

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.95

МЕТОДЫ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

© 2023 А.В. Аксенов^{1*}

¹ Механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Москва, 119991, Россия

*e-mail: aksenov@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию: 21.04.2023

После доработки: 28.04.2023

Принята к публикации: 11.05.2023

Рассматриваются методы обобщенного и функционального разделения переменных, используемые для поиска точных решений нелинейных уравнений математической физики. Описан прямой метод построения редукций (во многом родственной методам функционального разделения переменных) и его более общая версия, основанная на принципе расщепления. Исследуются уравнения тепло- и массопереноса, теории волн, гидродинамики, нелинейной оптики, теории горения, химической технологии, биологии и др.

Ключевые слова: обобщенное разделение переменных, функциональное разделение переменных, точные решения, нелинейные уравнения математической физики, уравнения тепло- и массопереноса, уравнения гидродинамики.

DOI: 10.26583/vestnik.2023.260

В 2020 г. в издательстве Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН вышла в свет книга А.Д. Полянина и А.И. Журова «Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики» [1].

Нелинейные уравнения математической физики и другие нелинейные дифференциальные уравнения с частными производными второго и более высоких порядков часто встречаются в различных областях математики, физики, механики, химии, биологии и в многочисленных приложениях. Общее решение таких уравнений удается получить весьма редко в исключительных случаях. Поэтому на практике обычно приходится ограничиваться поиском и анализом частных решений, которые принято называть «точными решениями».

Точные решения всегда играли и продолжают играть огромную роль для выявления качественных особенностей многих явлений и процессов в различных областях естествознания. Точные решения нелинейных уравнений наглядно демонстрируют и позволяют лучше понять сложные нелинейные эффекты, такие как пространственная локализация процессов переноса, множественность или отсутствие стационарных состояний при определенных условиях, существование режимов с обострением, возможная негладкость или разрывность иско-

мых величин и др. Простые решения линейных и нелинейных дифференциальных уравнений широко используются для иллюстрации теоретического материала и некоторых приложений в учебных курсах университетов и технических вузов (по прикладной и вычислительной математике, асимптотическим методам, теоретической физике, теории тепло- и массопереноса, гидродинамике, газовой динамике, теории волн, нелинейной оптике и др.).

Важно отметить, что точные решения уравнений математической физики играют важную роль стандартных «математических эталонов», которые широко используются для оценки точности различных численных, асимптотических и приближенных аналитических методов.

Лет двадцать–тридцать назад было весьма распространено мнение, что подавляющее большинство точных решений являются «инвариантными решениями», которые можно найти путем использования метода группового анализа дифференциальных уравнений (называемого также классическим методом поиска симметрий), основанного на поиске непрерывных однопараметрических преобразований, сохраняющих вид рассматриваемых уравнений. Однако потом все чаще и чаще исследователи стали находить более сложные (неинвариантные) точные решения нелинейных уравнений математической физики, для построения которых надо

МЕТОДЫ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

было использовать уже другие методы. В последние годы пополнение списка точных решений в основном происходит за счет поиска новых неинвариантных решений.

В рассматриваемой книге излагаются конструктивные аналитические методы построения неинвариантных точных решений нелинейных уравнений математической физики, обладающие широким диапазоном применимости. Описаны методы обобщенного и функционального разделения переменных, прямой метод построения редукций (метод Кларксона–Крускала), метод поиска слабых симметрий (обобщающий прямой метод построения редукций) и метод дифференциальных связей. Эти методы позволяют находить точные решения нелинейных уравнений с частными производными разных типов и разных порядков. Важно отметить, что в книгу включены разработанные в последние несколько лет прямые методы построения точных решений с функциональным разделением переменных в неявной форме (характерная качественная особенность этих методов заключается в том, что они обычно позволяют получать решения в замкнутом виде). Проведено сопоставление эффективности рассматриваемых методов.

Изложение сопровождается многочисленными конкретными примерами, в которых авторы старались давать неформальные пояснения и высказывать соображения, которые использовались при построении тех или иных решений. Для иллюстрации широкой области применимости описанных методов рассматриваются как нелинейные УрЧП второго порядка, так и различные УрЧП старших порядков.

