

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9 + 532.5

БАЗОВЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДВУМЕРНОЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ НАД НЕРОВНЫМ ДНОМ В ЛАГРАНЖЕВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

© 2019 г. А. В. Аксенов^{a,b,c,*}, К. П. Дружков^{a,b,d,**}

^a Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, 119991, Россия

^b Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 125047, Россия

^c Научно-исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, 115409, Россия

^d Московский физико-технический институт (государственный университет),
г. Долгопрудный, Московская обл., 141701, Россия

*e-mail: aksenov@mech.math.msu.su

**e-mail: Konstantin.Druzhkov@gmail.com

Поступила в редакцию 06.03.2019 г.

После доработки 06.03.2019 г.

Принята к публикации 26.03.2019 г.

В статье рассматриваются системы уравнений двумерной мелкой воды над неровным дном как в эйлеровых, так и в лагранжевых переменных. Введена в рассмотрение промежуточная система уравнений. Ее решения одновременно являются как решениями системы уравнений двумерной мелкой воды в эйлеровых переменных, так и решениями в неявном виде системы уравнений двумерной мелкой воды, записанной в лагранжевых переменных. Найдены все базовые гидродинамические законы сохранения промежуточной системы уравнений. Базовые гидродинамические законы сохранения промежуточной системы уравнений были получены без использования симметрий. Получена связь между законами сохранения промежуточной системы уравнений и системой уравнений двумерной мелкой воды, записанной в лагранжевых переменных. Базовые гидродинамические законы сохранения промежуточной системы уравнений были использованы для построения базовых законов сохранения первого порядка системы уравнений двумерной мелкой воды в лагранжевых переменных.

Ключевые слова: мелкая вода, эйлеровы и лагранжевы переменные, законы сохранения, накрывающая система

DOI: 10.1134/S2304487X19030039

ВВЕДЕНИЕ

Существуют различные подходы для построения законов сохранения уравнений математической физики [1–6]. Наиболее широко известен способ построения законов сохранения на основании теоремы Нетер с использованием вариационных симметрий [1].

В работах [7, 8] были получены гидродинамические законы сохранения системы уравнений одномерной мелкой воды над неровным дном в эйлеровых переменных.

В настоящей работе получены базовые законы сохранения первого порядка уравнения мелкой воды в лагранжевых переменных, справедливых для всех профилей дна, без использования симметрий.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В работах [7, 8] была рассмотрена система уравнений одномерной мелкой воды над неровным дном и были найдены все гидродинамические законы сохранения.

В безразмерных переменных система уравнений двумерной мелкой воды над неровным дном имеет следующий вид [9]:

$$\begin{aligned}u_t + uu_x + vu_y + \eta_x &= 0, \\v_t + uv_x + vv_y + \eta_y &= 0, \\ \eta_t + [u(\eta + h)]_x + [v(\eta + h)]_y &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь $h = h(x, y)$, $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$ — компоненты средней по глубине горизонтальной скорости, $\eta = \eta(x, y, t)$ — отклонение свободной

поверхности, $\eta + h \geq 0$. Профиль дна имеет вид $z = -h(x, y)$.

Запишем систему уравнений (1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y &= -p_x + h_x, \\ v_t + uv_x + vv_y &= -p_y + h_y, \\ \rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\rho = \eta + h$, $\rho \geq 0$.

Замечание 1. Система уравнений (2) аналогична системе уравнений двумерной газовой динамики [10, 11] для политропного газа с $\gamma = 2$.

Введем новые переменные $a = a(x, y, t)$, $b = b(x, y, t)$ и рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y &= -p_x + h_x, \\ v_t + uv_x + vv_y &= -p_y + h_y, \\ a_t + ua_x + va_y &= 0, \\ b_t + ub_x + vb_y &= 0, \\ a_x b_y - a_y b_x &= \rho. \end{aligned} \quad (3)$$

Третье и четвертое уравнения системы уравнений (3) означают, что введенные переменные a и b являются лагранжевыми.

Последние три уравнения системы уравнений (3) можно записать в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} -a_t b_y + b_t a_y &= \rho u, \\ a_t b_x - b_t a_x &= \rho v, \\ a_x b_y - a_y b_x &= \rho, \end{aligned}$$

откуда следует справедливость третьего уравнения системы уравнений (2).

Система уравнений (3) является промежуточной системой уравнений между системами уравнений двумерной мелкой воды, записанных в эйлеровых и лагранжевых переменных. Ее решения одновременно являются как решениями системы уравнений (2), так и решениями в неявном виде системы уравнений двумерной мелкой воды, записанной в лагранжевых переменных.

