(v_2 - v_1)E}{Y^2 + E}, \quad (22)$$

где E – искомая константа, и подставляя (22) в (20), находим, что [15]

$$V(x) - v_2 = \frac{(v_2 - v_1)Y^2}{Y^2 + E}, \quad V(x) - v_1 = \frac{(v_2 - v_1)E}{Y^2 + E}, \\ V_x^2 = \frac{4(v_2 - v_1)^2 E^2 Y^2}{(Y^2 + E)^2},$$

$$V(x) - v_3 = (v_1 - v_3) \left(1 - \frac{(v_1 - v_2)E}{(v_1 - v_3)(Y^2 + E)} \right), \quad (23) \\ V(x) - v_4 = (v_1 - v_4) \left(1 - \frac{(v_1 - v_2)E}{(v_1 - v_4)(Y^2 + E)} \right).$$

Подставляя (23) в (20), получаем [15]

$$\frac{4(v_2 - v_1)^2 E^2 Y^2}{(Y^2 + E)^4} \times \\ \times \left[V_x^2 - \frac{C_1^2 E}{\alpha m^2} (v_3 - v_2) \cdot (v_4 - v_2) \times \right. \quad (24) \\ \left. \times \left(1 - \frac{(v_1 - v_2)Y^2}{(v_1 - v_3)E} \right) \cdot \left(1 - \frac{(v_1 - v_4)Y^2}{(v_4 - v_2)E} \right) \right] = 0.$$

Введем обозначения:

$$E = \frac{(v_1 - v_3)}{(v_3 - v_2)}, \quad m^2 = \frac{C_1^2}{\alpha} (v_4 - v_2) \cdot (v_1 - v_3), \quad (25) \\ \kappa^2 = \frac{(v_1 - v_4) \cdot (v_1 - v_3)}{(v_4 - v_2) \cdot (v_3 - v_2)}.$$

С учетом (24) и (25) уравнение (11) можно записать следующим образом:

$$\frac{4m^2 (v_2 - v_1)^2 E^2 Y^2}{(Y^2 + E)^4} \times \\ \times \left[Y_x^2 - (1 - Y^2) \cdot (1 - \kappa^2 Y^2) \right] = 0. \quad (26)$$

Таким образом, общее решение уравнения (11):

$$V(z) = \frac{v_1(v_3 - v_2)Y^2 + v_2(v_1 - v_3)}{(v_3 - v_2)Y^2 + v_1 - v_3}, \quad (27)$$

где

$$Y(z; \kappa) = sn \left\{ \sqrt{\frac{C_1^2}{\alpha} (v_4 - v_2)(v_1 - v_3)} (z - z_0); \kappa \right\}.$$

Тогда решение уравнения (1) при $n = 1$ записывается в виде

$$u(x, t) = V(z)^{-1/2} e^{i(\Psi(z) - \omega t)}, \quad z = x - C_0 t, \quad (28)$$

$$\Psi_z = \frac{b(2n+1)}{2n+2} V(z)^{-n} - \frac{C_0}{2\alpha} - \frac{C_1}{\alpha y^2},$$

где $V(z)$ удовлетворяет выражению (27).

1.3. Точные решения уравнения (1) при произвольном коэффициенте отражения n

Умножив уравнение (8) на $\frac{8y^2}{\alpha}$ и используя замену $y = V(z)^{\frac{1}{2n}}$, с учетом $C_1 = C_2 = 0$, получаем

$$V_z^2 + k_1 V^4 - k_2 V^3 - k_3 V^2 = 0, \quad (29)$$

решение которого [16]:

$$V(z) = \frac{4k_3 e^{\sqrt{k_3}(z-z_0)}}{k_2^2 + 4k_1 k_3 + e^{2\sqrt{k_3}(z-z_0)} - 2k_2 e^{\sqrt{k_3}(z-z_0)}}, \quad (30)$$

