

УДК 532.5:551.465

АМПЛИТУДНО-ФАЗОВАЯ СТРУКТУРА ВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ГРАНИЦЕ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА И ГЛУБОКОЙ ЖИДКОСТИ ОТ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

В.В. Булатов^{1,*}, И.Ю. Владимиров^{2,}**

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия

²Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Москва, 117997, Россия

*e-mail: internalwave@mail.ru

**e-mail: iyuvladimirov@rambler.ru

Поступила в редакцию: 17.09.2023

После доработки: 17.09.2023

Принята к публикации: 27.09.2023

Плавающий ледяной покров определяет динамическое взаимодействие между океаном и атмосферой, влияет на динамику не только морской поверхности, но и подповерхностных вод, и в общем движении по вертикали участвует как ледяной покров, так и вся масса жидкости под ним. В работе исследована амплитудно-фазовая структура волновых полей, возникающих на границе раздела льда и бесконечно глубокой однородной жидкости при обтекании локализованного источника возмущений. Ледяной покров моделируется тонкой упругой пластиной, деформации которой малы, и пластина является физически линейной. Получено интегральное представление решения и с помощью метода стационарной фазы построено асимптотическое представление для малых возмущений ледяного покрова вдали от локализованного источника. Приведены результаты расчетов дисперсионных зависимостей для различных параметров волновой генерации. Показано, что основными параметрами, определяющими характеристики амплитудно-фазовой структуры волновых возмущений поверхности ледяного покрова, являются толщина льда и скорость потока. Численные расчеты демонстрируют, что при изменении скорости потока и толщины льда происходит заметная качественная перестройка фазовых картин возбуждаемых дальних волновых полей на границе раздела льда и жидкости.

Ключевые слова: ледяной покров, возвышение поверхности раздела, глубокий океан, дальние поля, амплитудно-фазовая структура, локализованный источник.

DOI: 10.26583/vestnik.2023.267

Изучение волновых процессов в море с плавающим ледяным покровом актуально для изучения его реакции на различные гидродинамические возмущения, движущиеся надводные и подводные суда, процессы распада ледяных полей в интересах судоходства, а также совершенствования методов дистанционного зондирования поверхности ледяного покрытия [1–6]. Поверхностные возмущения ледяного покрова, которые могут быть зарегистрированы с помощью специальных радиолокационных и оптических систем, несут информацию не только об источниках возмущений, но и о характеристиках морской среды подо льдом [2, 3, 7, 8]. Плавающий ледяной покров, определяющий динамическое взаимодействие между океаном и атмосферой, влияет на динамику не только морской поверхности, но и подповерхностных вод, так как в общем движении по вертикали участ-

вует как ледяной покров, так и вся масса жидкости под ним. Одним из заметных источников возбуждения ледяного покрова могут являться интенсивные внутренние гравитационные волны, в частности колебания ледяного покрова за счет внутренних волн могут быть от нескольких сантиметров (прилив) до 2–3 м (цунами), амплитуды возмущений льда до 30 см регистрировались при наличии ветровых волн [9–15].

Обычно предполагается, что ледяной покров является сплошным (его горизонтальные масштабы превышают длины возбуждаемых волн), и при достаточно общих условиях моделируется тонкой упругой физически линейной пластиной, деформации которой малы [1, 3]. Для проведения прогнозных расчетов возмущений ледяного покрова можно подбирать параметры модели генерации так, чтобы приблизить смоделированную волновую систему к реально

наблюдаемым в природных условиях картинам возмущения поверхности льда [5, 6, 8].

Генерации волновых возмущений на границе льда и жидкости от обтекаемых подводных препятствий посвящены многочисленные исследования как в лабораторных опытах, так и в рамках теоретических работ. Современное состояние проблемы и подробный обзор работ содержится в [1–3, 16–20]. Обычно предполагается, что ледяной покров является сплошным, т.е. его горизонтальные масштабы превышают длины возбуждаемых волн и, при достаточно естественных условиях, моделируется тонкой упругой пластиной, деформации которой малы и пластина является физически линейной [17, 18, 21–23]. Цель настоящей работы – изучение амплитудно-фазовых характеристик волновых полей, возникающих на границе ледяного покрова и потока бесконечно глубокой однородной жидкости, обтекающей локализованный источник.

