
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.951

ОБ АСИМПТОТИКЕ ПРОСТОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ЗАДАЧИ СТЕКЛОВА, ВОЗМУЩЕННОГО НА МАЛОМ УЧАСТКЕ ГРАНИЦЫ ОДНОРОДНЫМ УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ

© 2019 г. Ю. О. Королева^{1,*}, Т. П. Чечкина^{2,**}

¹ *Российский государственный университет нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина,
кафедра высшей математики, Москва, 119991, Россия*

² *Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”,
кафедра высшей математики, Москва, 115409, Россия*

**e-mail: koroleva.y@gubkin.ru*

***e-mail: chechkina@mail.ru*

Поступила в редакцию 22.10.2018 г.

После доработки 21.11.2018 г.

Принята к публикации 04.12.2018 г.

В настоящей работе мы рассматриваем спектральную задачу типа Стеклова для оператора Лапласа и соответствующую ей краевую задачу в ограниченной области с гладкой границей. Предполагается, что на малой части границы выставлено однородное условие Дирихле, а на всей остальной части границы – условие Стеклова (или соответствующее условие Неймана). Известно, что задача Стеклова, возмущенная на малом участке границы условием Дирихле, имеет счетный набор конечно-кратных собственных значений. При этом предельной задачей является задача для оператора Лапласа с условием Стеклова на всей границе. Также известно, что задача для оператора Лапласа с условием Стеклова на всей границе имеет счетный набор конечнократных собственных значений. В работе строится двучленная асимптотика собственных значений и соответствующих им собственных функций исходной задачи при стремлении малого параметра, характеризующего размер участка границы с условием Дирихле, к нулю. Показано, что асимптотика собственного значения имеет второе слагаемое порядка минус первой степени логарифма малого параметра. При этом асимптотика строго обоснована с оценкой остаточного члена порядка минус второй степени логарифма малого параметра.

Ключевые слова: спектр, краевые задачи, асимптотики, задача Стеклова

DOI: 10.1134/S2304487X19010073

ВВЕДЕНИЕ

История исследования задачи Стеклова восходит к работам, появившимся на рубеже XIX–XX веков (см., например, [1]). Недавно интерес к этим задачам возник с новой силой, появились такие работы, как [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11] и [22].

Работы [4], [5], [6] посвящены структуре спектра, в частности, непрерывного, задачи Стеклова в областях с пиком различного заострения, в том числе для упругих тел.

В работе [7] исследуется сингулярно возмущенная задача типа Стеклова с малым параметром в ограниченной двумерной области. Изучается асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций такой задачи при стремлении малого параметра к нулю в случае невырожденной предельной задачи. Постановка задачи включает в себя быструю смену типа гранич-

ных условий. В статьях [8] и [9] рассматривается вырождающаяся задача типа Стеклова, возмущенная чередованием условий Дирихле и условий Стеклова в случае предельной задачи Дирихле. В работе [10] рассматривается аналогичная задача с непериодическим чередованием условий Стеклова и Дирихле для системы теории упругости.

В статье [11] авторы рассматривают усреднение спектральной задачи Стеклова для дивергентного эллиптического оператора в периодически перфорированной области в предположении, что весовая спектральная функция меняет знак. Доказывается, что предельное поведение спектра зависит от среднего значения весовой функции по границе полостей.

Сингулярные возмущения краевых и спектральных задач на малых участках как внутри области, так и на границе, изучались многими авто-

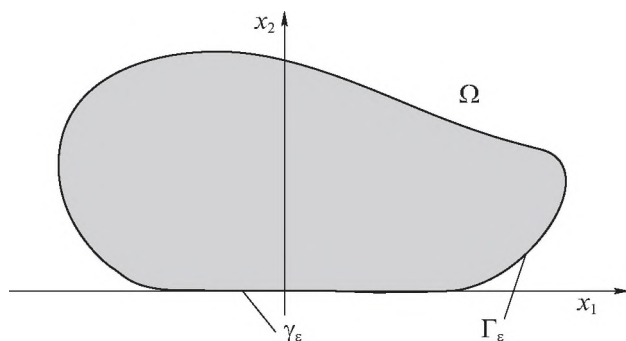


Рис. 1. Структура области Ω и границы Γ .

рами (см., например, [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20]). В работе [12] выведена оценка собственного значения для оператора Лапласа в трехмерной области с малым отверстием. Полное асимптотическое разложение собственных чисел спектральной задачи в областях с малыми отверстиями построено в [15]. В [17] рассмотрена задача, где условие Дирихле возмущается однородным условием Неймана на малом участке границы. В работе [21] аналогичная задача рассмотрена для кратного собственного значения. В работах [4], [5] и [6] рассматриваются задачи, в которых спектральное условие Стеклова выставляется на всей границе, за исключением точки пика.

В статьях [27], [28], [29], [30] изучались спектральные свойства задач в областях с малыми отверстиями. В работе [22] построена асимптотика собственных значений и собственных функций в задаче Стеклова на интерфейсе с неоднородной микроструктурой.

Аналогичные задачи в областях с микронеоднородностями см. [24], [31], [32], [33], [34].

В настоящей статье рассматривается краевая и спектральная задача Стеклова для оператора Лапласа, возмущенная однородным условием Дирихле на одном малом участке границы. Известно, что в ограниченной области спектральная задача с условиями Стеклова на всей границе, за исключением малого фиксированного участка, где функция удовлетворяет однородному условию Дирихле, имеет счетный набор собственных значений. При стремлении малого параметра, определяющего длину участка границы, где выставлено условие Дирихле, к нулю, собственные значения стремятся к соответствующим собственным значениям задачи Стеклова. Наша задача заключается в построении двучленной асимптотики собственных значений возмущенной задачи к собственным значениям задачи Стеклова во всей области.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Обозначим через Ω область в $\mathbb{R}^2$, лежащую в верхней полуплоскости, граница которой является гладкой и состоит из двух частей: $\partial\Omega = \Gamma_\varepsilon \cup \gamma_\varepsilon$, где γ_ε — отрезок $\left[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right]$ на оси абсцисс. Здесь и далее ε — малый положительный параметр.

Пусть $H^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)$ — множество функций из $H^1(\Omega)$ с нулевым следом на γ_ε .

Обозначим через $\|u\|_0$ и $\|u\|_1$ нормы функции u , в пространствах $L_2(\Omega)$ и $H^1(\Omega)$ соответственно, через $\|u\|_{0,\partial\Omega}$ — норму в пространстве $L_2(\partial\Omega)$.

Нашей целью является построение асимптотики при $\varepsilon \rightarrow 0$ собственных пар следующей спектральной задачи:

$$\begin{cases} \Delta u_\varepsilon = 0 & \text{при } x \in \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{при } x \in \gamma_\varepsilon, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon & \text{при } x \in \Gamma_\varepsilon. \end{cases} \quad (1)$$

Рассмотрим также задачу

$$\begin{cases} \Delta u_0 = 0 & \text{при } x \in \Omega, \\ \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = \lambda_0 u_0 & \text{при } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2)$$

В работе [23] было доказано, что задача (2) является предельной для задачи (1). А именно, справедливо следующее утверждение:

Теорема 1.1. Пусть λ_0 — собственное значение кратности N спектральной задачи (2). Тогда к λ_0 сходится N собственных значений задачи (1) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Если $\lambda_{\varepsilon,1}, \dots, \lambda_{\varepsilon,N}$ собственные значения, сходящиеся к λ_0 , то соответствующие им собственные функции $u_{\varepsilon,1}, \dots, u_{\varepsilon,N}$, ортонормированные в $L_2(\Omega)$, также сходятся (по подпоследовательности $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$) к ортонормированным в $L_2(\Omega)$ собственным функциям $u_{0,1}, \dots, u_{0,N}$ спектральной задачи (2), соответствующим λ_0 :

$$\|u_{\varepsilon,j} - u_{0,j}\|_1 \rightarrow 0, \quad \varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$$

2. ФОРМАЛЬНЫЙ АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ПОСТРОЕНИЕ ВЕДУЩИХ ЧЛЕНОВ

Для построения асимптотик мы воспользуемся методом согласования асимптотических разложений (см. [35]–[37], а также [17] и [19]).