где введены следующие обозначения:

$$k_1 = \frac{b_2}{4\alpha^2(n+1)^2}, \quad k_2 = \frac{bC_0}{2\alpha^2(n+1)},$$

$$k_3 = \frac{4\alpha\omega - C_0^2}{4\alpha^2}.$$

Тогда решение уравнения (1) можно записать следующим образом:

$$u(x, t) = y(z) e^{i(\Psi(z) - \omega t)}, \quad (31)$$

где

$$y(z) = \left[\frac{4k_3 e^{\sqrt{k_3}(z-z_0)}}{k_2^2 + 4k_1 k_3 + e^{2\sqrt{k_3}(z-z_0)} - 2k_2 e^{\sqrt{k_3}(z-z_0)}} \right]^{\frac{1}{2n}},$$

а $\Psi(z)$ является первым интегралом уравнения

$$\Psi_z = \frac{b(2n+1)}{2n+2} y^{2n} - \frac{C_0}{2\alpha},$$

и имеет вид

$$\Psi(z) = \frac{b(2n+1)}{\sqrt{k_1}(n+1)} \operatorname{arctg} \left\{ \frac{e^{\sqrt{k_3}(z-z_0)} - k_2}{2\sqrt{k_1 k_2}} \right\} - \frac{C_0}{2\alpha} z + C_3.$$

Полученное в разделе 1.3 решение (31) будет использоваться для тестирования численного решения модели.

2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КАУПА–НЬЮЭЛЛА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Сформулируем краевую задачу для численного решения. Возьмем уравнение (1):

$$u_t + i\alpha u_{xx} + b[|u|^{2n} u]_x = 0, \quad (32)$$

$$x \in [-L/2, L/2], \quad t > 0,$$

с начальными

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (33)$$

и граничными условиями:

$$u(x-L/2, t) = u(x+L/2, t), \quad (34)$$

$$u_x(x-L/2, t) = u_x(x+L/2, t),$$

где $\varphi(x)$ – функция в виде (31) при $t = 0$.

Пусть $\{x: x_j = jh\}_{j=0}^N$ – регулярные узлы сетки ($h = L/N$ – шаг по пространству); $\{t: t_m = m\tau\}_{m=0}^M$ – массив значений временной переменной (τ – шаг по времени). Тогда $U = u(x_j, t_m)$ – значение функции в узле сетки x_j в момент времени t_m .

С учетом введенных обозначений разностную аппроксимацию задачи (32)–(34) для псевдоспектрального метода можно записать следующим образом:

$$U_j^{m+1} = (I - ir\theta S)^{-1} (I + ir(1-\theta)) V_j^m, \quad (35)$$

$$u(x_j, 0) = \varphi(x_j)$$

$$U_{N-1} = U_0, \quad U_N = U_1,$$

где введены следующие обозначения:

$$V_j^m = e^{-\tau b(|U_{j+1}^m|^{2n} U_{j+1}^m - |U_j^m|^{2n} U_j^m) / (h U_j^m)} \cdot U_j^m,$$

$$\varphi(x_j) =$$

$$\left[\frac{4k_3 e^{\sqrt{k_3}(x_j-z_0)}}{k_2^2 + 4k_1 k_3 + e^{2\sqrt{k_3}(x_j-z_0)} - 2k_2 e^{\sqrt{k_3}(x_j-z_0)}} \right]^{\frac{1}{2n}} \times e^{i\Psi(x_j)},$$

$$\psi(x_j) = \frac{b(2n+1)}{\sqrt{k_1}(n+1)} \operatorname{arctg} \left\{ \frac{e^{\sqrt{k_3}(x_j-z_0)} - k_2}{2\sqrt{k_1 k_2}} \right\} - \frac{C_0}{2\alpha} x_j + C_3,$$

$$S = \begin{pmatrix} 2\alpha & -\alpha & \dots & 1 \\ -\alpha & 2\alpha & -\alpha & \dots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \dots & -\alpha & 2\alpha & -\alpha \\ 1 & \dots & -\alpha & 2\alpha \end{pmatrix},$$

где показаны только ненулевые элементы матрицы, I – единичная матрица, $r = \tau/h^2$, $0 < \theta < 1$, $i^2 = -1$.

Разработан программный код, реализующий алгоритм численного решения краевой задачи (32)–(34). В программе предусмотрена возможность визуализации результатов расчета с помощью библиотеки matplotlib, которые можно видеть на рис. 1.