Замечание 2. Закон сохранения массы (третье уравнение системы уравнений (2)) является тривиальным законом сохранения для промежуточной системы уравнений (3).

Запишем в следующем виде систему уравнений двумерной мелкой воды (2) в лагранжевых переменных:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{\tilde{t}} &= -\frac{\tilde{y}_{\tilde{b}} \tilde{p}_{\tilde{a}} - \tilde{y}_{\tilde{a}} \tilde{p}_{\tilde{b}}}{\tilde{x}_{\tilde{a}} \tilde{y}_{\tilde{b}} - \tilde{x}_{\tilde{b}} \tilde{y}_{\tilde{a}}} + h_{\tilde{x}}, \\ \tilde{y}_{\tilde{t}} &= -\frac{-\tilde{x}_{\tilde{b}} \tilde{p}_{\tilde{a}} + \tilde{x}_{\tilde{a}} \tilde{p}_{\tilde{b}}}{\tilde{x}_{\tilde{a}} \tilde{y}_{\tilde{b}} - \tilde{x}_{\tilde{b}} \tilde{y}_{\tilde{a}}} + h_{\tilde{y}}, \\ \tilde{p}(\tilde{x}_{\tilde{a}} \tilde{y}_{\tilde{b}} - \tilde{x}_{\tilde{b}} \tilde{y}_{\tilde{a}}) &= 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Справедливо следующее предложение.

Предложение 1. Взаимно-однозначное соответствие между решениями систем уравнений (3) и (4) дается соотношениями

$$\begin{aligned} u &= \tilde{x}_{\tilde{t}}, \quad v = \tilde{y}_{\tilde{t}}, \quad \rho = \tilde{p}, \\ x &= \tilde{x}, \quad y = \tilde{y}, \quad t = \tilde{t}, \\ a &= \tilde{a}, \quad b = \tilde{b}. \end{aligned} \quad (5)$$

Замечание 3. Промежуточная система уравнений (3) является накрывающей системой уравнений [3] для системы уравнений (2).

Ниже, для сокращения записи, в системе уравнений (4) не будет использоваться знак тильда.

СВЯЗЬ МЕЖДУ ЗАКОНАМИ СОХРАНЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И ЗАКОНАМИ СОХРАНЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ В ЭЙЛЕРОВЫХ И ЛАГРАНЖЕВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Под законами сохранения промежуточной системы уравнений (3) будем понимать тройки функций (P, Q, R) , для которых на решениях системы уравнений (3) выполнено соотношение

$$D_x(P) + D_y(Q) + D_t(R) = 0. \quad (6)$$

Здесь P, Q, R – гладкие функции от независимых и зависимых переменных и их производных;

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{\partial}{\partial x} + a_x \frac{\partial}{\partial a} + b_x \frac{\partial}{\partial b} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + v_x \frac{\partial}{\partial v} + p_x \frac{\partial}{\partial p} + \dots, \\ D_y &= \frac{\partial}{\partial y} + a_y \frac{\partial}{\partial a} + b_y \frac{\partial}{\partial b} + u_y \frac{\partial}{\partial u} + v_y \frac{\partial}{\partial v} + p_y \frac{\partial}{\partial p} + \dots, \\ D_t &= \frac{\partial}{\partial t} + a_t \frac{\partial}{\partial a} + b_t \frac{\partial}{\partial b} + u_t \frac{\partial}{\partial u} + v_t \frac{\partial}{\partial v} + p_t \frac{\partial}{\partial p} + \dots \end{aligned}$$

– операторы полного дифференцирования в переменных x, y, t соответственно. Порядком закона сохранения будем называть максимальный порядок производных, входящих в функции P, Q, R . Законы сохранения нулевого порядка будем называть гидродинамическими. Аналогично определяются законы сохранения $(\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R})$ системы уравнений (4), для которых на решениях системы уравнений (4) выполнено соотношение

$$D_a(\tilde{P}) + D_b(\tilde{Q}) + D_t(\tilde{R}) = 0.$$

Здесь $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$, $\tilde{R}$ — гладкие функции от соответствующих независимых и зависимых переменных и их производных;

$$\begin{aligned}\tilde{D}_a &= \frac{\partial}{\partial a} + x_a \frac{\partial}{\partial x} + y_a \frac{\partial}{\partial y} + \rho_a \frac{\partial}{\partial \rho} + \dots, \\ \tilde{D}_b &= \frac{\partial}{\partial b} + x_b \frac{\partial}{\partial x} + y_b \frac{\partial}{\partial y} + \rho_b \frac{\partial}{\partial \rho} + \dots, \\ \tilde{D}_t &= \frac{\partial}{\partial t} + x_t \frac{\partial}{\partial x} + y_t \frac{\partial}{\partial y} + \rho_t \frac{\partial}{\partial \rho} + \dots\end{aligned}$$