Предполагается, что в спектральной задаче (2) собственное значение λ_0 — простое, и для опреде-

ленности всюду далее в этой главе считаем, что u_0 нормирована в $L_2(\partial\Omega)$.

Естественно искать разложение решения в форме

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \dots, \quad (3)$$

а также разложение собственных значений в виде

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \dots \quad (4)$$

Функция $u_0(x)$ не удовлетворяет граничным условиям исходной задачи в окрестности множества γ_ε , поэтому ее необходимо “подправить” в этой окрестности. Следуя терминологии метода согласования, разложение (3) назовем *внешним*, а разложение в малой окрестности γ_ε назовем *внутренним*.

Отметим, что внешним разложением мы будем пользоваться во всей области за исключением малой окрестности участка границы γ_ε , в котором будем строить внутреннее разложение. Поэтому нас интересуют в первую очередь не сами граничные условия на функции внешнего разложения, а асимптотическое поведение членов ряда при стремлении $x \rightarrow 0$.

Собственную функцию $u_0(x)$ разложим в ряд Тейлора в нуле. В силу краевой задачи (2) (уравнения и граничных условий) имеем

$$u_0(x) = u_0(0) + \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + O(|x|^2), \quad (5)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{\partial u_0}{\partial x_1} \Big|_{x=0}, \quad \beta_1 = \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \Big|_{x=0}.$$

В силу краевых условий

$$\beta_1 = -\lambda_0 u_0(0).$$

Сделаем замену $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$. Обозначим

$$\gamma = \left\{ \xi: \xi_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right], \xi_2 = 0 \right\},$$

$$\Gamma = \left\{ \xi: \xi_1 \in \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right], \xi_2 = 0 \right\}.$$

Получаем в силу (5)

$$u_0(x_1, \varepsilon \xi_2) = u_0(0) + \varepsilon \alpha_1 \xi_1 + \varepsilon \beta_1 \xi_2 + O(\varepsilon^2 |\xi|^2). \quad (6)$$

Следуя методу согласования асимптотических разложений (см. [19]), найдем граничные условия и асимптотику для главного члена внутреннего разложения. Внутреннее разложение должно иметь структуру

$$u_\varepsilon(x) = v_0(\xi, \varepsilon) + \varepsilon v_1(\xi) + \dots, \quad (7)$$

где $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$, $v_0(\xi, \varepsilon) \sim u_0(0)$, $v_1(\xi) \sim \alpha_1 \xi_1 + \beta_1 \xi_2$ при $|\xi| \rightarrow +\infty$. В переменных ξ оператор Лапласа сохраняется, а граничные условия на Γ_ε имеют вид

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = -\varepsilon^{-1} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \xi_2} = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon. \quad (8)$$

Подставляем (4), (7) в (1) и, учитывая (8), собираем члены с минимальными степенями ε (в уравнении с ε^{-1} , в граничных условиях с ε^0). Получается задача

$$\begin{cases} \Delta_\xi v_0 = 0 & \text{при } \xi_2 > 0, \\ v_0 = 0 & \text{на } \gamma, \\ \frac{\partial v_0}{\partial \xi_2} = 0 & \text{на } \Gamma, \\ v_0 \sim u_0(0) & \text{при } |\xi| \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (9)$$

и задача

$$\begin{cases} \Delta_\xi v_1 = 0 & \text{при } \xi_2 > 0, \\ v_1 = 0 & \text{на } \gamma, \\ -\frac{\partial v_1}{\partial \xi_2} = \lambda_0 v_{0,1} & \text{на } \Gamma, \\ v_1 \sim \alpha_1 \xi_1 + \beta_1 \xi_2 & \text{при } |\xi| \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (10)$$

Для построения функции $v_{0,1}$ необходима следующая вспомогательная задача:

$$\begin{cases} \Delta_\xi X = 0 & \text{при } \xi_2 > 0, \\ X = 0 & \text{на } \gamma, \\ \frac{\partial X}{\partial \xi_2} = 0 & \text{на } \Gamma, \\ X \sim 1 & \text{при } |\xi| \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (11)$$

но нетривиального решения эта задача не имеет. В связи с этим рассмотрим задачу, которая имеет отличное от нуля решение, но с другой асимптотикой на бесконечности.

$$\begin{cases} \Delta_\xi X = 0 & \text{при } \xi_2 > 0, \\ X = 0 & \text{на } \gamma, \\ \frac{\partial X}{\partial \xi_2} = 0 & \text{на } \Gamma, \\ X \sim \ln |\xi| & \text{при } |\xi| \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (12)$$

Решение задачи (12) существует (см. [17]). Его можно выписать явно:

$$X(\xi) = \operatorname{Re} \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}), \quad (13)$$

где $z = \xi_1 + i\xi_2$. Учитывая, что

$$\ln |\xi| \sim \ln \frac{1}{\varepsilon} = -\ln \varepsilon \text{ при } \xi \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0,$$

делаем вывод о том, что

$$v_0(\xi, \varepsilon) = -\frac{u_0(0)}{\ln \varepsilon} X(\xi) \quad (14)$$

удовлетворяет задаче (9). Удобнее написать

$$v_0(\xi, \varepsilon) = -\frac{u_0(0)}{\ln \varepsilon} X(\xi) = -\frac{1}{\ln \varepsilon} v_{0,1}(\xi), \quad (15)$$

$$v_{0,1} = u_0(0)X(\xi).$$

Функция $v_{0,1}$ также удовлетворяет задаче (9). Асимптотика такой функции на бесконечности при $|\xi| \rightarrow +\infty$ в силу (13) и (14) выглядит следующим образом:

$$v_0(\xi, \varepsilon) = -\frac{u_0(0)}{\ln \varepsilon} \left[\ln |x| - \ln \varepsilon + \ln 2 + C_0 \frac{\xi_1}{|\xi|^2} + \dots \right] =$$

$$= u_0(0) - \frac{u_0(0)}{\ln \varepsilon} (\ln |x| + \ln 2) + \dots$$

Обозначим $\mu := -\frac{1}{\ln \varepsilon}$.

Теперь видно, что устраняя невязку в граничных условиях у функции $u_0(x)$, мы построили $v_{0,1}(\xi)$, но при этом оказалось, что поведение на бесконечности у функции $v_{0,1}(\xi)$ не совсем то, которое нам было нужно. Появилась новая невязка, но другого порядка (порядка $-\frac{1}{\ln \varepsilon}$). Эту невязку приходится устранять введением еще одного (промежуточного) члена во внешнем разложении.

Переписывая асимптотику v_0 в бесконечности во внешних переменных с учетом (16), заключаем, что внешнее разложение должно иметь вид

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \mu u_{0,1}(x) + \dots, \quad (17)$$

где

$$u_{0,1}(x_1, x_2) \sim u_0(0) \ln |x| + u_{0,1}(0) + \dots \quad \text{при } |x| \rightarrow 0.$$

Таким образом, функция $u_\varepsilon(x)$ имеет следующую асимптотку в нуле:

$$u_\varepsilon(x) = u_0(0) + \mu(u_0(0) \ln |x| + u_{0,1}(0)) + \dots$$

Поскольку уточненное внешнее разложение имеет вид (17), то, естественно, разложение собственного значения в уточненном виде будет иметь следующий член порядка μ , т.е.

