ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ", 2019, том 8, № 3, с. 264–267

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ОДНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

© 2019 г. Ю. Е. Семенова[1,*], Д. И. Синельщиков[1,], Н. А. Кудряшов[1,***]**

[1] Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, 115409, Россия

**e-mail: uesemenova@gmail.com*

***e-mail: DISinelshchikov@mephi.ru*

****e-mail: nakudr@gmail.com*

Поступила в редакцию 11.03.2019 г.
После доработки 29.03.2019 г.
Принята к публикации 26.04.2019 г.

В работе находятся первые интегралы для одного автономного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка, полученного как частный случай одного из высших аналогов уравнения Пенлеве. С помощью алгоритма С.В. Ковалевской рассматриваемое уравнение исследуется на наличие свойства Пенлеве. Показано, что с помощью теста Пенлеве нельзя установить условия, необходимые для отсутствия критических подвижных особых точек у общего решения. Подробно рассматриваются два частных случая исследуемого уравнения, с конкретными значениями входящих в него параметров. Для нахождения первых интегралов полученных уравнений используется предположение об их линейной зависимости от старшей производной.

Показано, что одно из полученных уравнений третьего порядка также имеет первый интеграл аналогичного вида, а наличие у него свойства Пенлеве не может быть установлено используемыми в работе подходами. Найденный первый интеграл этого уравнения используется для приведения уравнения к уравнению второго порядка. Показано, что полученное уравнение не обладает первым интегралом вида, аналогичного случаям уравнения третьего и четвертого порядка.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, высший аналог уравнения Пенлеве, первые интегралы, свойство Пенлеве

DOI: 10.1134/S2304487X1903012X

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка, полученное в [1], которое при условии $\alpha = 0$ становится автономным:

$$u_{xxxx} - 3\frac{u_x u_{xxx}}{u} - \frac{7}{2}\frac{u_{xx}^2}{u} + \frac{17}{2}\frac{u_x^2 u_{xx}}{u^2} - \frac{27}{8}\frac{u_x^4}{u^3} + \left(\beta - \frac{5\sigma}{u^2}\right)u_{xx} - \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{u} - \frac{15\sigma}{u^3}\right)u_x^2 + 2\nu u^2 - 2\alpha x u + \frac{\beta\sigma}{u} - \frac{3\sigma^2}{2u^3} = 0. \tag{1.1}$$

Целью работы является нахождение первых интегралов данного уравнения в случае $\alpha = 0$.

2. ТЕСТ НА НАЛИЧИЕ У УРАВНЕНИЯ (1.1) СВОЙСТВА ПЕНЛЕВЕ

Рассмотрим (1.1) с помощью алгоритма С.В. Ковалевской, усовершенствованного в работе М. Абловица, А. Рамани и Х. Сигура [2, 3]. Данный алгоритм представлен в ряде работ. Подробнее с ним можно ознакомиться, например, в книге [4]. Порядок полюса уравнения (1.1) равен четырем, поэтому ищем решение в виде:

$$u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^{j-4}. \tag{2.1}$$

Полагая

$$u(x) = a_0(x - x_0)^{-p} + a_r(x - x_0)^{r-p}, \quad a_0 = \frac{72}{\nu}, \tag{2.2}$$

найдем значение r для индексов Фукса

$$r_1 = -3, \quad r_2 = -1, \quad r_3 = 6, \quad r_4 = 8. \tag{2.3}$$

Далее получаем значения для a_j, где $j = 0, \ldots, 8$:

$$a_0 = \frac{72}{\nu}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{12}{5}\frac{\beta}{\nu},$$
$$a_3 = 0, \quad a_4 = \frac{1}{350}\frac{\beta^2}{\nu}, \quad a_5 = \frac{\alpha}{\nu}, \quad a_7 = -\frac{2}{75}\frac{\alpha\beta}{\nu}, \tag{2.4}$$

где a_6, a_8 – произвольные коэффициенты. Поскольку один из индексов Фукса имеет отрицательное значение, нельзя определенно сказать, имеет ли общее решение уравнения критические подвижные особые точки.