— операторы полного дифференцирования в переменных a , b , t соответственно. Тривиальными законами сохранения будем называть законы сохранения двух типов (или их комбинации) [2]. Тривиальным законом первого типа соответствуют тройки функций, обращающиеся в нуль на решениях системы уравнений, а тривиальным законом второго типа соответствуют тройки функций, для которых соотношение (6) выполнено тождественно.

Предложение 2. Гидродинамический закон сохранения промежуточной системы уравнений (3) с функциями $P = P(a, b, x, y, t, u, v, \rho)$, $Q = P(a, b, x, y, t, u, v, \rho)$, $R = P(a, b, x, y, t, u, v, \rho)$ определяет закон сохранения первого порядка системы уравнений (4) с функциями $\tilde{P} = y_b P - x_b Q + (x_b y_t - x_t y_b) R$, $\tilde{Q} = -y_a P + x_a Q - (x_a y_t - x_t y_a) R$, $\tilde{R} = (x_a y_b - x_b y_a) R$ с учетом соотношений (5). Верно и обратное.

Доказательство. Обозначим ограничения операторов полного дифференцирования $\tilde{D}_a$, $\tilde{D}_b$ и $\tilde{D}_t$ на систему уравнений (4) как $\hat{D}_a$, $\hat{D}_b$ и $\hat{D}_t$. Ограничения операторов D_x , D_y и D_t на промежуточную систему уравнений (3) обозначим как $\bar{D}_x$, $\bar{D}_y$ и $\bar{D}_t$. В силу соотношений (5) эти операторы связаны следующим образом

$$\begin{aligned}\bar{D}_x &= \frac{y_b}{x_a y_b - x_b y_a} \hat{D}_a - \frac{y_a}{x_a y_b - x_b y_a} \hat{D}_b, \\ \bar{D}_y &= -\frac{x_b}{x_a y_b - x_b y_a} \hat{D}_a + \frac{x_a}{x_a y_b - x_b y_a} \hat{D}_b, \\ \bar{D}_t &= \frac{x_b y_t - x_t y_b}{x_a y_b - x_b y_a} \hat{D}_a + \frac{x_t y_a - x_a y_t}{x_a y_b - x_b y_a} \hat{D}_b + \hat{D}_t.\end{aligned}$$

Тогда выполнены соотношения

$$\begin{aligned}\bar{D}_x(P) + \bar{D}_y(Q) + \bar{D}_t(R) &= \frac{y_b}{x_a y_b - x_b y_a} \hat{D}_a(P) - \\ &- \frac{y_a}{x_a y_b - x_b y_a} \hat{D}_b(P) - \frac{x_b}{x_a y_b - x_b y_a} \hat{D}_a(Q) + \\ &+ \frac{x_a}{x_a y_b - x_b y_a} \hat{D}_b(Q) + \frac{x_b y_t - x_t y_b}{x_a y_b - x_b y_a} \hat{D}_a(R) + \\ &+ \frac{x_t y_a - x_a y_t}{x_a y_b - x_b y_a} \hat{D}_b(R) + \hat{D}_t(R) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&+ \frac{x_t y_a - x_a y_t}{x_a y_b - x_b y_a} \hat{D}_b(R) + \hat{D}_t(R) = \\ &= \frac{1}{x_a y_b - x_b y_a} (\hat{D}_a(y_b P - x_b Q + (x_b y_t - x_t y_b) R) + \\ &+ \hat{D}_b(-y_a P + x_a Q - (x_a y_t - x_t y_a) R) + \\ &+ \hat{D}_t((x_a y_b - x_b y_a) R)),\end{aligned}$$

откуда следует справедливость доказываемого предложения.

Справедливо также предложение

Предложение 3. Если функции P , Q и R в некотором законе сохранения промежуточной системы уравнений (3) не зависят от переменных a и b , то они определяют закон сохранения системы уравнений (2). Все законы сохранения системы уравнений (2), кроме закона сохранения

$$D_t(\rho) + D_x(\rho u) + D_y(\rho v) = 0,$$

получаются из законов сохранения промежуточной системы уравнений (3).