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \mu \lambda_{0,1} + \dots, \quad (18)$$

где константу $\lambda_{0,1}$ мы вычислим ниже. Внутреннее разложение должно иметь вид

$$u_\varepsilon = \mu v_{0,1}(\xi) + \dots$$

с асимптотикой на бесконечности

$$u_\varepsilon = u_0(0) + \mu(u_0(0) \ln |x| + u_0(0) \ln 2) + \dots$$

Слагаемое $\mu u_0(0) \ln 2$ нужно устранить подправкой нового члена во внутреннем асимптотическом разложении u_ε :

$$u_\varepsilon = \mu v_{0,1}(\xi) + \mu^2 v_{0,2}(\xi) + \dots,$$

$$v_{0,2} \sim u_{0,1}(0) - u_0(0) \ln 2 \quad \text{при } |\xi| \rightarrow \infty.$$

Подставляя ряд (17) и разложение (18) для λ_ε в задачу (1), приравнявая члены при μ^1 , получаем краевую задачу для $u_{0,1}$:

$$\begin{cases} -\Delta u_{0,1} = 0 & \text{в } \Omega, \\ \frac{\partial u_{0,1}}{\partial \nu} = \lambda_0 u_{0,1} + \lambda_{0,1} u_0 & \text{на } \partial \Omega \setminus \{0\}, \\ u_{0,1}(x_1, x_2) \sim u_0(0) \ln |x| & \text{при } |x| \rightarrow 0. \end{cases} \quad (19)$$

Записываем условие разрешимости задачи (19). Обозначим через K_ε полукруг радиуса ε с центром в нуле, лежащий в верхней полуплоскости и рассмотрим область $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{K_\varepsilon}$. Домножим уравнение на u_0 и проинтегрируем по области Ω_ε , таким образом вырезая особенность функции $u_{0,1}$. Имеем

$$-\int_{\Omega_\varepsilon} \Delta u_{0,1}(x) u_0(x) dx = 0. \quad (20)$$

Применяя дважды формулу Грина, выводим

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega_\varepsilon} \Delta u_{0,1} u_0 dx &= \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_{0,1} \nabla u_0 dx - \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u_{0,1}}{\partial \nu} u_0 ds - \\ &- \int_{\partial K_\varepsilon} \frac{\partial u_{0,1}}{\partial \nu} u_0 ds = - \int_{\Omega_\varepsilon} u_{0,1} \Delta u_0 dx - \\ &- \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u_{0,1}}{\partial \nu} u_0 ds + \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u_0}{\partial \nu} u_{0,1} ds - \\ &- \int_{\partial K_\varepsilon} \frac{\partial u_{0,1}}{\partial \nu} u_0 ds + \int_{\partial K_\varepsilon} \frac{\partial u_0}{\partial \nu} u_{0,1} ds. \end{aligned} \quad (21)$$

Используя уравнения и краевые условия задач (2) и (19), вспоминая условие нормировки функции u_0 , переходим к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial K_\varepsilon} \frac{\partial u_{0,1}}{\partial \nu} u_0 ds &= -u_0(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial K_\varepsilon} \frac{d \ln \varepsilon}{d \varepsilon} u_0 ds = -\pi u_0^2(0), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial K_\varepsilon} \frac{\partial u_0}{\partial \nu} u_{0,1} ds &= u_0(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial K_\varepsilon} \ln \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial \nu} ds = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Имея в виду (20), (21) и (22), окончательно имеем

$$\lambda_{0,1} = \pi u_0^2(0). \quad (23)$$

Для однозначной разрешимости задачи (19) будем считать, что

$$\int_{\partial \Omega} u_0(x) u_{0,1}(x) dx = 0.$$

Далее, подставляя внутреннее разложение в исходную задачу и приравнявая слагаемые с одина-

ковыми степенями, получаем уточненную задачу на $v_{0,1}$:

$$\begin{cases} \Delta_{\xi} v_{0,2} = 0 & \text{при } \xi_2 > 0, \\ v_{0,2} = 0 & \text{на } \gamma, \\ \frac{\partial v_{0,2}}{\partial \xi_2} = 0 & \text{на } \Gamma, \\ v_{0,2} \sim u_{0,1} - u_0(0) \ln 2 & \text{при } |\xi| \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (24)$$

Решение (24) задается аналогичной формулой:

$$v_{0,2} = (u_0(0) \ln 2 - u_{0,1}(0)) X(\xi). \quad (25)$$

В силу (25) асимптотика такой функции при $|\xi| \rightarrow +\infty$ имеет вид

$$v_{0,2} = (-u_0(0) \ln 2 + u_{0,1}(0)) + \mu(-u_0(0) \ln 2 + u_{0,1}(0))(\ln |x| + \ln 2) + \dots \quad (26)$$

Суммируя, мы рассматриваем следующие приближения:

внешнее разложение

$$u_{\varepsilon}(x) = u_0(x) + \mu u_{0,1}(x) + \dots \equiv \hat{u}_{\varepsilon} + \dots,$$

разложение собственного значения

$$\lambda_{\varepsilon} = \lambda_0 + \mu \lambda_{0,1} + \dots \equiv \hat{\lambda}_{\varepsilon} + \dots, \quad (27)$$

внутреннее разложение

$$u_{\varepsilon}(x) = \mu v_{0,1}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \mu^2 v_{0,2}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \dots \equiv \hat{v}_{\varepsilon} + \dots$$

с асимптотикой

$$\begin{cases} -\Delta \hat{v}_{\varepsilon} = 0 & \text{при } x \in \Omega_{\varepsilon} \cap \{|x| < h\}, \\ \hat{v}_{\varepsilon} = 0 & \text{на } \gamma_{\varepsilon}, \\ \frac{\partial \hat{v}_{\varepsilon}}{\partial \xi_2} = 0 & \text{на } \Gamma_{\varepsilon} \cap \{x_2 < h\}, \\ \hat{v}_{\varepsilon} \sim u_0(0) + \mu(u_{0,1}(0) + u_0(0) \ln |x|) + \mu^2(-u_0(0) \ln 2 + u_{0,1}(0)) \ln |x| & \text{при } \{x_2 < h\}. \end{cases} \quad (29)$$

Легко видеть, что функции $\hat{u}_{\varepsilon}$ и $\hat{v}_{\varepsilon}$ являются достаточно гладкими.

Лемма 3.1. Пусть $0 < \beta < 1$. Тогда при $\mu^{\beta} < |x| < 2\mu^{\beta}$ ($\mu^{\beta-1} < |\xi| < 2\mu^{\beta-1}$) справедливы следующие оценки:

$$\hat{v}_{\varepsilon} - \hat{u}_{\varepsilon} = O(\mu^2 \ln \mu), \quad \frac{\partial}{\partial x_2}(\hat{v}_{\varepsilon} - \hat{u}_{\varepsilon}) = O(\mu^{2-\beta}).$$

Доказательство. В силу асимптотик (29), (24) и (17) верно следующее:

$$\begin{aligned} \hat{v}_{\varepsilon} - \hat{u}_{\varepsilon} &= u_0(0) + \mu v_{0,1} - u_0(0) - \\ &- \mu u_{0,1}(0) = O(\mu^2 \ln |x|) = O(\mu^2 \ln \mu). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{v}_{\varepsilon} &= u_0(0) + \mu(u_0(0) \ln |x| + \\ &+ u_0(0) \ln 2) + \mu(-u_0(0) \ln 2 + u_{0,1}(0)) + \\ &+ \mu^2(u_0(0) \ln 2 + u_{0,1}(0)) \ln |x| \end{aligned}$$

при $|\xi| \rightarrow +\infty$. Пусть $\chi(t)$ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, тождественно равная нулю при $t < 1$ и единице при $t > 2$,

$$\chi_{\beta}(x_2) = \chi\left(\frac{x_2}{\mu^{\beta}}\right).$$

Составляем функцию

$$U_{\varepsilon} = \chi_{\beta}(x_2) \hat{u}_{\varepsilon} + (1 - \chi_{\beta}(x_2)) \hat{v}_{\varepsilon}.$$

Далее будет показано, что данная функция является приближением к решению исходной возмущенной задачи.