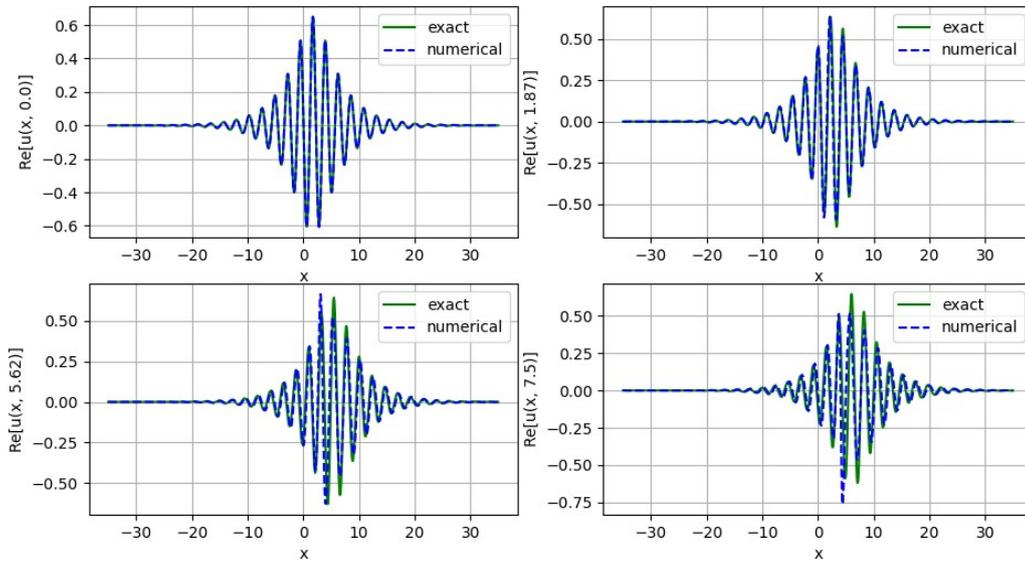


Рис. 1. Графики численного решения в сравнении с точным решением (31) при $\alpha = 0.11$, $b = -0.6$, $C_0 = 0.6$, $L = 70$, $h = 0.05$, $\tau = 0.0025$, погрешность $\epsilon = 0.7932$

Для исследования погрешности использованного метода при численном моделировании был выполнен ряд экспериментальных вычислений для набора шагов 0.05, 0.025, 0.02, 0.0125, 0.01. На основе проведенных расчетов построена табл. 1, в которой представлены значения погрешности в зависимости от значений

шага h и коэффициента отражения n при количестве итераций $M = 2500$ и размере области $L = 50$. Таблица построена с учетом зависимости $\tau = h^2$. Время выполнения расчетов при этом варьировалось от 52 до 251 с.

Таблица 1. Погрешность численного решения в зависимости от h

	h	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
1	0.05	0.13159	0.63366	0.92831	0.94652	0.90263
2	0.025	0.03783	0.1811	0.32705	0.44452	0.52886
3	0.02	0.02449	0.11839	0.21999	0.31212	0.38845
4	0.0125	0.00966	0.04714	0.08967	0.13233	0.17359
5	0.01	0.00619	0.03027	0.05778	0.08581	0.11404

Исходя из полученных результатов можно сделать вывод, что погрешность вычислений уменьшается при увеличении количества разбиений сетки и возрастает при увеличении значе-