3. ПЕРВЫЙ ИНТЕГРАЛ УРАВНЕНИЯ (3.1)

Полагая в уравнении (1.1) $\alpha = 0$ и $\delta = 0$, получаем уравнение

$$E(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, u_{xxxx}) = u_{xxxx} - 3\frac{u_x u_{xxx}}{u} - \frac{7}{2}\frac{u_{xx}^2}{u} + \frac{17}{2}\frac{u_x^2 u_{xx}}{u^2} - \frac{27}{8}\frac{u_x^4}{u^3} + \beta u_{xx} - \frac{1}{2}\frac{\beta}{u}u_x^2 + 2\nu u^2 = 0. \tag{3.1}$$

Введем обозначение:

$$D_x = \frac{\partial}{\partial u} + u_x\frac{\partial}{\partial u} + u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xxx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + u_{xxxx}\frac{\partial}{\partial u_{xxx}}. \tag{3.2}$$

Тогда

$$D_x I\big|_{E=0} = 0. \tag{3.3}$$

Предположим, что $I(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx})$ имеет вид

$$I(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}) = A(u, u_x, u_{xx})u_{xxx} + B(u, u_x, u_{xx}). \tag{3.4}$$

Подставляя (3.4) в (3.1) и приводим подобные члены относительно u_{xxx}. В результате получим

$$A_{u_{xx}}u_{xxx}^2 + \left(u_x A_u + u_{xx}A_{u_x} + B_{u_{xx}} + \frac{3u_x}{u}A\right)u_{xxx} + u_x B_u + u_{xx}B_{u_x} + \frac{7}{2}\frac{u_{xx}^2}{u} - \frac{17}{2}\frac{u_x^2 u_{xx}}{u^2} + \frac{27}{8}\frac{u_x^4}{u^3} - \beta u_{xx} + \frac{1}{2}\frac{\beta}{u}u_x^2 - 2\nu u^2. \tag{3.5}$$

Приравняем коэффициенты при степенях u_{xxx} к нулю, находим выражения для $A(u, u_x, u_{xx})$ и $B(u, u_x, u_{xx})$:

$$A = \frac{u_x}{u}, \quad B = u^2\nu + C\nu + \frac{1}{2u^3}\times \left(\beta u_x^2 u^2 + \frac{25u_x^4}{4}\right) - \frac{1}{2u}\left(u_{xx} + \frac{2u_x^2}{u}\right)^2. \tag{3.6}$$

Тогда первый интеграл уравнения (3.1) имеет вид

$$\frac{u_x u_{xxx}}{u} + \frac{1}{2u^3}\left(\beta u_x^2 u^2 + \frac{25u_x^4}{4}\right) - \frac{1}{2u}\left(u_{xx} + \frac{2u_x^2}{u}\right)^2 + u^2\nu + C_0 = 0, \tag{3.7}$$

где C_0 – произвольная постоянная.

Далее положим в уравнении (1.1) $\alpha = 0$ и получим уравнение

$$u_{xxxx} - 3\frac{u_x u_{xxx}}{u} - \frac{7}{2}\frac{u_{xx}^2}{u} + \frac{17}{2}\frac{u_x^2 u_{xx}}{u^2} - \frac{27}{8}\frac{u_x^4}{u^3} + \left(\beta - \frac{5\sigma}{u^2}\right)u_{xx} - \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{u} - \frac{15\sigma}{u^3}\right)u_x^2 + 2\nu u^2 + \frac{\beta\sigma}{u} - \frac{3\sigma^2}{2u^3} = 0. \tag{3.8}$$

Действуя по аналогии со случаем нахождения первого интеграла для уравнения (3.1), получим первый интеграл для уравнения (3.8):

$$\frac{2u_x u_{xxx}}{u} + 2\nu u^2 - \frac{1}{u}(-u_x^2\beta + u_{xx}^2 + 2\beta\sigma) - \frac{4u_x^2 u_{xx}}{u^2} + \frac{1}{u^3}\left(\frac{9u_x^4}{4} - 5u_x^2\sigma + \delta^2\right) + C_1 = 0, \tag{3.9}$$

где C_1 – произвольная постоянная.

4. ТЕСТ НА НАЛИЧИЕ СВОЙСТВА ПЕНЛЕВЕ ДЛЯ ПЕРВОГО ИНТЕГРАЛА УРАВНЕНИЯ (3.1)

Полученное в предыдущем разделе уравнение

$$\frac{u_x u_{xxx}}{u} + \frac{1}{2u^3}\left(\beta u_x^2 u^2 + \frac{25u_x^4}{4}\right) - \frac{1}{2u}\left(u_{xx} + \frac{2u_x^2}{u}\right)^2 + u^2\nu + C_0\nu = 0, \tag{4.1}$$