3. ОБОСНОВАНИЕ ПОСТРОЕННОЙ АСИМПТОТИКИ

В силу краевых задач (9), (10) построенные приближения удовлетворяют граничным задачам

$$\begin{cases} -\Delta \hat{u}_{\varepsilon} = 0 & \text{при } x \in \Omega, \\ \hat{u}_{\varepsilon} = 0 & \text{на } \gamma_{\varepsilon}, \\ \frac{\partial \hat{u}_{\varepsilon}}{\partial \nu} = \lambda_0 \hat{u}_{\varepsilon} + \lambda_{0,1} \mu u_0 \equiv \hat{\lambda}_{\varepsilon} \hat{u}_{\varepsilon} - \mu^2 \lambda_{0,1} u_{0,1} & \text{на } \Gamma_{\varepsilon}. \end{cases} \quad (28)$$

и для достаточно малого $h > 0$

Аналогично,

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(\hat{v}_{\varepsilon} - \hat{u}_{\varepsilon}) = O\left(\mu^2 \frac{1}{x}\right) = O(\mu^{2-\beta}) \text{ при } \mu^{\beta} < x_2 < 2\mu^{\beta}.$$

Лемма 3.2. Пусть $0 < \beta < \frac{2}{3}$. Тогда функция

$$U_{\varepsilon}(x) = \chi_{\beta}(x_2) \hat{u}_{\varepsilon}(x) + (1 - \chi_{\beta}(x_2)) \hat{v}_{\varepsilon}(x).$$

является решением краевой задачи

$$\begin{cases} -\Delta U_{\varepsilon} = f_{\varepsilon} & \text{в } \Omega_{\varepsilon}, \\ U_{\varepsilon} = 0 & \text{на } \gamma_{\varepsilon}, \\ \frac{\partial U_{\varepsilon}}{\partial \nu} = \hat{\lambda}_{\varepsilon} U_{\varepsilon} + g_{\varepsilon} & \text{на } \Gamma_{\varepsilon}, \end{cases} \quad (30)$$

где

$$\|f_\varepsilon\|_0 = O\left(\mu^{2-3\beta}\right), \quad \|g_\varepsilon\|_{0,\Gamma_\varepsilon} = O(\mu^2). \quad (31)$$

Доказательство. Подействуем оператором Лапласа на функцию U_ε :

$$\begin{aligned} \Delta U_\varepsilon &= \hat{u}_\varepsilon \Delta \chi_\beta + 2\nabla \chi_\beta \nabla \hat{u}_\varepsilon + \chi_\beta \Delta \hat{u}_\varepsilon + \\ &+ \hat{v}_\varepsilon \Delta(1 - \chi_\beta) + 2\nabla(1 - \chi_\beta) \nabla \hat{u}_\varepsilon + (1 - \chi_\beta) \Delta \hat{v}_\varepsilon = \\ &= \hat{u}_\varepsilon \varepsilon^{-2\beta} \chi_\beta'' + 2\varepsilon^{-\beta} \chi_\beta' \frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial x_2} - \hat{v}_\varepsilon \varepsilon^{-2\beta} \chi_\beta'' - 2\varepsilon^{-\beta} \chi_\beta' \frac{\partial \hat{v}_\varepsilon}{\partial x_2} = \\ &= (\hat{u}_\varepsilon - \hat{v}_\varepsilon) \mu^{-2\beta} \chi_\beta'' + 2\mu^{-\beta} \chi_\beta' \frac{\partial}{\partial x_2} (\hat{u}_\varepsilon - \hat{v}_\varepsilon) \equiv f_\varepsilon. \end{aligned}$$

Заметим, что носитель функции f_ε лежит в полосе $\mu^\beta < |x| < 2\mu^\beta$. В силу леммы 3.1 и определения функции χ_β мы получаем следующую оценку для правой части уравнения:

$$\begin{aligned} \|f_\varepsilon\|_0^2 &= \int_{\Omega_\varepsilon \cap \{\mu^\beta < |x| < 2\mu^\beta\}} O(\mu^{4-4\beta}) dx = O(\mu^{4-3\beta}) \\ &\text{при } 0 < \beta < \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

В силу определения U_ε и граничных задач (28), (29), мы получаем, что

$$U_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_\varepsilon.$$

Кроме того, на Γ_ε :

$$\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial \nu} = (\chi_\beta \hat{u}_\varepsilon + (1 - \chi_\beta) \hat{v}_\varepsilon) \hat{\lambda}_\varepsilon + g_\varepsilon = \hat{\lambda}_\varepsilon U_\varepsilon + g_\varepsilon,$$

где

$$g_\varepsilon = -\mu^2 \lambda_{0,1} u_{0,1} = O(\mu^2).$$

Таким образом,

$$\|g_\varepsilon\|_{0,\Gamma_\varepsilon} = O(\mu^2).$$

Сходимость собственных функций спектральных задач (1) и (2) следует из результатов статьи [23] (см. также [38]). Покажем правомерность разложения (27).

Лемма 3.3. Для решения задачи (30) справедливо представление:

$$U_\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f_\varepsilon, u_\varepsilon^n)_0 + (g_\varepsilon, u_\varepsilon^n)_{0,\Gamma_\varepsilon}}{\lambda_\varepsilon^n - \lambda} u_\varepsilon^n. \quad (32)$$

Доказательство. Система функций

$$\frac{u_\delta^1}{\sqrt{\lambda_\delta^1}}, \dots, \frac{u_\delta^s}{\sqrt{\lambda_\delta^s}}, \dots, \quad \delta \geq 0 \quad (33)$$

образует ортонормированный базис в $L_2(\Gamma_\varepsilon)$. Как известно, пространство $H^1(\Omega)$ вложено в $L_2(\Gamma_\varepsilon)$.

Следовательно, функция U_ε может быть разложена по этому базису (33). Имеем

$$U_\delta = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(U_\delta, u_\delta^s)_{1,\delta}}{\lambda_\delta^s} u_\delta^s = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(U_\delta, u_\delta^s)_{1,0}}{\lambda_\delta^s} u_\delta^s, \quad \delta \geq 0 \quad (34)$$

Решение задачи (30) понимается в обобщенном смысле — как решение интегрального тождества

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla U_\varepsilon \nabla \bar{v} dx - \lambda \int_{\partial\Omega} U_\varepsilon \bar{v} ds &= \int_{\partial\Omega} g_\varepsilon \bar{v} ds + \\ &+ \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon \bar{v} dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega, \gamma_\varepsilon). \end{aligned}$$

Обозначив для краткости,

$$(\varphi, \psi)_{1,0} = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \varphi \nabla \bar{\psi} dx + \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi \bar{\psi} dx \quad \forall \psi = 0 \text{ на } \gamma_\varepsilon,$$

$$(\varphi, \psi)_0 = \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi \bar{\psi} dx,$$

$$(\varphi, \psi)_{0,\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} \varphi \bar{\psi} ds, \quad \forall \psi = 0 \text{ на } \partial\Omega,$$

перепишем интегральное тождество в виде

$$(U_\varepsilon, u_\varepsilon^s)_{1,0} - \lambda (U_\varepsilon, u_\varepsilon^s)_{0,\partial\Omega} = (f_\varepsilon, u_\varepsilon^s)_0 + (g_\varepsilon, u_\varepsilon^s)_{0,\partial\Omega}. \quad (35)$$

Подставляя разложение (34) в уравнение (35), получаем:

$$(U_\varepsilon, u_\varepsilon^s)_{1,0} = \frac{\lambda}{\lambda_\varepsilon} (U_\varepsilon, u_\varepsilon^s)_{0,\partial\Omega} + (f_\varepsilon, u_\varepsilon^s)_0 + (g_\varepsilon, u_\varepsilon^s)_{0,\partial\Omega}.$$

Следовательно,

$$(U_\varepsilon, u_\varepsilon^s)_{1,0} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_\varepsilon}\right) = (f_\varepsilon, u_\varepsilon^s)_0 + (g_\varepsilon, u_\varepsilon^s)_{0,\partial\Omega}.$$

Отсюда

$$(U_\varepsilon, u_\varepsilon^s)_{1,0} = \frac{(f_\varepsilon, u_\varepsilon^s)_0 + (g_\varepsilon, u_\varepsilon^s)_{0,\partial\Omega}}{\lambda_\varepsilon^n - \lambda} \lambda_\varepsilon^n.$$

Тогда окончательно выводим:

$$U_\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f_\varepsilon, u_\varepsilon^n)_0 + (g_\varepsilon, u_\varepsilon^n)_{0,\partial\Omega}}{\lambda_\varepsilon^n - \lambda} u_\varepsilon^n.$$

Докажем следующую вспомогательную оценку.