Рассматривается поток идеальной бесконечно глубокой жидкости, который обтекает точечный источник мощности массы q ($q = \text{const}$). Сверху течение ограничено ледяным покровом толщиной l . Горизонтальная плоскость $\xi\eta$ совпадает с невозмущенной границей раздела жидкости плотностью ρ_0 и льда плотностью ρ_1 . Скорость потока жидкости направлена вдоль оси ξ и равна V , источник расположен в точке $(0, 0, z_0)$, $z_0 < 0$. Обозначим через $\varphi(\xi, \eta, z)$ установившийся во времени потенциал возмущений скорости: $\nabla\varphi = (u, v, w)$, и через $\eta(\xi, \eta)$ – установившуюся величину возвышения поверхности раздела жидкости и ледового покрова. Тогда $(V + u, v, w)$ – вектор скорости произвольной частицы жидкости. В линейном приближении математическая постановка задачи имеет вид [1, 3, 17, 20]:

$$\left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi = q\delta(\xi)\delta(\eta)\delta(z - z_0),$$

$$\frac{D\varphi}{Dt} + g\eta - C\Delta\eta + B\Delta^2\eta + A\frac{D^2\eta}{Dt^2} = 0,$$

$$z = 0; \quad \frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad z = 0; \quad \varphi \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$; $\frac{D}{Dt} = V\frac{\partial}{\partial \xi}$; $A = \frac{l\rho_1}{\rho_0}$; $B = \frac{El^3}{12\rho_0(1-\nu_0^2)}$; $C = \frac{\sigma l}{\rho_0}$; g – ускорение свободного падения; E – модуль Юнга льда; ν_0 – коэффициент Пуассона; σ – начальное напряжение. Характерные значения этих величин в морских условиях равны [5, 6, 8]: $\rho_0 = 1025 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$,

$\rho_1 = 0.9\rho_0$, $E = 3 \cdot 10^9 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$, $\nu_0 = 0.3$, $\sigma = 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$. Тогда выражение для возвышения имеет вид

$$\begin{aligned} \eta(\xi, \eta) &= \frac{-iqV}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iv\eta) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\mu, v)}{b(\mu, v)} \times \\ &\times \exp(-i\mu\xi) dv d\mu, \quad f(\mu, v) = \frac{\mu \exp(kz_0)}{Ak+1}; \quad (1) \\ b(\mu, v) &= \Omega^2(k) - \mu^2 V^2, \\ k^2 &= \mu^2 + v^2, \quad \Omega^2(k) = \frac{k(g + Ck^2 + Bk^4)}{Ak + 1}. \end{aligned}$$

Решение в форме (1) представляет сложную в вычислительном плане задачу из-за возникающих в расчетных формулах сингулярностей. Рассмотрим поведение функции $\eta(\xi, \eta)$ вдоль некоторого направления S_α , составляющего угол α с положительным направлением оси ξ , т.е. будем считать, что $\xi = r \cos \alpha$, $\eta = r \sin \alpha$, $0 \leq \alpha \leq \pi$. Чтобы найти асимптотику интеграла (1) при $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \rightarrow \infty$ необходимо перевести контур интегрирования по переменной μ в нижнюю полуплоскость. Интеграл в нижней полуплоскости экспоненциально мал при $r \rightarrow \infty$. Основной вклад в (1) будет определяться двумя полюсами подынтегральной функции, расположенными на действительной оси. Полюса (дисперсионные кривые) $\mu = \pm\mu(v)$ находятся из решения уравнения $b(\mu, v) = 0$, т.е. $\mu^2 V^2 = \Omega^2(\sqrt{\mu^2 + v^2})$. Это уравнение имеет действительные корни лишь при выполнении условия: $V > V_* = \Omega(k_*)/k_*$, где k_* – единственный положительный корень уравнения: $2ABk^5 + 3Bk^4 + Ck^2 - 2Agk - g = 0$ [1, 16–18]. Далее предполагается, что $V > V_*$, поскольку только в этом случае источник генерирует в набегающем потоке волновые возмущения. Тогда для суммарного вклада вычетов $\mu = \pm\mu(v)$ можно получить

$$\begin{aligned} \eta(\xi, \eta) &= \frac{-iqV}{4\pi} \int_{L_+(\alpha)} \frac{f(\mu, v)}{G(\mu, v)} \cos(\mu\xi + v\eta) dv, \\ G(\mu, v) &= \frac{\partial b(\mu, v)}{\partial \mu}, \quad \mu = \mu(v), \end{aligned} \quad (2)$$

где $L_+(\alpha)$ – та часть дисперсионной кривой $\mu = \mu(v)$, для которой проекция вектора групповой скорости на направление S_α положительно, т.е. выполнено следующее неравенство: $(V - \Omega'(k)\frac{\mu}{k}) \cos(\alpha) - \Omega'(k)\frac{v}{k} \sin(\alpha) > 0$. Это условие (условие излучения) означает, что волновая энергия распространяется наружу от ис-