которое является первым интегралом для уравнения (3.1), будем рассматривать в соответствии с алгоритмом С.В. Ковалевской, усовершенствованном в работе М. Абловица, А. Рамани и Х. Сигура [2, 3]. Все действия выполняются аналогично случаю, описанному в предыдущем разделе работы. Предполагаем, что $u(x)$ выглядит как:

$$u(x) = a_0 x^{-p} + bx^{-r-p} = \frac{72}{\nu}x^{-4} + bx^{-r-4}, \tag{4.2}$$

откуда найдем значение r для индексов Фукса

$$r_1 = -3, \quad r_2 = -1, \quad r_3 = 6 \tag{4.3}$$

Далее проверим, действительно ли коэффициент a_6 будет независимым. Для этого найдем коэффициенты a_j, где $j = 0,\ldots,7$. Получаем следующие значения для a_j, где $j = 0,\ldots,7$:

$$\begin{gathered} a_0 = \frac{72}{\nu}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{12}{5}\frac{\beta}{\nu}, \\ a_3 = 0, \quad a_4 = \frac{1}{350}\frac{\beta^2}{\nu}, \quad a_5 = \frac{\alpha}{\nu}, \quad a_7 = 0. \end{gathered} \tag{4.4}$$

a_6 – произвольный коэффициент.

5. ПЕРВЫЙ ИНТЕГРАЛ УРАВНЕНИЯ (3.8)

Далее найдем первый интеграл уравнения (3.8). На первом шаге приведем рассматриваемое уравнение к виду

$$\begin{gathered} E_1 = u_{xxx} + \frac{1}{2}\beta u_x + \frac{9}{8}\frac{u_x^3}{u^2} - \\ -\frac{1}{2}\frac{u_{xx}^2}{u_x} - \frac{2u_x u_{xx}}{u} + \frac{u^3\nu}{u_x} + \frac{C_0\nu u}{u_x} = 0. \end{gathered} \tag{5.1}$$

Последующие шаги произведем аналогично. Пусть

$$I_2 = I_2(u, u_x, u_{xx}) \tag{5.2}$$

– первый интеграл уравнения (5.1).

$$DI_2\big|_E = u_x I_{2_u} + u_{xx} I_{2_{u_x}} + f(u, u_x, u_{xx}) I_{2u_{xx}} = 0. \tag{5.3}$$

Предположим, что $I_2(u, u_x, u_{xx})$ имеет вид

$$\begin{gathered} I_2(u, u_x, u_{xx}) = A_0(u, u_x)u_{xx}^4 + \\ + A_1(u, u_x)u_{xx}^3 + A_2(u, u_x)u_{xx}^2 + \\ + A_3(u, u_x)u_{xx} + A_4(u, u_x) = 0. \end{gathered} \tag{5.4}$$

Подставим (5.4) в (5.3) и приведем подобные относительно степеней u_{xx}. В получившемся уравнении приравняем коэффициенты при u_{xx}^m (где $m = 0, \ldots, 4$) к нулю, в результате чего получим систему дифференциальных уравнений, из которой найдем значения функций A_n, где $n = 0, \ldots, 5$

$$\begin{gathered} A_0 = \frac{1}{u_x^2 u^2}, \quad A_1 = -\frac{4}{u^3}, \\ A_2 = \frac{2\beta}{u^2} + \frac{11}{2}\frac{u_x^2}{u^4} - \frac{4\nu}{u_x^2}\left(u + \frac{C_0}{u}\right), \\ A_3 = 16\nu - \frac{4u_x^2\beta}{u^3} - \frac{3u_x^4}{u^5}, \\ A_4 = \frac{4u^4\nu^2}{u_x^2} + \frac{8\nu^2 C_0 u^2}{u_x^2} + 4u\beta\nu - \\ -\frac{15u_x^2\nu}{u} + \frac{4\beta C_0\nu}{u_x^2 u} + \frac{\beta^2 u_x^2}{u^2} + \frac{\nu C_0 u_x^2}{u^3} + \frac{3}{2}\frac{\beta u_x^4}{u^4} + \\ + \frac{9}{16}\frac{u_x^6}{u^6} + \frac{4C_2}{u^6 u_x^2} + \frac{16\nu^2 C_0^2}{u^6 u_x^4}, \end{gathered} \tag{5.5}$$