Лемма 3.4. Пусть λ_0 — собственное значение кратности N задачи (2):

$$\lambda_0 = \lambda_0^{p+1} = \dots = \lambda_0^{p+N} < \lambda_0^{p+1+N}.$$

При λ , близких к λ_0 , справедлива оценка:

$$\|U_\varepsilon\|_1 \leq C \sum_{j=1}^N \frac{\|f_\varepsilon\|_0 + \|g_\varepsilon\|_{0,\partial\Omega}}{|\lambda_\varepsilon^{p+j} - \lambda|}. \quad (36)$$

Доказательство. Очевидно, что для доказательства леммы достаточно показать справедливость представления

$$U_\varepsilon = \sum_{j=1}^N \frac{(u_\varepsilon^{p+j}, f_\varepsilon)_0 + (g_\varepsilon, u_\varepsilon^j)_{0,\partial\Omega}}{\lambda_\varepsilon^{p+j} - \lambda} u_\varepsilon^{p+j} + \tilde{u}_\varepsilon, \quad (37)$$

где функция $\tilde{u}_\varepsilon$ ортогональна в $L_2(\partial\Omega)$ собственным функциям u_ε^{p+j} , $j = 1, \dots, N$ и для нее справедлива равномерная по ε и λ оценка

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_1 \leq C_1(\|f_\varepsilon\|_0 + \|g_\varepsilon\|_{0,\partial\Omega}). \quad (38)$$

Из представления (32) следует, что

$$\begin{aligned} \tilde{u}^\varepsilon &= \sum_{j=1}^p \frac{(f_\varepsilon, u_\varepsilon^j)_0 + (g_\varepsilon, u_\varepsilon^j)_{0,\partial\Omega}}{\lambda_\varepsilon^j - \lambda} u_\varepsilon^j + \\ &+ \sum_{j=p+1+N}^\infty \frac{(f_\varepsilon, u_\varepsilon^j)_0 + (g_\varepsilon, u_\varepsilon^j)_{0,\partial\Omega}}{\lambda_\varepsilon^j - \lambda} u_\varepsilon^j. \end{aligned} \quad (39)$$

Из (39) и ортогональности в $L_2(\partial\Omega)$ системы функций u_ε^j , $j = 1, 2, \dots$ следует, что $\tilde{u}_\varepsilon$ ортогональна в $L_2(\partial\Omega)$ функциям u_ε^{p+i} , $i = 1, \dots, N$.

Установим справедливость оценки (38) для $\tilde{u}^\varepsilon$. В силу представления (39) и ортогональности u_ε^j , справедливо равенство:

$$\begin{aligned} \|\nabla \tilde{u}_\varepsilon\|_0^2 &= \sum_{j=1}^p \left| \frac{(f_\varepsilon, u_\varepsilon^j)_0 + (g_\varepsilon, u_\varepsilon^j)_{0,\partial\Omega}}{\lambda_\varepsilon^j - \lambda} \right|^2 \|\nabla u_\varepsilon^j\|_0^2 + \\ &+ \sum_{j=p+1+N}^\infty \left| \frac{(f_\varepsilon, u_\varepsilon^j)_0 + (g_\varepsilon, u_\varepsilon^j)_{0,\partial\Omega}}{\lambda_\varepsilon^j - \lambda} \right|^2 \|\nabla u_\varepsilon^j\|_0^2 = \\ &= \sum_{j=1}^p \left| \frac{(f_\varepsilon, u_\varepsilon^j)_0 + (g_\varepsilon, u_\varepsilon^j)_{0,\partial\Omega}}{\lambda_\varepsilon^j - \lambda} \right|^2 \lambda_\varepsilon^j + \\ &+ \sum_{j=p+1+N}^\infty \left| \frac{(f_\varepsilon, u_\varepsilon^j)_0 + (g_\varepsilon, u_\varepsilon^j)_{0,\partial\Omega}}{\lambda_\varepsilon^j - \lambda} \right|^2 \lambda_\varepsilon^j. \end{aligned} \quad (40)$$

Очевидно, что при λ , близких к λ_0 , существует число $a > 0$ такое, что для любых достаточно малых ε выполнено неравенство

$$|\lambda_\varepsilon^j - \lambda| > a, \quad j \neq p+1, \dots, p+1+N. \quad (41)$$

В силу (41) и равенства Парсеваля–Стеклова из (40) выводим

$$\begin{aligned} \|\nabla \tilde{u}_\varepsilon\|_0^2 &\leq a^{-1} \sum_{j=1}^\infty |(f_\varepsilon, u_\varepsilon^j)_0 + (g_\varepsilon, u_\varepsilon^j)_{0,\partial\Omega}|^2 \leq \\ &\leq C_1(\|f_\varepsilon\|_0^2 + \|g_\varepsilon\|_{0,\partial\Omega}^2). \end{aligned}$$

Отсюда и из эквивалентности норм $\|\nabla \tilde{u}_\varepsilon\|$ и $\|\tilde{u}_\varepsilon\|_1$ вытекает оценка (38). Лемма доказана.

Теорема 3.1. Собственное значение задачи (1) имеет асимптотику

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 - \frac{1}{\ln \varepsilon} \pi u_0^2(0) + O\left(\left(\frac{1}{\ln \varepsilon}\right)^2\right). \quad (42)$$

Доказательство. Заметим, что в силу определения функции U_ε справедливо неравенство

$$\|U_\varepsilon\|_1 \geq 1.$$

Отсюда, используя асимптотику (31) и оценку (36) для $\lambda = \hat{\lambda}_\varepsilon$ получаем (42). Таким образом, мы доказали сходимость разложения для собственного значения с асимптотикой (42).

Теперь обоснуем сходимость построенного приближения U_ε к решению задачи (1).