точника возмущений. Асимптотика интеграла (2) при $r = \sqrt{\xi^2 + y^2} \rightarrow \infty$ вычисляется методом стационарной фазы [7, 24–26]

$$\eta(\xi, y) \approx -\frac{qV}{4\pi\sqrt{2\pi r}|D(k)|} \times \frac{\mu_1(k)\exp(kz_0)\cos(\mu(k)\xi - v(k)y + \frac{\pi}{4}\text{sign}(D(k)))}{(Ak+1)T};$$

$$T = (\Omega(k)\Omega'(k)\frac{\mu(k)}{k} - \mu(k)V^2)\cos(\alpha) + \Omega(k)\Omega'(k)\frac{v(k)}{k}\sin(\alpha);$$

$$D(k) = (-\mu'(k)v''(k) + v'(k)\mu''(k)) \times \left((\mu(k))^2 + (v(k))^2 \right)^{-\frac{3}{2}};$$

$$k = k_0(\alpha), \mu(k) = \frac{\Omega(k)}{V},$$

$$v(k) = \sqrt{k^2 - (\Omega(k)/k)^2},$$

где $k_0(\alpha)$ – единственный корень уравнения $\mu'(k)\cos(\alpha) - v'(k)\sin(\alpha) = 0$. На рис. 1–2 представлены результаты расчетов дисперсионных зависимостей для различных значений толщины льда l и скоростей потока V . Как показывает численный анализ, в зависимости от этих параметров дисперсионная зависимость может быть как всюду выпуклой (см. рис. 1) ($\mu''(v) > 0$ для любых значений аргумента v), так и иметь две симметричные относительно оси $v = 0$ точки перегиба $v_{1,2}^*$, где $\mu''(v_{1,2}^*) = 0$ (рис. 2). В первом случае возбуждаемая источником волновая картина представляет собой систему только продольных волн. Наличие точек перегиба приводит к появлению дополнительных волновых фронтов и генерации поперечной системы волн.

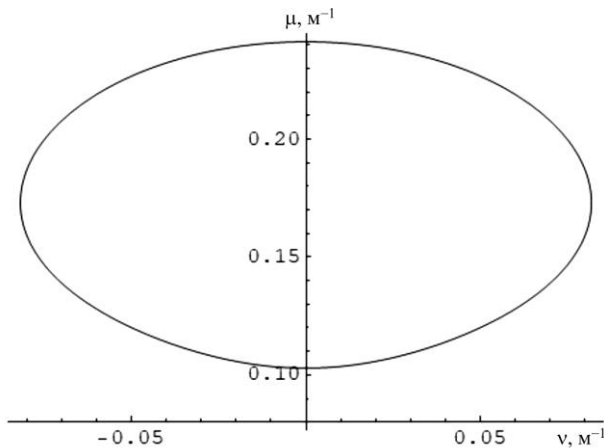


Рис. 1. Дисперсионная кривая $\mu(v)$ при $l = 0.25$ м, $V = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$

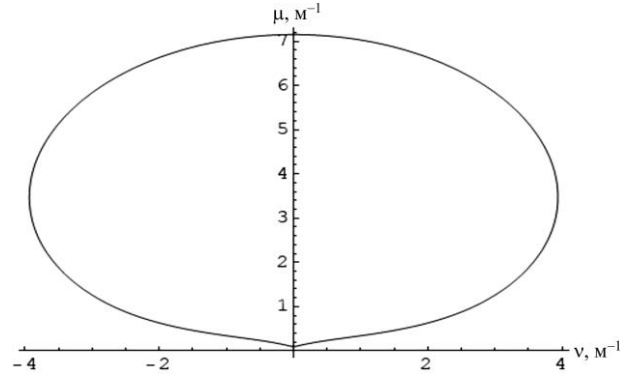


Рис. 2. Дисперсионная кривая $\mu(v)$ при $l = 0.01$ м, $V = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$

На рис. 3, 4 представлены результаты расчетов дисперсионных поверхностей при фиксированных значениях толщины льда l (рис. 3) и скоростей потока V (рис. 4). Горизонтальные срезки при фиксированных значениях V (см. рис. 3) и l (рис. 4) позволяют исследовать характер изменчивости дисперсионных зависимостей, варьируя эти параметры.

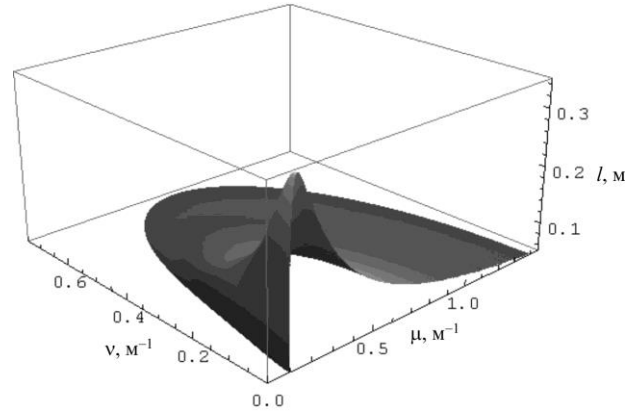


Рис. 3. Зависимости $l = l(\mu, v)$ при $V = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$