При отборе практического материала авторы отдавали наибольшее предпочтение следующим важным типам УрЧП:

1) нелинейным уравнениям, которые встречаются в различных приложениях (в теории тепло- и массопереноса, гидродинамике, теории волн, газовой динамике, теории горения, нелинейной оптике, химической технологии, биологии и др.);

2) нелинейным уравнениям достаточно общего вида, которые зависят от одной или нескольких произвольных функций (такие уравнения и их решения представляют наибольший практический интерес для тестирования численных и приближенных аналитических методов).

В целом, книга содержит много нового материала, который ранее в монографиях не публиковался. Основные результаты можно найти в статьях авторов [2–5].

Данная книга будет полезной для широкого круга научных работников, преподавателей вузов, инженеров, аспирантов и студентов, специализирующихся в области прикладной и вычислительной математики, теоретической физики, механики, теории управления, химической технологии и биологии. Отдельные разделы книги и примеры могут быть использованы в курсах лекций по уравнениям математической физики и уравнениям с частными производными, для чтения спецкурсов и для проведения практических занятий.

Отметим, что электронная версия книги находится в свободном доступе в интернете

(https://eqworld.ipmnet.ru/Arts_Polyanin/Book_Polyanin_Zhurov_2020.pdf).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полянин А.Д., Журов А.И. Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики. М.: ИПМех РАН, 2020.
2. Polyanin A.D. Construction of exact solutions in implicit form for PDEs: New functional separable solutions of non-linear reaction-diffusion equations with variable coefficients, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2019, Vol. 111, pp. 95–105.
3. Polyanin A.D. Construction of functional separable solutions in implicit form for non-linear Klein–Gordon type equations with variable coefficients // *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2019, Vol. 114, pp. 29–40.
4. Polyanin A.D. Functional separation of variables in nonlinear PDEs: General approach, new solutions of diffusion-type equations. // *Mathematics*, 2020, Vol. 8, No. 1, 90.
5. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Separation of variables in PDEs using nonlinear transformations: Applications to reaction-diffusion type equations. // *Applied Mathematics Letters*, 2020, Vol. 100, 106055.

METHODS FOR SEPARATION OF VARIABLES AND EXACT SOLUTIONS NONLINEAR EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS

A.V. Aksenov^{1*}

¹ Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russia

*e-mail: aksenov@mech.math.msu.su

Received April 21, 2023; revised April 28, 2023; accepted May 11, 2023

Methods of generalized and functional separation of variables used to find exact solutions to nonlinear equations of mathematical physics are considered. A direct method for constructing reductions (in many ways similar to methods of functional separation of variables) and its more general version based on the principle of splitting are described. The equations of heat and mass transfer, wave theory, hydrodynamics, nonlinear optics, combustion theory, chemical technology, biology and other physics, heat and mass transfer equations, hydrodynamic equations are studied.

Keywords: generalized separation of variables, functional separation of variables, exact solutions, nonlinear equations of mathematical physics, heat and mass transfer equations, hydrodynamic equations.

REFERENCES

1. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Metody razdeleniya peremennyh i tochnye resheniya nelinejnyh uravnenij matematicheskoy fiziki. [Methods for separating variables and exact solutions of nonlinear equations of mathematical physics]. Moscow. Institute of Mechanics and Mechanics RAS Publ., 2020.
2. Polyanin A.D. Construction of exact solutions in implicit form for PDEs: New functional separable solutions of non-linear reaction-diffusion equations with variable coefficients. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2019, Vol. 111, pp. 95–105.
3. Polyanin A.D. Construction of functional separable solutions in implicit form for non-linear Klein–Gordon type equations with variable coefficients. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2019, Vol. 114, pp. 29–40.
4. Polyanin A.D. Functional separation of variables in nonlinear PDEs: General approach, new solutions of diffusion-type equations. Mathematics, 2020, Vol. 8, No. 1, 90.
5. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Separation of variables in PDEs using nonlinear transformations: Applications to reaction-diffusion type equations. Applied Mathematics Letters, 2020, Vol. 100, 106055.