Теорема 3.2. Функция U_ε сходится к решению задачи (1). Кроме того, справедлива оценка

$$\|U_\varepsilon - u_\varepsilon\|_1^2 = O\left(\left(\frac{1}{\ln \varepsilon}\right)^2\right). \quad (43)$$

В силу задач (30) и (1), функция $U_\varepsilon - u_\varepsilon$ удовлетворяет граничной задаче

$$\begin{cases} -\Delta(U_\varepsilon - u_\varepsilon) = f_\varepsilon & \text{в } \Omega_\varepsilon, \\ U_\varepsilon - u_\varepsilon = 0 & \text{на } \gamma_\varepsilon, \\ \frac{\partial(U_\varepsilon - u_\varepsilon)}{\partial \nu} = \hat{\lambda}_\varepsilon U_\varepsilon + g_\varepsilon - \lambda_\varepsilon u_\varepsilon & \text{на } \Gamma_\varepsilon. \end{cases} \quad (44)$$

Перепишав эквивалентно

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial \nu} &= \hat{\lambda}_\varepsilon U_\varepsilon + g_\varepsilon - \lambda_\varepsilon u_\varepsilon = \\ &= \hat{\lambda}_\varepsilon (U_\varepsilon - u_\varepsilon) + u_\varepsilon (\hat{\lambda}_\varepsilon - \lambda_\varepsilon) + g_\varepsilon, \end{aligned}$$

умножив уравнение задачи (44) на $(U_\varepsilon - u_\varepsilon)$ и проинтегрировав по частям, получаем:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon (U_\varepsilon - u_\varepsilon) dx &= \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla (U_\varepsilon - u_\varepsilon)|^2 dx - \\ &- \hat{\lambda}_\varepsilon \int_{\partial\Omega_\varepsilon} (U_\varepsilon - u_\varepsilon)^2 ds - (\hat{\lambda}_\varepsilon - \lambda_\varepsilon) \int_{\partial\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon (U_\varepsilon - u_\varepsilon) ds - \\ &- \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g_\varepsilon (U_\varepsilon - u_\varepsilon) ds. \end{aligned}$$

Неравенство Фридрихса для функции $U_\varepsilon - u_\varepsilon$ влечет оценку

$$\|U_\varepsilon - u_\varepsilon\|_1^2 \leq C \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla (U_\varepsilon - u_\varepsilon)|^2 dx.$$

Используя полученное интегральное тождество, оценку

$$\|U_\varepsilon - u_\varepsilon\|_{0,\partial\Omega} \leq C \|U_\varepsilon - u_\varepsilon\|_0,$$

а также неравенство Коши–Буняковского, выводим:

$$\begin{aligned}
\|U_\varepsilon - u_\varepsilon\|_0^2 &\leq C \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(U_\varepsilon - u_\varepsilon)|^2 dx \leq \\
&\leq \|f_\varepsilon\|_0 \|U_\varepsilon - u_\varepsilon\|_0 + \hat{\lambda}_\varepsilon \|U_\varepsilon - u_\varepsilon\|_{0,\partial\Omega}^2 + \\
&\quad + \hat{\lambda}_\varepsilon - \lambda_\varepsilon \|u_\varepsilon\|_{0,\partial\Omega} \|U_\varepsilon - u_\varepsilon\|_{0,\partial\Omega} + \\
&\quad + \|g_\varepsilon\|_{0,\partial\Omega} \|U_\varepsilon - u_\varepsilon\|_{0,\partial\Omega} \leq \\
&\leq C(\|f_\varepsilon\|_0 + \|g_\varepsilon\|_{0,\partial\Omega} + \hat{\lambda}_\varepsilon - \lambda_\varepsilon) \|U_\varepsilon - u_\varepsilon\|_0 + \\
&\quad + \hat{\lambda}_\varepsilon \|U_\varepsilon - u_\varepsilon\|_0^2.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$|1 - \hat{\lambda}_\varepsilon| \|U_\varepsilon - u_\varepsilon\|_0 \leq C(\|f_\varepsilon\|_0 + \|g_\varepsilon\|_{0,\partial\Omega} + |\hat{\lambda}_\varepsilon - \lambda_\varepsilon|),$$

что эквивалентно

$$\|U_\varepsilon - u_\varepsilon\|_0^2 \leq K_1(\|f_\varepsilon\|_0 + \|g_\varepsilon\|_{0,\partial\Omega} + |\hat{\lambda}_\varepsilon - \lambda_\varepsilon|)^2,$$

где $K_1 = \frac{C}{|1 - \hat{\lambda}_\varepsilon|}$. Далее, с учетом уже полученного неравенства

$$\begin{aligned}
\|\nabla(U_\varepsilon - u_\varepsilon)\|_0^2 &\leq C(\|f_\varepsilon\|_0 + \|g_\varepsilon\|_{0,\partial\Omega} + \\
&\quad + |\hat{\lambda}_\varepsilon - \lambda_\varepsilon|) \|U_\varepsilon - u_\varepsilon\|_0 + \\
&\quad + \hat{\lambda}_\varepsilon \|U_\varepsilon - u_\varepsilon\|_0^2,
\end{aligned}$$

имеем:

$$\|U_\varepsilon - u_\varepsilon\|_1^2 \leq K_2(\|f_\varepsilon\|_0 + \|g_\varepsilon\|_{0,\partial\Omega} + |\hat{\lambda}_\varepsilon - \lambda_\varepsilon|)^2.$$

Применяя теперь асимптотику (31) и (42), получаем (43). Теорема доказана.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность профессорам Чечкину Г.А. и Борисову Д.И. за обсуждение данной задачи и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. *Стеклов В.А.* Общие методы решения основных задач математической физики. Диссертация на соискание ученой степени д.ф.-м.н., Харьков: Харьковский Императорский университет, 1901.
2. *Mel'nyk T.A.* Asymptotic behavior of eigenvalues and eigenfunctions of the Steklov problem in a thick periodic junction // *Nonlinear Oscillations*. 2001. V. 4. № 1. P. 91–105.
3. *Pérez E.* On periodic Steklov type eigenvalue problems on half-bands and the spectral homogenization problem // *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*. 2007. V. 7. № 4. P. 859–883.
4. *Назаров С.А., Таскинен Я.* О спектре задачи Стеклова в области с пиком // *Вестн. С.-Петерб. ун-та*. 2008. Сер. 1. № 1. С. 56–65.
5. *Назаров С.А.* О спектре задачи Стеклова в пикообразных областях // *Тр. Санкт-Петербург. мат. о-ва*. 2008. Т. 14. С. 103–168.
6. *Назаров С.А.* Асимптотика решения спектральной задачи Стеклова в области с затупленным пиком // *Мат. заметки*. 2009. Т. 86. № 4. С. 642–656.
7. *Чечкина А.Г.* О сходимости решений и собственных элементов краевой задачи типа Стеклова с быстро меняющимся типом граничных условий // *Проблемы мат. анализа*. 2009. Вып. 42. С. 129–143.
8. *Чечкина А.Г.* О сингулярном возмущении задачи типа Стеклова с вырождающимся спектром // *Докл. Академии наук*. 2011. Т. 440. № 5. С. 603–606.
9. *Чечкина А.Г.* Усреднение спектральных задач с сингулярным возмущением условия Стеклова // *Известия РАН*. 2017. Т. 81. № 1. С. 203–240.
10. *Chechkina A.G., D'Apice C., De Maio U.* Rate of Convergence of Eigenvalues to Singularly Perturbed Steklov-Type Problem for Elasticity System // *Applicable Analysis*. 2019. V. 98. № 1–2. P. 32–44. Online first doi 10.1080/00036811.2017.1416104
11. *Chiado Piat V., Nazarov S., Piatnitski A.* Steklov problems in perforated domains with a coefficient of indefinite sign. // *Networks Heter. Media*. 2012. V. 7. № 1. P. 151–178.
12. *Самарский А.А.* О влиянии закрепления на собственные частоты замкнутых объемов // *Докл. АН СССР*. 1948. Т. 63. № 6. С. 631–634.
13. *Swanson C.A.* Asymptotic Variational Formulae for Eigenvalues // *Canad. Math. Bul.* 1963. V. 6. № 1. P. 1525.
14. *Ozawa Sh.* Singular Hadamard's Variation of Domains and Eigenvalues of Laplacian 1 // *Proc. Japan Acad. Ser. A*. 1981. V. 57. № 5. P. 242–246.
15. *Мазья В.Г., Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиями // *Изв. АН СССР. Сер. мат.* 1984. Т. 48. № 2. С. 347–371.
16. *Гадыльшин Р.Р.* Сингулярно возмущенная задача для оператора Гельмгольца. В сборнике статей: “Дифференциальные уравнения с малым параметром”. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984. С. 18–35.
17. *Гадыльшин Р.Р.* Асимптотика собственного значения сингулярно возмущенной эллиптической задачи с малым параметром в граничном условии // *Дифференц. уравнения*. 1986. Т. 22. № 4. С. 640–652.
18. *Гадыльшин Р.Р.* Спектр эллиптических краевых задач при сингулярном возмущении граничных условий. В сборнике статей: Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений. Уфа. БНЦ УрО АН СССР, 1988. С. 3–15.
19. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
20. *Гадыльшин Р.Р., Королева Ю.О., Чечкин Г.А.* О собственном значении лапласиана в области, перфорированной вдоль границы // *Докл. АН*. 2010. Т. 432. № 1. С. 7–11.
21. *Гадыльшин Р.Р.* Расщепление кратного собственного значения в краевой задаче для мембраны, закрепленной на малом участке границы // *Сиб. матем. ж.* 1993. Т. 34. № 3. С. 43–61.
22. *Гадыльшин Р.Р., Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А.* Об асимптотическом поведении собственных пар