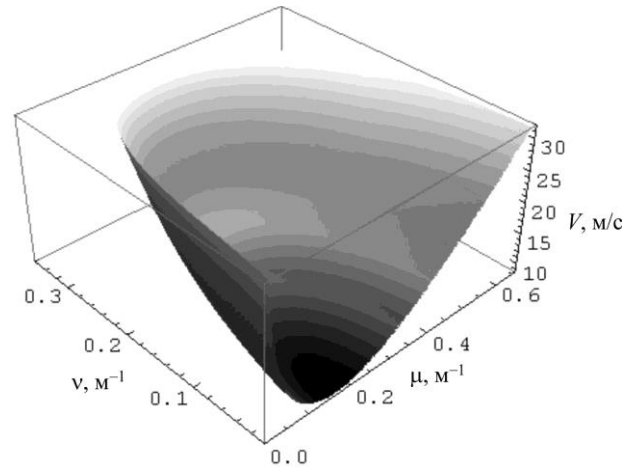


Рис. 4. Зависимости $V = V(\mu, v)$ при $l = 0.25$ м

На рис. 5–7 представлены результаты расчетов фазовых картин возвышения ледяного покрова для различных значений толщины льда l и скоростей потока V . Остальные параметры, характерные для реальных гидрофизических условий, были следующие: $q = 5 \frac{\text{м}^3}{\text{с}}$, $z_0 = -2 \text{ м}$, что в соответствии с общими принципами теории гидродинамического подобия течений и в данной постановке позволяет, например, моделировать обтекание затупленного полубесконечного тела с диаметром D , где $D = \sqrt{\frac{q}{\pi V}}$ [5, 7].

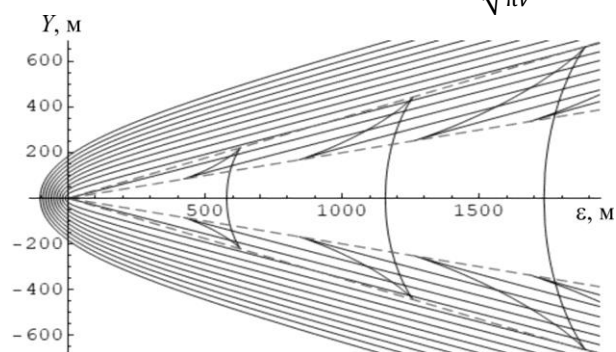


Рис. 5. Фазовая картина возвышения ледяного покрова при $l = 0.25 \text{ м}$, $V = 30 \frac{\text{м}}{\text{с}}$

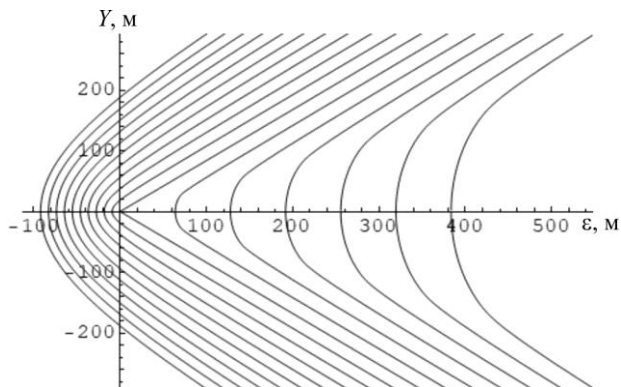


Рис. 6. Фазовая картина возвышения ледяного покрова при $l = 0.1 \text{ м}$, $V = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$

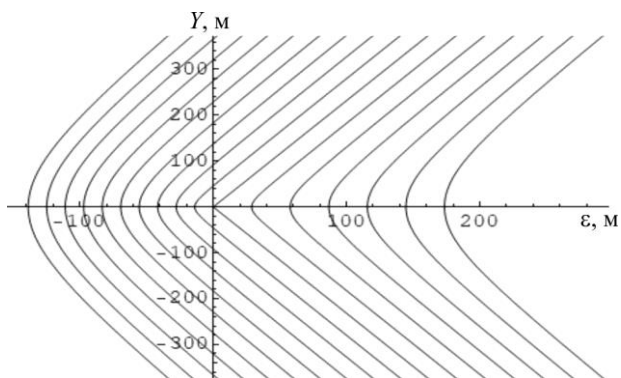


Рис. 7. Фазовая картина возвышения ледяного покрова при $l = 0.1 \text{ м}$, $V = 7 \frac{\text{м}}{\text{с}}$

В более общих случаях, используя операцию свертки, можно в дальнейшем рассчитать волновые возмущения ледяного покрова, возбуждаемые распределенными в пространстве источниками различной физической природы, как естественного, так и антропогенного характеров [3, 7].