Отметим, что нахождение гидродинамических законов сохранения промежуточной системы уравнений (3) проще, чем нахождение законов сохранения первого порядка уравнения (4).

БАЗОВЫЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Соотношение (6) на решениях промежуточной системы уравнений (3) принимает вид

$$\begin{aligned}&(P_u - u R_u - \rho R_\rho) u_x + (Q_u - v R_u) u_y + \\ &+ (P_v - u R_v) v_x + (Q_v - v R_v - \rho R_\rho) v_y + \\ &+ (P_\rho - R_u - u R_\rho) \rho_x + (Q_\rho - R_v - v R_\rho) \rho_y + \\ &+ (P_a - u R_a) a_x + (Q_a - v R_a) a_y + \\ &+ (P_b - u R_b) b_x + \frac{b_x a_y + \rho}{a_x} (Q_b - v R_b) + \\ &+ h_x R_u + h_y R_v + P_x + Q_y + R_t = 0.\end{aligned}$$

Приравнявая к нулю коэффициенты при производных, получим следующую переопределенную систему линейных уравнений

$$\begin{aligned}P_u - u R_u - \rho R_\rho &= 0, \\ Q_u - v R_u &= 0, \\ P_v - u R_v &= 0, \\ Q_v - v R_v - \rho R_\rho &= 0, \\ P_\rho - R_u - u R_\rho &= 0, \\ Q_\rho - R_v - v R_\rho &= 0, \\ P_a - u R_a &= 0,\end{aligned}\tag{7}$$

$$\begin{aligned}Q_a - vR_a &= 0, \\P_b - uR_b &= 0, \\Q_b - vR_b &= 0, \\h_x R_u + h_y R_v + P_x + Q_y + R_t &= 0.\end{aligned}$$

Переопределенная система уравнений (7) была исследована на совместность.

Найдем базовые гидродинамические законы сохранения системы уравнений (3), зависящие от функции $h = h(x, y)$ и ее производных, и справедливые при любом профиле дна.

Предложение 4. *Промежуточная система уравнений (3) обладает одним базовым гидродинамическим законом сохранения*

$$\begin{aligned}P_1 &= \rho \left(\frac{u^2 + v^2}{2} + \rho - h \right), \\Q_1 &= \rho \left(\frac{u^2 + v^2}{2} + \rho - h \right), \\R_1 &= \rho \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{(\rho - h)^2}{2}.\end{aligned}\quad (8)$$

БАЗОВЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДВУМЕРНОЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ В ЛАГРАНЖЕВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Используя предложение 2, найдем функции $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$, $\tilde{R}$, соответствующие базовому закону сохранения (8).

Предложение 5. *Система уравнений (4) обладает следующим базовым законом сохранения первого порядка*

$$\begin{aligned}\tilde{P}_1 &= (x_b y_t - x_t y_b) \frac{h^2 - \rho^2}{2}, \\\tilde{Q}_1 &= -(x_a y_t - x_t y_a) \frac{h^2 - \rho^2}{2}, \\\tilde{R}_1 &= (x_a y_b - x_b y_a) \frac{\rho(x_t^2 + y_t^2) + (\rho - h)^2}{2}.\end{aligned}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе была введена в рассмотрение промежуточная система уравнений (3). Базовые гидродинамические законы сохранения промежуточной системы уравнений были получены без использования симметрий. Полученные законы сохранения были использованы для нахождения базовых законов сохранения первого порядка системы уравнений мелкой воды в лагранжевых переменных. Было показано, что с использованием