где C_2 – произвольная константа. Таким образом

$$\begin{gathered} I_2 = \frac{u_{xx}^4}{u_x^2 u^2} - \frac{4u_{xx}^3}{u^3} + \left(\frac{2\beta}{u^2} + \frac{11}{2}\frac{u_x^2}{u^4} - \frac{4\nu}{u_x^2}[u + \frac{C_0}{u}]\right)u_{xx}^2 + \\ + \left(16\nu - \frac{4u_x^2\beta}{u^3} - \frac{3u_x^4}{u^5}\right)u_{xx} + \frac{4u^4\nu^2}{u_x^2} + \\ + \frac{8\nu^2 C_0 u^2}{u_x^2} + 4u\beta\nu - \frac{15u_x^2\nu}{u} + \frac{4\beta C_0\nu}{u_x^2 u} + \\ + \frac{\beta^2 u_x^2}{u^2} + \frac{\nu C_0 u_x^2}{u^3} + \frac{3}{2}\frac{\beta u_x^4}{u^4} + \frac{9}{16}\frac{u_x^6}{u^6} + \frac{4C_2}{u^6 u_x^2} + \frac{16\nu^2 C_0^2}{u^6 u_x^4}. \end{gathered} \tag{5.6}$$

Для уравнения (3.9) аналогично может быть получен первый интеграл, являющийся полиномом четвертой степени от u_{xx}. Однако, в данной работе он не приводится, так как имеет громоздкий вид.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе уравнение (1.1) исследовано на наличие свойства Пенлеве с помощью алгоритма С.В. Ковалевской. Установлено, что с помощью данного метода нельзя определить, выполняется ли для уравнения (1.1) свойство Пенлеве. Для более точного анализа наличия свойства требуется производить дополнительные исследования, используя алгоритм Конта–Форди–Пикеринга.

Также были найдены первые интегралы для частных случаев уравнения (1.1) в случаях $\alpha = 0$ (3.9) и $\alpha = \delta = 0$ (3.7). Также для (3.7) был произведен тест на наличие свойства Пенлеве и найден первый интеграл.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 18-29-10039.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kydryashov N.A.* Fourth-order analogies to the Painlevé equations // J. Phys. A: Math. and Theor. 2002. V. 35. P. 4617–4632. doi: 10.1088/0305-4470/35/21/310
2. *Ablowitz M.J., Ramani A., Segur H.* A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type // J. Math. Phys. 1980. V. 21. P. 715–721, 1006–1015.
3. *Ablowitz M.J., Ramani A., Segur H.* Nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of Painlevé type // Lett. al Nuovo Cim. 1978. V. 23. P. 333–338.
4. *Кудряшов Н.А.* Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Интеллект, 2010, 364 с.

Vestnik Nacional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI", 2019, vol. 8, no. 3, pp. 264–267

First Integrals of One Fourth Order Ordinary Differential Equation

Yu. E. Semenova[a,#], D. I. Sinelshchikov[a,##], and N. A. Kudryashov[a,###]

[a] *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia*

[#]*e-mail: uesemenova@gmail.com,*

[##]*e-mail: DISinelshchikov@mephi.ru,*

[###]*e-mail: nakudr@gmail.com*

Received March 11, 2019; revised March 29, 2019; accepted April 26, 2019

Abstract—First integrals for one fourth-order ordinary differential equation that is a special case of one of the higher analogues of the Painlevé equation have been found. The equation has been studied for the presence of the Painlevé property using the Kovalevskaya algorithm. It has been shown that the method used does not allow to accurately determining whether the general solution of the equation has critical moving singular points or not. Two particular cases of the equation under study with certain values of its parameters contained have been considered in detail. To find the first integrals of the resulting equations, their linear dependence on the highest derivative is assumed. The found first integrals are used to reduce the order of the equations under study. This equation does not have any first integral of a similar form. The found first integral of this equation is used to reduce the equation to a second order equation. It has been shown that the resulting equation does not have a first integral of the form similar to the cases of the third and fourth order equations.

Keywords: nonlinear differential equation, higher analog of the Painlevé equation, first integrals, Painlevé property

DOI: 10.1134/S2304487X1903012X

REFERENCES

1. Kydryashov N.A., Fourth-order analogies to the Painlevé equations. *J. Phys. A: Math. and Theor.*, 2002, vol. 35, pp. 4617–4632. doi: 10.1088/0305-4470/35/21/310
2. Ablowitz M.J., Ramani A., Segur H., A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. *J. Math. Phys.*, 1980, vol. 21, pp. 715–721, 1006–1015.
3. Ablowitz M.J., Ramani A., Segur H., differential equations of Painlevé type. *Lett. al Nuovo Cim.*, 1978, vol. 23, pp. 333–338.
4. Kydryashov N.A., *Methods of Nonlinear Mathematical Physics*, Dolgoprudny: Intellekt, 2010, 364 p. (in Russian).