Численные расчеты показывают, что при изменении параметров волновой генерации (изменение скоростей потока и толщины льда) происходит заметная качественная перестройка фазовых картин возбуждаемых волновых полей на границе раздела льда и жидкости. Дисперсионные зависимости $\mu(v)$ могут представлять замкнутые, всюду выпуклые кривые, а также могут иметь две пары точек перегиба, которые существуют только при достаточно малых значениях волновых чисел и расположены симметрично относительно оси $v = 0$. Такое усложнение топологии дисперсионных зависимостей приводит к генерации дополнительной системы поперечных волн и появлению соответствующих пар волновых фронтов (штриховые линии на рис. 5). Уравнения волновых фронтов определяются как $\xi = \pm \mu'(v_{1,2}^*)y$, где $v_{1,2}^*$ – два корня уравнения $\mu''(v_{1,2}^*) = 0$. В этом случае фазовые картины демонстрируют пространственные структуры типа «ласточкина хвоста» (см. рис. 5), когда в фиксированной точке наблюдения происходит качественная перестройка одновременно приходящих волновых фронтов [7, 24–26]. Наиболее интересными с практической точки зрения являются локальные экстремумы дисперсионных зависимостей $\mu'(v)$, так как асимптотики дальних волновых полей в окрестности соответствующих волновых фронтов и каустик, отвечающих этим экстремумам, можно описать с помощью метода эталонных интегралов. Сложность топологии рассчитанных дисперсионных зависимостей $\mu(v)$ требует для корректного асимптотического исследования дальних полей применения специального математического аппарата [24–26].

Усложнение наблюдаемых волновых картин возвышения ледяного покрова может являться одним из признаков заметного изменения параметров морской среды: скоростей течения и толщины льда. Увеличение скорости течения при неизменной толщине льда приводит к расширению (в пространстве волновых чисел) дисперсионных кривых. Кривая, соответствующая меньшей скорости потока, целиком находится внутри кривой, отвечающей большей скорости потока. Поэтому при увеличении скорости те-

чения V длина волны вдоль положительного направления оси $O\xi$ возрастает, а вдоль отрицательного направления оси $O\xi$ убывает. Также при увеличении скорости потока V происходит уменьшение пространственной области, где существуют волновые колебания. Вне этой зоны амплитуды дальних волновых полей экспоненциально малы. Этот же эффект наблюдается при изменении толщины льда l при неизменном значении скорости потока V . При увеличении толщины льда l происходит сужение (в пространстве волновых чисел) дисперсионных кривых, и, соответственно, расширение пространственной области волновых колебаний. Длина волны вдоль положительного направления оси $O\xi$ возрастает, а вдоль отрицательного оси $O\xi$ — убывает.

Численный анализ решений показал, что основными параметрами, которые могут приводить к существенной изменчивости качественных характеристик дисперсионных соотношений, являются толщина льда l и скорость потока V . Остальные параметры (модуль Юнга, коэффициент Пуассона, напряжение, плотность сред), также определяющие постоянные A, B, C , в пределах естественных масштабов их природной изменчивости, практически не влияют на динамику поведения дисперсионных зависимостей. Поэтому усложнение наблюдаемых волновых картин возвышения ледяного покрова может являться одним из признаков заметного изменения только таких параметров морской среды, как скорость течения и толщина льда. Анализ асимптотик показал хорошее совпадение с точным решением уже на расстояниях, начиная с десяти и более метров от источника, т.е. на таких расстояниях можно использовать понятие дальних волновых полей. Таким образом, исходя из результатов рассмотрения подобного класса задач и оценок пространственных масштабов возможного затухания волновых возмущений в природных условиях, представляется вполне обоснованным использования линейного приближения и метода стационарной фазы для расчета возмущений ледяного покрова и получения физически адекватных результатов [7, 24–26].

Построенные асимптотики дальних полей дают возможность эффективно рассчитывать основные характеристики волновых возмущений на границе раздела ледяного покрова и качественно анализировать полученные решения. Полученные асимптотические результаты с различными значениями входящих в них физических параметров позволяют провести оценку

характеристик возмущений ледяного покрова, наблюдаемых в реальных морских условиях, и рассчитывать дальние волновые поля, в том числе и от нелокальных источников возмущений различной физической природы. В результате проведения модельных многовариантных расчетов по асимптотическим формулам смоделированная волновая система может быть приближена к наблюдаемым в натурных условиях волновым картинам, что дает возможность оценить физические параметры реальных источников в морской среде с ледовым покрытием и определить основные характеристики начальных возмущений, варьируя модельные значения исходных параметров. Таким образом, модели волновой генерации на поверхности раздела морской воды и льда могут быть не только верифицированы, но и использованы для проведения прогнозных оценок.