- краевой задачи в плоской области типа сита Стеклова // Известия РАН. 2018. Т. 82. № 6. С. 37–64.
23. Абдуллазаде Н.Н., Чечкин Г.А. О возмущении задачи Стеклова на малом участке границы // Проблемы математического анализа. 2013. Т. 74. С. 3–16.
 24. Chechkin G.A., D'Apice C., De Maio U., Gadyl'shin R.R. On Singularly Perturbed Steklov problem in Domain Perforated Along the Boundary // C R Mécanique. 2016. Т. 344. № 1. P. 12–18.
 25. Борисов Д.И. О краевой задаче в цилиндре с частой сменой типа граничных условий // Мат. сборник. 2002. Т. 193. № 7. С. 37–68.; translated in Sb. Math. 2002. V. 193. № 7. P. 977–1008.
 26. Borisov D.I. On a model boundary value problem for Laplacian with frequently alternating type of boundary condition // Asymptotic Analysis. 2003. V. 35. № 1. P. 1–26.
 27. Борисов Д.И. О РТ-симметричном волноводе с парой малых отверстий // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18. № 2. С. 22–37.
 28. Borisov D., Cardone G., Durante T. Homogenization and uniform resolvent convergence for elliptic operators in a strip perforated along a curve // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section: A Mathematics. 2016. V. 146. № 6. P. 1115–1158.
 29. Borisov D. Creation of spectral bands for a periodic domain with small windows // Russian Journal of Mathematical Physics. 2016. V. 23. № 1. P. 19–34.
 30. Борисов Д.И., Мухаметрахимова А.И. О равномерной резольвентной сходимости для эллиптических операторов в многомерных областях с малыми отверстиями // Проблемы математического анализа. 2018. Т. 92. С. 69–81.
 31. Chechkin G.A. On Vibration of Partially Fastened Membrane with Many “light” Concentrated Masses on the Boundary // C R Mécanique. 2004. Т. 332. № 12. P. 949–954.
 32. Amirat Y., Chechkin G.A., Gadyl'shin R.R. Asymptotics of Simple Eigenvalues and Eigenfunctions for the Laplace Operator in a Domain with Oscillating Boundary // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т. 46. № 1. С. 102–115.
 33. Мельник Т.А., Чечкин Г.А. Асимптотический анализ краевых задач в густых трехмерных многоуровневых соединениях // Математический сборник. 2009. Т. 200. № 3. С. 49–74.
 34. Amirat Y., Chechkin G.A., Gadyl'shin R.R. Asymptotics of the Solution of a Dirichlet Spectral Problem in a Junction with Highly Oscillating Boundary // C R Mécanique. 2008. Т. 336. № 9. P. 693–698.
 35. Ильин А.М. Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. I. Двумерный случай // Матем. сб. 1976. Т. 99. С. 514–537.
 36. Ильин А.М. Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. II. Область с малым отверстием // Матем. сб. 1977. Т. 103. С. 265–284.
 37. Ильин А.М. Исследование асимптотики решения эллиптической краевой задачи в области с малым отверстием // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 1981. № 6. С. 57–82.
 38. Chechkin G.A. Asymptotic Expansion of Eigenvalues and Eigenfunctions of an Elliptic Operator in a Domain with Many “Light” Concentrated Masses Situated on the Boundary. Two-Dimensional Case. // Izvestia: Mathematics. 2005. Т. 69. № 4. С. 805–846 (Translated from Izvestija RAN. Ser. Mat. 2005. Т. 69. № 4. С. 161–204).
 39. Борисов Д.И. Асимптотики и оценки собственных элементов лапласиана с частой непериодической сменой граничных условий // Известия РАН. Серия математическая. 2003. Т. 67. № 6. С. 23–70.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta “MIFI”, 2019, vol. 8, no. 3, pp. 253–263

On the Asymptotic Behavior of a Simple Eigenvalue of the Steklov Problem Perturbed on a Small Part of the Boundary by the Homogeneous Dirichlet Condition

Yu. O. Koroleva^{a, #} and T. P. Chechkina^{b, ##}

^a Department of Higher Mathematics, Gubkin Russian State University of Oil and Gas, Moscow, 119991 Russia

^b Department of Higher Mathematics, National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[#]e-mail: koroleva.y@gubkin.ru

^{##}e-mail: chechkina@mail.ru

Received October 22, 2018; revised November 21, 2018; accepted November 4, 2018

Abstract—The Steklov type spectral problem for the Laplace operator and the corresponding boundary value problem in a bounded domain with a smooth boundary has been considered. It is assumed that the homogeneous Dirichlet condition is set on a small part of the boundary, and the Steklov condition (or the corresponding Neumann condition) is imposed on the rest of the boundary. It is known that the Steklov problem perturbed on a small part of the boundary by the Dirichlet condition has a countable set of eigenvalues with

finite multiplicity. Moreover, the limit problem is a problem for the Laplace operator with the Steklov condition on the entire boundary. It is also known that the problem for the Laplace operator with the Steklov condition on the entire boundary has a countable set of eigenvalues with finite multiplicity. A two-term asymptotic expressions have been constructed for the eigenvalues and the corresponding eigenfunctions of the original problem as the small parameter characterizing the size of the boundary part with the Dirichlet condition tends to zero. It has been shown that the asymptotic expression for the eigenvalue has the second term inversely proportional to the logarithm of the small parameter. Moreover, the asymptotic expression is strictly justified with the estimate of the rest term inversely proportional to the square of the logarithm of the small parameter.

Keywords: spectrum, boundary value problems, asymptotic expressions, the Steklov problem