нии параметра n , ответственного за нелинейность уравнения, что согласуется с теоретическими сведениями.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрено обобщенное уравнение Каупа–Ньюэлла, используемое для описания распространения импульсов в оптической среде. Представлены точные решения, выраженные через эллиптическую функцию Вейерштрасса и эллиптический синус при $n = 1$, а также в виде уединенных волн при произвольном значении параметра n . Построено численное решение краевой задачи, описываемой уравнением (1) с учетом периодических граничных условий. Разработан программный код на языке программирования Python, в котором используются библиотеки `numpy`, `tabulate` и `matplotlib`. Исследована зависимость погрешности от значений коэффициента отражения n . Показана зависимость погрешности численного решения от количества разбиений в сетке. Приведены графики сравнения численного и аналитического решений при учете ограничений на параметры математической модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sulaiman T.A., Yusuf A., Yusuf B., and Baleanu D.* Propagation of diverse ultrashort pulses in optical fiber to Triki-Biswas equation and its modulation instability analysis // *Modern Physics Letters B*, 2021. V. 35. № 33. P. 2150491.
2. *Kudryashov N.A., Biswas A.* Optical solitons of nonlinear Schrödinger's equation with arbitrary dual-power law parameters // *Optik*, 2022. V. 252. P. 168497.
3. *Triki H., Zhou Q., Biswas A., Liu W., Yildirim Y., Alshehri H.M., and Belic M. R.* Localized pulses in optical fibers governed by perturbed Fokas–Lenells equation // *Physics Letters A*, 2022. V. 421. P. 127782.
4. *Kudryashov N.A.* Mathematical model of propagation pulse in optical fiber with power nonlinearities // *Optik*, 2020. V. 212. P. 164750.
5. *Kudryashov N.A.* A generalized model for description of propagation pulses in optical fiber // *Optik*, 2019. V. 189. P. 42–52.
6. *Kudryashov N.A.* Optical solitons of mathematical model with arbitrary refractive index // *Optik*, 2020. V. 224. P. 165391.
7. *Kudryashov N.A.* Model of propagation pulses in an optical fiber with a new law of refractive indices // *Optik*, 2021. V. 248. P. 168160.
8. *Антонова Е.В., Кудряшов Н.А.* Темные и светлые солитоны нелинейного уравнения Шредингера с насыщением // *Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ»*, 2023. Т. 11, № 1. С. 22–27.
9. *Younas U., Sulaiman T.A., Ren J.* Dynamics of optical pulses in dual-core optical fibers modelled by decoupled nonlinear Schrödinger equation via GERF and NEDA techniques // *Optical and Quantum Electronics*, 2022. V. 54. № 11. P. 738.
10. *Triki H., Biswas A.* Dark solitons for a generalized nonlinear Schrödinger equation with parabolic law and dual-power law nonlinearities // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2011. V. 34. № 8. P. 958–962.
11. *Biswas A., Triki H., Zhou Q., Moshokoa S.P., Ullah M. Z., and Belic M.* Cubic–quartic optical solitons in Kerr and power law media // *Optik*, 2017. V. 144. P. 357–362.
12. *Triki H., Biswas A.* Sub pico-second chirped envelope solitons and conservation laws in monomode optical fibers for a new derivative nonlinear Schrödinger's model // *Optik*, 2018. V. 173. P. 235–241.
13. *Gonzalez-Gaxiola O.* Optical soliton solutions for Triki-Biswas equation by Kudryashov's R function method // *Optik*, 2022. V. 249. P. 168230.
14. *Zhou Q., Ekici M., Sonmezoglu A.* Exact chirped singular soliton solutions of Triki-Biswas equation // *Optik*, 2019. V. 181. P. 338–342.
15. *Kudryashov N.A.* Explicit formulas for general solutions of two nonlinear ordinary differential equations via Jacobi elliptic sine // *AIP Conference Proceedings / AIP Publishing LLC*, 2022. V. 2425. P. 340010.
16. *Kudryashov N.A., Antonova E.V.* Solitary waves of equation for propagation pulse with power nonlinearities // *Optik*, 2020. V. 217. P. 164881.

ANALYTICAL AND NUMERICAL MODELLING OF SOLITARY WAVES DESCRIBED BY THE GENERALIZED KAUP–NEWELL EQUATION

K.V. Kan^{1,*}, N.A. Kudryashov^{1,**}¹National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute),
Moscow, 115409 Russia