В общем случае постановка задачи нелокального источника, например твердого тела, потоком жидкости, ограниченной сверху ледяным покровом, включает в себя также задание определенных граничных условий на его поверхности. Даже в предположении об идеальности жидкости и потенциальности обтекающего тело потока нахождение поля его скорости представляет собой весьма сложную в математическом плане задачу. Очевидно, что существенно проще решается задача обтекания системы точечных гидродинамических особенностей (источников, стоков, диполей и т.п.), поскольку в этом случае нет необходимости удовлетворять наперед заданным граничным условиям. На линиях (поверхностях) тока, возникающих при обтекании такой модельной системы, условия непротекания удовлетворяются автоматически. Это обстоятельство используется при решении задач обтекания тел или непроницаемых границ, моделируемых специально подобранными системами гидродинамических особенностей. При таком подходе к задачам обтекания тел линии (поверхности) тока отождествляются с непроницаемыми границами. Например, при стационарном обтекании точечного источника равномерным безграничным потоком возникает линия (поверхность) тока, представляющая собой границу затупленного тела бесконечной длины, поэтому обтекание точечного источника гидродинамически эквивалентно обтеканию такого тела. В другом случае источник и сток, расположенные друг за другом вдоль по потоку, моделируют тело овоидной формы. Диполь в безграничном плоском потоке порождает охватывающую его линию тока в форме окруж-

ности, поэтому он моделирует поперечное обтекание цилиндра. В трехмерном случае обтекание диполя безграничным пространственным потоком эквивалентно обтеканию шара.

Перечисленные гидродинамические особенности часто используются при решении модельных задач, в которых точное воспроизведение формы помещенного в поток тела не имеет решающего значения. Подобный метод в значительной мере может относиться к рассмотренной задаче о генерации волновых возмущений на границе льда и жидкости, так как замена тела некоторым набором гидродинамических особенностей существенно упрощает решение этой задачи. Естественно, возникает вопрос о том, как влияет наличие границ раздела льда и жидкости на картину линий тока, возникающих при обтекании заданных гидродинамических особенностей. Например, можно ли считать диполь в плоском потоке со свободной границей хорошей моделью кругового цилиндра. Из физических соображений очевидно, что чем глубже находится диполь, тем точнее он моделирует цилиндр, и по мере приближения диполя к границе раздела льда и жидкости охватывающая его линия тока будет искажаться все значительнее и все менее точно соответствовать контуру поперечного сечения кругового цилиндра. Поэтому, в частности, при рассмотрении потоков конечной толщины под ледяным покровом необходимо знать, какое именно тело может моделировать выбранная система гидродинамических особенностей.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена по темам государственного задания: В.В. Булатов (№ FFGN-2023-0004), И.Ю. Владимиров (№ FMWE-2021-0016).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булатов А.Е. Волны в море с плавающим ледяным покровом. Севастополь: ФГБУН МГИ, 2017. 360 с.
2. Ильичев А.Т. Уединенные волны в моделях гидродинамики. М.: Физматлит, 2003. 256 с.
3. Squire V.A., Hosking R.J., Kerr A.D., Langhorne P.J. Moving loads on ice plates. Dordrecht: Springer Science & Business Media, 2012. 236 p.
4. Miropol'skii Yu. Z., Shishkina O.V. Dynamics of internal gravity waves in the ocean. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2001. 406 p.
5. Mei C.C., Stiassnie M., Yue D.K.-P. Theory and applications of ocean surface waves. Advanced series of ocean engineering. V. 42. London: World Scientific Publishing, 2018. 1240 p.
6. Velarde M. G., Tarakanov R.Yu., Marchenko A.V. (Eds.). The ocean in motion. Springer Oceanography. Switzerland AG Cham, Springer Nature, 2018. 625 p.
7. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.
8. Morozov E. G. Oceanic internal tides. Observations, analysis and modeling. Berlin: Springer, 2018. 317 p.
9. Marchenko A.V., Morozov E.G., Muzylev S.V., Shestov A.S. Interaction of short internal waves with the ice cover in an Arctic fjord // Oceanology. 2010. V. 50(1). P. 18–27.
10. Marchenko A.V., Morozov E.G., Muzylev S.V., Shestov A.S. Short-period internal waves under an ice cover in Van Mijen Fjord, Svalbard // Advances in Meteorology. 2011. V.2011. Article ID 573269.
11. Marchenko A., Morozov E., Muzylev S. Measurements of sea ice flexural stiffness by pressure characteristics of flexural-gravity waves // Ann. Glaciology. 2013. V. 54. P. 51–60.
12. Marchenko A.V., Morozov E.G. Surface manifestations of the waves in the ocean covered with ice // Russian J. Earth Sciences. 2016. V. 16 (1). ES1001.
13. Morozov E.G., Marchenko A.V., Filchuk K.V., Kowalik Z., Marchenko N.A., Ryzhov I.V. Sea ice evolution and internal wave generation due to a tidal jet in a frozen sea // Appl. Ocean Research. 2019. V. 87. P. 179–191.
14. Morozov E.G., Pisarev S.V. Internal tides at the Arctic latitudes (numerical experiments) // Oceanology. 2002. V. 42(2). P. 153–161.
15. Morozov E.G., Zuev O.A., Zamshin V.V., Krechik V.A., Ostroumova S. A., Frey D. I. Observations of icebergs in Antarctic cruises of the R/V «Akademik Mstislav Keldysh» // Russian J. Earth Sciences. 2022. V. 2. P. 1–5.
16. Ильичев А.Т. Эффективные длины волн огибающей на поверхности воды под ледяным покровом: малые амплитуды и умеренные глубины // ТМФ. 2021. Т. 28. № 3. С. 387–408.
17. Савин А.С., Савин А.А. Пространственная задача о возмущениях ледяного покрова движущимся в жидкости диполем // Изв. РАН. МЖГ. 2015. № 5. С. 16–23.
18. Стурова И.В. Движение нагрузки по ледяному покрову с неравномерным сжатием // Изв. РАН. МЖГ. 2021. № 4. С. 63–72.
19. Dinvey E., Kalisch H., Parau E.I. Fully dispersive models for moving loads on ice sheets // J. Fluid Mech. 2019. V. 876. P. 122–149.
20. Sturova I.V. Radiation of waves by a cylinder submerged in water with ice floe or polynya // J. Fluid Mech. 2015. V. 784. P. 373–395.
21. Das S., Sahoo T., Meylan M.H. Dynamics of flexural gravity waves: from sea ice to Hawking radiation and analogue gravity // Proc.R.Soc.A. 2018. V. 474. P. 20170223.