законов сохранения промежуточной системы уравнений могут быть получены гидродинамические законы сохранения системы уравнений одномерной мелкой воды в эйлеровых переменных.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ 18-01-00890 и Фонда развития теоретической физики и математики "БАЗИС" (стипендиат К.П. Дружков).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Noether E. Invariante Variationsprobleme // Nachr. D. König. Gesellsch. D. Wissen. Zu Göttingen, Math.-Phys. Klasse. 1918. P. 235–257 (English translation: Transport Theory and Stat. Phys. 1971. V. 1. № 3. P. 186–207).
2. Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 639 с.
3. Симметрия и законы сохранения уравнений математической физики. Под ред. Виноградова А.М., Красильщика И.С. М.: Факториал, 1997. 464 с.
4. Bluman G.W., Cheviakov A.F., Anco S.C. Applications of Symmetry Methods to Partial Differential Equations, Springer, 2010. 398 pp.
5. Шмыглевский Ю.Д. Аналитические исследования динамики жидкости и газа. М.: Эдиториал УРСС. 1999. 232 с.
6. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton. 2012. 1840 p.
7. Аксенов А.В., Дружков К.П. Законы сохранения, симметрии и точные решения системы уравнений мелкой воды над неровным дном // Вестник НИЯУ МИФИ. 2016. Т. 5. № 1. С. 38–46.
8. Aksenov A.V., Druzhkov K.P. Conservation laws and symmetries of the shallow water system above rough bottom // Journal of Physics: Conference Series. 2016. V. 722. P. 1–7.
9. Стокер Дж. Волны на воде. Математическая теория и приложения. М.: Государственное издательство иностранной литературы. 1959. 620 с.
10. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М.: Изд-во ИЛ. 1950. 426 с.
11. Черный Г.Г. Газовая динамика. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1988. 424 с.

Basic Conservation Laws of the System of Equations of Two-Dimensional Shallow Water over an Uneven Bottom in the Lagrangian Variables

A. V. Aksenov^{a,b,c,#} and K. P. Druzhkov^{a,b,d,##}

^a Moscow State University, Moscow, 119991 Russia

^b Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 125047 Russia

^c National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

^d Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Dolgoprudnyi, Moscow region, 141701 Russia

[#]e-mail: aksenov@mech.math.msu.su

^{##}e-mail: Konstantin.Druzhkov@gmail.com

Received March 6, 2019; revised March 6, 2019; accepted March 26, 2019

Abstract—Systems of equations of two-dimensional shallow water over an uneven bottom have been considered in both the Eulerian and Lagrangian variables. An intermediate system of equations has been introduced. Its solutions are simultaneously solutions of the system of equations of two-dimensional shallow water in the Eulerian variables and implicit solutions of the system of equations of two-dimensional shallow water in the Lagrangian variables. All basic hydrodynamic conservation laws of the intermediate system of equations have been found without using symmetries. A relationship has been obtained between the conservation laws of the intermediate system of equations and the system of equations of two-dimensional shallow water in the Lagrangian variables. The basic hydrodynamic conservation laws of the intermediate system of equations have been used to construct the basic conservation laws of the first order for the system of equations of two-dimensional shallow water in the Lagrangian variables.

Keywords: shallow water, Eulerian and Lagrangian variables, conservation laws, covering system

DOI: 10.1134/S2304487X19030039

REFERENCES

1. Noether E. Invariante Variationsprobleme // *Nachr. D. Königl. Gesellsch. D. Wissen. Zu Göttingen, Math.-Phys. Klasse.*, 1918, p. 235–257 (English translation: *Transport Theory and Stat. Phys.*, 1971, v. 1, 3, p. 186–207).
2. Olver P.J. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, 2nd ed., Springer, 1993, 513 pp.
3. *Symmetries and Conservation Laws for Differential Equations of Mathematical Physics*, Editors: A.M. Vinogradov and I.S. Krasil'shchik, American Mathematical Society, 1999, v. 182, 333 pp.
4. Bluman G.W., Cheviakov A.F., Anco S.C. *Applications of Symmetry Methods to Partial Differential Equations*, Springer, 2010, 398 pp.
5. Shmyglevski Yu.D., *Analytical Study of Gas Dynamics and Fluid*, Editorial URSS, Moscow, 1999, 232 pp. (in Russian).
6. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, 2012, 1840 pp.
7. Aksenov A.V., Druzhkov K.P. Zakony sokhraneniya, simmetrii i tochnye resheniya sistemy uravnenij melkoj vody nad nerovnym dnom [Conservation Laws, Symmetries, and Exact Solutions of the System of Equations of Shallow Water over an Irregular Bottom] // *Vestnik Nacional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta MIFI*, 2016, v. 5, 1, p. 38–46.
8. Aksenov A.V., Druzhkov K.P. Conservation laws and symmetries of the shallow water system above rough bottom // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2016, v. 722, p. 1–7.
9. Stoker J.J. *Water Waves. The Mathematical Theory With Applications*. Interscience Publishers, Inc., New York, 1957, 609 pp.
10. Courant R., Friedrichs K.O. *Supersonic Flow and Shock Waves*, Interscience Publ, New York, 1948, 464 pp.
11. Cherny G.G. *Gas dynamics*, Nauka, Moscow, 1988, 424 pp. (in Russian).