DOI: 10.1134/S2304487X19010073

REFERENCES

1. Stekloff, W. Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique. (French) *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 1902, vol. (3) 19, p. 191–259, 455–490.
2. Mel'nyk T.A. Asymptotic behavior of eigenvalues and eigenfunctions of the Steklov problem in a thick periodic junction. *Nonlinear Oscillations*, 2001, vol. 4, no. 1, p. 91–105.
3. Pérez E. On periodic Steklov type eigenvalue problems on half-bands and the spectral homogenization problem. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B.*, 2007, vol. 7, no. 4, p. 859–883.
4. Nazarov S.A., Taskinen J. On the spectrum of the Steklov problem in a domain with a peak. *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics*, 2008, vol. 41, no. 1, p. 45–52.
5. Nazarov S.A. On the spectrum of the Steklov problem in peak-shaped domains. *Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society*, 2008, vol. XIV, p. 103–168.
6. Nazarov S.A. Asymptotics of the Solution of the Steklov Spectral Problem in a Domain with a Blunted Peak. *Math. Notes*, 2009, vol. 86, no. 4, p. 542–555.
7. Chechkina A.G. Convergence of Solutions and Eigenelements of Steklov Type Boundary Value Problems with Boundary Conditions of Rapidly Varying Type. *Journal of Mathematical Science*, 2009, vol. 162, no. 3, p. 443–458.
8. Chechkina A.G. On Singular Perturbations of a Steklov-Type Problem with Asymptotically Degenerate Spectrum. *Doklady Mathematics*, 2011, vol. 84, no. 2, p. 695–698.
9. Chechkina A.G. Homogenization of Spectral Problems with Singular Perturbation of the Steklov Condition. *Izvestiya: Mathematics*, 2017, vol. 81, no. 1, p. 199–236.
10. Chechkina A.G., D'Apice C., De Maio U. Rate of Convergence of Eigenvalues to Singularly Perturbed Steklov-Type Problem for Elasticity System. *Applicable Analysis*, 2019, vol. 98, no. 1–2, p. 32–44. Online first 10.1080/00036811.2017.1416104
11. Chiado Piat V., Nazarov S., Piatnitski A. Steklov problems in perforated domains with a coefficient of indefinite sign. *Networks Heter. Media*, 2012, vol. 7, no. 1, p. 151–178.
12. Samarskii A.A. O vliyanii zakreplenija na sobstvennye chastoty zamknutykh oblastej [On the Influence of clamping to Eigenvalues of Closed Domains]. *Doklady SSSR. Mathematics*, 1948, vol. 63, no. 6, p. 631–634. In Russian.
13. Swanson C.A. Asymptotic Variational Formulae for Eigenvalues. *Canad. Math. Bul.* 1963, vol. 6, no. 1, p. 1525.
14. Ozawa Sh. Singular Hadamard's Variation of Domains and Eigenvalues of Laplacian 1. *Proc. Japan Acad. Ser. A*, 1981, vol. 57, no. 5, p. 242–246.
15. Maz'ya V.G., Nazarov S.A., Plamenevskii B.A., Asymptotic expansions of the eigenvalues of boundary value problems for the Laplace operator in domains with small holes. *Math. USSR-Izvestia*, 1985, vol. 24, no. 2, p. 321–345.
16. Gadyl'shin R.R. Singuljarno vozmushchennye zadachi dlja operatora Helmholtza. *Singularly Perturbed problem for the Helmholtz Operator*. In: Differential Equations with Small Parameter. Sverdlovsk, UrO AN SSSR, 1984, p. 18–35. In Russian.
17. Gadyl'shin R.R. Asymptotic properties of an eigenvalue of a problem for a singularly perturbed self-adjoint elliptic equation with a small parameter in the boundary conditions. *Differ. Equations*, 1985, vol. 22, p. 474–483.
18. Gadyl'shin R.R. *Spektr ellipticheskoy kraevoy zadachi s singuljarnym vozmushcheniem kraevykh uslovij Spectrum of Elliptic Boundary Value Problems with Singular Perturbation of Boundary Conditions*. In: Asymptotic Properties of Solutions to Differential Equations. Ufa. BNC UrO AN SSSR, 1988, p. 3–15. In Russian.
19. Il'in A.M. Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems, Translations of Math. Monographs 102, AMS, Providence, 1992.
20. Gadyl'shin R.R., Koroleva Yu.O., Chechkin G.A. On the eigenvalue of the Laplacian in a domain perforated along the boundary. *Doklady Mathematics*, 2010, vol. 81, no. 3, p. 337–341.
21. Gadyl'shin R.R. Splitting a multiple eigenvalue in the boundary value problem for a membrane clamped on a small part of the boundary. *Sib. Math. J.*, 1993, vol. 34, no. 3, p. 433–450.
22. Gadyl'shin R.R., Piatnitski A.L., Chechkin G.A. On Asymptotic Behavior of Eigenelements to a Boundary Value Problem in Plane Domain of the Steklov Sieve Type. *Izvestia RAS*, 2018, vol. 82, no. 6, p. 37–64.
23. Abdullazade N.N., Chechkin G.A. On Perturbation of a Steklov problem on a Small Part of the Boundary.

- Journal of Mathematical Sciences*, 2014, vol. 196, no. 4, p. 441–451.
24. Chechkin G.A., D'Apice C., De Maio U., Gadyl'shin R.R. On Singularly Perturbed Steklov problem in Domain Perforated Along the Boundary. *C R Mécanique*, 2016, t. 344, no. 1, p. 12–18.
 25. Borisov D.I. Boundary-value problem in a cylinder with frequently changing type of boundary. *Sb. Math.*, 2002, vol. 193, no. 7, p. 977–1008.
 26. Borisov D.I. On a model boundary value problem for Laplacian with frequently alternating type of boundary condition. *Asymptotic Analysis*, 2003, vol. 35, no. 1, p. 1–26.
 27. Borisov D.I. O RT-simmetrichnom volnovode s paroj malen'kikh otverstij On RT-symmetric waveguide with couple of small holes. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics UrO RAS*, 2012, vol. 18, no. 2, p. 22–37. In Russian.
 28. Borisov D., Cardone G., Durante T. Homogenization and uniform resolvent convergence for elliptic operators in a strip perforated along a curve. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section: A Mathematics*, 2016, vol. 146, no. 6, p. 1115–1158.
 29. Borisov D. Creation of spectral bands for a periodic domain with small windows. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 2016, vol. 23, no. 1, p. 19–34.
 30. Borisov D.I., Mukhametrakhimova A.I. On norm resolvent convergence for elliptic operators in multi-dimensional domains with small holes. *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 232, no. 3, p. 283–298.
 31. Chechkin G.A. On Vibration of Partially Fastened Membrane with Many “Light” Concentrated Masses on the Boundary. *C R Mécanique*, 2004, vol. 332, no. 12, p. 949–954.
 32. Amirat Y., Chechkin G.A., Gadyl'shin R.R. Asymptotics of Simple Eigenvalues and Eigenfunctions for the Laplace Operator in a Domain with Oscillating Boundary. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2006, vol. 46, no. 1, p. 97–110.
 33. Mel'nyk T.A., Chechkin G.A. Homogenization of a Boundary-Value Problem in a Thick 3-Dimensional Multilevel Junction. *Russian Academy of Sciences. Sbornik. Mathematics*, 2009, vol. 200, no. 3, p. 357–383.
 34. Amirat Y., Chechkin G.A., Gadyl'shin R.R. Asymptotics of the Solution of a Dirichlet Spectral Problem in a Junction with Highly Oscillating Boundary. *C R Mécanique*, 2008, vol. 336, no. 9, p. 693–698.
 35. Il'in A.M., A boundary value problem for the elliptic equation of second order in a domain with a narrow slit. 1. The two-dimensional case. *Math. USSR-Sb.*, 1976, vol. 28, no. 4, p. 459–480.
 36. Il'in A.M., A boundary value problem for the second order elliptic equation in a domain with a narrow slit. 2. Domain with a small cavity. *Math. USSR-Sb.*, 1977, vol. 32, no. 2, p. 227–244.
 37. Il'in A.M. Issledovanie asimptotiki reshenij ellipticheskoy kraevoy zadachi v oblasti s malym otverstiem An investigation of the asymptotics for a solution of an elliptic boundary value problem in a domain with a small hole. *Trudy Semin. I.G. Petrovskogo*, 1981, vol. 6, p. 57–82. In Russian.
 38. Chechkin G.A. Asymptotic Expansion of Eigenvalues and Eigenfunctions of an Elliptic Operator in a Domain with Many “Light” Concentrated Masses Situated on the Boundary. Two-Dimensional Case. *Izvestia: Mathematics*, 2005, vol. 69, no. 4, p. 805–846.
 39. Borisov D.I. Asymptotics and estimates for the eigenvalues of the Laplacian with frequently alternating nonperiodic boundary conditions. *Izvestia: Mathematics*, 2003, vol. 67, no. 6, p. 1101–1148.