22. Pogorelova A.V., Zemlyak V.L., Kozin V.M. Moving of a submarine under an ice cover in fluid of finite depth // *J. Hydrodynamics*. 2019. V. 31(3). P. 562–569.

23. Khabakhpasheva T., Shishmarev K., Korobkin A. Large-time response of ice cover to a load moving along a frozen channel // *Appl. Ocean Research*. 2019. V. 86. P. 154–165.

24. Свиркунов П.Н., Калашиник М.В. Фазовые картины диспергирующих волн от движущихся локали-

зованных источников // *УФН*. 2014. Т. 184. № 1. С. 89–100.

25. Gnevyshev V., Badulin S. Wave patterns of gravity–capillary waves from moving localized sources // *Fluids*. 2020. V. 5. P. 219.

26. Borovikov V.A. Uniform stationary phase method. London: IEE electromagnetic waves. Series 40, 1994. 233 p.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta «MIFI», 2023, vol. 12, no. 3, pp. 135–142

AMPLITUDE-PHASE STRUCTURE OF WAVE DISTURBANCES AT THE BORDER OF ICE COVER AND DEEP LIQUID FROM LOCALIZED SOURCES

V.V. Bulatov^{1,*}, I.Yu. Vladimirov^{2,**}

¹ *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, 119526 Russia*

² *Shirshov Institute of Oceanology RAS, Moscow, 117997, Russia*

*e-mail: internalwave@mail.ru

**e-mail: iyuvladimirov@rambler.ru

Received September 17, 2023; revised September 17, 2023; accepted September 27, 2023

The floating ice cover determines the dynamic interaction between the ocean and the atmosphere, affects the dynamics of not only the sea surface, but also subsurface waters, and both the ice cover and the entire mass of liquid beneath it participate in the general vertical movement. This work investigates the amplitude-phase structure of wave fields arising at the interface between ice and an infinitely deep homogeneous fluid during flow around a localized source of disturbances. The ice cover is modeled by a thin elastic plate, the deformations of which are small and the plate is physically linear. An integral representation of the solution is obtained and, using the stationary phase method, an asymptotic representation is constructed for small disturbances of the ice cover far from a localized source. The results of calculations of dispersion dependences for various parameters of wave generation are presented. It is shown that the main parameters that determine the characteristics of the amplitude-phase structure of wave disturbances on the surface of the ice cover are ice thickness and flow velocity. Numerical calculations demonstrate that with changes in flow velocities and ice thickness, a noticeable qualitative restructuring of the phase patterns of excited far wave fields at the interface between ice and liquid occurs.

Keywords: ice cover, interface elevation, deep ocean, far fields, amplitude-phase structure, localized source.