*e-mail: kan_13@mail.ru

**e-mail: nakudr@gmail.com

Received April 21, 2023; revised April 26, 2023; accepted May 11, 2023

Pulse propagation in optical fiber described by the generalized Kaup–Newell equation with arbitrary refractive index is investigated. Using traveling wave variables the generalized Kaup–Newell equation is reduced to a system of nonlinear differential equations. Compatibility conditions for the system of equations are found. Exact solutions of the equation with fixed $n = 1$ expressed by an elliptic Weierstrass function and an elliptic sine are obtained. Using the generalized simplest equation method, exact solutions of the equation in the form of solitary waves are found for an arbitrary refractive index. Mathematical model with periodical boundary conditions is formulated. Using pseudo-spectral method the numerical solution on a regular grid is constructed. The program code of the numerical solution for the problem is verified by comparing the numerical solution with the analytical one in the form of solitary waves. The error dependence on a step of grid is studied taking into account the restrictions on the model parameters. Figures of analytical and numerical solutions were constructed and analyzed.

Keywords: optical pulse, generalized Kaup–Newell equation, pseudo-spectral method.

REFERENCES

1. Sulaiman T.A., Yusuf A., Yusuf B., Baleanu D. Propagation of diverse ultrashort pulses in optical fiber to Triki–Biswas equation and its modulation instability analysis. *Modern Physics Letters B*, 2021. Vol. 35. No. 33. P. 2150491.
2. Kudryashov N.A., Biswas A. Optical solitons of nonlinear Schrödinger's equation with arbitrary dual-power law parameters. *Optik*, 2022. Vol. 252. P. 168497.
3. Triki H., Zhou Q., Biswas A., Liu W., Yıldırım Y., Alshehri H.M., Belic M.R. Localized pulses in optical fibers governed by perturbed Fokas–Lenells equation. *Physics Letters A*, 2022. Vol. 421. P. 127782.
4. Kudryashov N.A. Mathematical model of propagation pulse in optical fiber with power nonlinearities. *Optik*, 2020. Vol. 212. P. 164750.
5. Kudryashov N.A. A generalized model for description of propagation pulses in optical fiber. *Optik*, 2019. Vol. 189. P. 42–52.
6. Kudryashov N.A. Optical solitons of mathematical model with arbitrary refractive index. *Optik*, 2020. Vol. 224. P. 165391.
7. Kudryashov N.A. Model of propagation pulses in an optical fiber with a new law of refractive indices. *Optik*, 2021. Vol. 248. P. 168160.
8. Antonova E.V., Kudryashov N.A. Temnye i svetlye solitony nelinejnogo uravneniya SHredingera s nasyshcheniem. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2023. T. 11. No. 1. Pp. 22–27.
9. Younas U., Sulaiman T.A., Ren J. Dynamics of optical pulses in dual-core optical fibers modelled by decoupled nonlinear Schrödinger equation via GERF and NEDA techniques. *Optical and Quantum Electronics*, 2022. Vol. 54. No. 11. P. 738.
10. Triki H., Biswas A. Dark solitons for a generalized nonlinear Schrödinger equation with parabolic law and dual-power law nonlinearities. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2011. Vol. 34. No. 8. P. 958–962.
11. Biswas A., Triki H., Zhou Q., Moshokoa S.P., Ullah M.Z., Belic M. Cubic–quartic optical solitons in Kerr and power law media. *Optik*, 2017. Vol. 144. P. 357–362.
12. Triki H., Biswas A. Sub pico-second chirped envelope solitons and conservation laws in monomode optical fibers for a new derivative nonlinear Schrödinger's model. *Optik*, 2018. Vol. 173. P. 235–241.
13. Gonzalez-Gaxiola O. Optical soliton solutions for Triki–Biswas equation by Kudryashov's R function method. *Optik*, 2022. Vol. 249. P. 168230.
14. Zhou Q., Ekici M., Sonmezoglu A. Exact chirped singular soliton solutions of Triki–Biswas equation. *Optik*, 2019. Vol. 181. P. 338–342.
15. Kudryashov N.A. Explicit formulas for general solutions of two nonlinear ordinary differential equations via Jacobi elliptic sine. *AIP Conference Proceedings*. AIP Publishing LLC, 2022. Vol. 2425. P. 340010.
16. Kudryashov N. A., Antonova E. V. Solitary waves of equation for propagation pulse with power nonlinearities. *Optik*, 2020. Vol. 217. P. 164881.