REFERENCES

1. Bukatov A.E. Volny v more s plavayushchim ledyanym pokrovom [Waves in the Sea with Floating Ice]. Sevastopol: FGBUN MGI Publ., 2017. 360 p. (in Russian).
2. Il'ichev A.T. Uedinennye volny v modelyakh gidrodinamiki [Solitary waves in hydrodynamic models]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2003. 256 p. (in Russian).
3. Squire V.A., Hosking R.J., Kerr A.D., Langhorne P.J. Moving loads on ice plates. Dordrecht: Springer Science & Business Media, 2012. 236 p.
4. Miropol'skii Yu. Z., Shishkina O.V. Dynamics of internal gravity waves in the ocean. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2001. 406 p.
5. Mei C.C., Stiassnie M., Yue D.K.-P. Theory and applications of ocean surface waves. Advanced series of ocean engineering. V. 42. London: World Scientific Publishing, 2018. 1240 p.
6. Velarde M.G., Tarakanov R.Yu., Marchenko A.V. (Eds.). The ocean in motion. Springer Oceanography. Switzerland AG Cham, Springer Nature, 2018. 625 p.
7. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Volny v stratifitsirovannykh sredakh [Waves in stratified Media]. Moscow: Nauka Publishers, 2015. 735 p. (in Russian).
8. Morozov E.G. Oceanic internal tides. Observations, analysis and modeling. Berlin: Springer, 2018. 317 p.
9. Marchenko A.V., Morozov E.G., Muzylev S.V., Shestov A.S. Interaction of short internal waves with the ice cover in an Arctic fjord. *Oceanology*, 2010. Vol. 50(1). Pp. 18–27.
10. Marchenko A.V., Morozov E.G., Muzylev S.V., Shestov A.S. Short-period internal waves under an ice

cover in Van Mijen Fjord, Svalbard. *Advances in Meteorology*. 2011. Vol. 2011. Article ID 573269.

11. *Marchenko A., Morozov E., Muzylev S.* Measurements of sea ice flexural stiffness by pressure characteristics of flexural-gravity waves. *Ann. Glaciology*, 2013. Vol. 54. Pp. 51–60.

12. *Marchenko A.V., Morozov E.G.* Surface manifestations of the waves in the ocean covered with ice. *Russian J. Earth Sciences*, 2016. Vol. 16 (1). ES1001.

13. *Morozov E.G., Marchenko A.V., Filchuk K.V., Kowalik Z., Marchenko N.A., Ryzhov I.V.* Sea ice evolution and internal wave generation due to a tidal jet in a frozen sea. *Appl. Ocean Research*, 2019. Vol. 87. Pp. 179–191.

14. *Morozov E.G., Pisarev S.V.* Internal tides at the Arctic latitudes (numerical experiments). *Oceanology*. 2002. Vol. 42(2). Pp. 153–161.

15. *Morozov E.G., Zuev O.A., Zamshin V.V., Krechik V.A., Ostroumova S.A., Frey D.I.* Observations of icebergs in Antarctic cruises of the R/V «Akademik Mstislav Keldysh». *Russian J. Earth Sciences*. 2022. Vol. 2. Pp. 1–5.

16. *Il'ichev A.T.* Effective wavelength of envelope waves on the water surface beneath an ice sheet: small amplitudes and moderate depths. *Theor. Math. Phys.* 2021. Vol. 208 (3). Pp. 1182–1200 (in Russian).

17. *Savin A.S., Savin A.A.* Three-dimensional problem of disturbing an ice cover by a dipole moving in fluid. *Fluid Dyn.* 2015. Vol. 50 (5). Pp. 613–620 (in Russian).

18. *Sturova I.V.* Motion of a load over an ice sheet with nonuniform compression. *Fluid Dyn.* 2021. Vol. 56 (4). Pp. 503–512 (in Russian).

19. *Dinvay E., Kalisch H., Parau E.I.* Fully dispersive models for moving loads on ice sheets. *J. Fluid Mech.* 2019. Vol. 876. Pp. 122–149.

20. *Sturova I.V.* Radiation of waves by a cylinder submerged in water with ice floe or polynya. *J. Fluid Mech.* 2015. Vol. 784. Pp. 373–395.

21. *Das S., Sahoo T., Meylan M.H.* Dynamics of flexural gravity waves: from sea ice to Hawking radiation and analogue gravity. *Proc.R.Soc.A.* 2018. Vol. 474. Pp. 20170223.

22. *Pogorelova A.V., Zemlyak V.L., Kozin V.M.* Moving of a submarine under an ice cover in fluid of finite depth. *J. Hydrodynamics*. 2019. Vol. 31(3). Pp. 562–569.

23. *Khabakhpasheva T., Shishmarev K., Korobkin A.* Large-time response of ice cover to a load moving along a frozen channel. *Appl. Ocean Research*. 2019. Vol. 86. Pp. 154–165.

24. *Svirkunov P.N., Kalashnik M.V.* Phase patterns of dispersive waves from moving localized sources. *Phys.-Usp.* 2014. Vol. 57 (1). Pp. 80–91 (in Russian).

25. *Gnevyshev V., Badulin S.* Wave patterns of gravity–capillary waves from moving localized sources. *Fluids*. 2020. Vol. 5. P. 219.

26. *Borovikov V.A.* Uniform stationary phase method. London: IEE electromagnetic waves. Series 40. 1994. 233 p.