ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ», 2023, т. 12, № 3, с. 153–164

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 517.95

РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ РЕАКЦИОННО-ДИФФУЗИОННОГО ТИПА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А.Д. Полянин**, В.Г. Сорокин**

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия

**e-mail: polyanin@ipmnet.ru*

***e-mail: vsesor@gmail.com*

Поступила в редакцию: 20.06.2023

После доработки: 21.06.2023

Принята к публикации: 26.07.2023

Рассматриваются линейные одномерные уравнения реакционно-диффузионного типа с постоянным запаздыванием. Описаны точные решения таких уравнений, которые выражаются в элементарных функциях. Получены решения в замкнутом виде соответствующих начально-краевых задач с общими начальными данными и граничными условиями первого, второго и третьего рода, а также смешанными краевыми условиями.

Ключевые слова: линейные реакционно-диффузионные уравнения, уравнения в частных производных с запаздыванием, начально-краевые задачи, решения в замкнутом виде, точные решения.

DOI: 10.26583/vestnik.2023.286

ВВЕДЕНИЕ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МОДЕЛИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Уравнения в частных производных с запаздыванием применяются в математическом моделировании процессов, проявляющих свойства наследственности, когда скорость изменения искомой величины зависит не только от ее текущих значений, но и от некоторых значений в прошлом. В такие уравнения помимо искомой функции $u(t)$ входит функция $w = u(t - \tau)$, где t – время, $\tau > 0$ – время запаздывания. Простейшие обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) с постоянным запаздыванием имеют вид

$$u'(t) = F(u, w), \quad w = u(t - \tau), \tag{1}$$

где F – некоторая функция.

Теоретические аспекты ОДУ с постоянным запаздыванием достаточно хорошо изучены [1–3], а их практическое применение весьма обширно и имеет место в теории популяций [4–10], медицине [11–16], эпидемиологии [17–19], экономике [20–22], теории искусственных нейронных сетей [26–29] и др.

Однако протекающие процессы часто являются пространственно неоднородными и моделируются более сложными реакционно-диффузионными уравнениями с постоянным запаздыванием (см., например, [30, 31]):

$$u_t = au_{xx} + F(u, w), \quad w = u(x, t - \tau), \tag{2}$$

где $u = u(x, t)$; $a > 0$ – коэффициент диффузии; F – кинетическая функция.

Специальный случай $F(u, w) = f(w)$ в (2) допускает простую физическую интерпретацию: процесс переноса субстанции в локально-неравновесной среде обладает инерционными свойствами, т.е. система реагирует на воздействие не мгновенно, как в классическом локально-равновесном случае, а на время запаздывания τ позже.

В большинстве случаев модели, описываемые реакционно-диффузионными уравнениями с запаздыванием вида (2), получаются путем формального добавления диффузионного слагаемого au_{xx} в правую часть ОДУ с запаздыванием (1). Таким образом моделируются случайные блуждания в пространстве рассматриваемых объектов (субъектов), причем движение каждого объекта (субъекта) обусловлено диффузией Фика, когда поток пропорционален градиенту концентрации, а константа пропорциональности является отрицательной. Например, в моделях динамики популяций явление, подобное диффузии, возникает из-за тенденции любого биологического вида мигрировать в регионы с более низкой плотностью популяции [33]. Для упрощения обычно предполагается, что питание поставляется непрерывно и однородно во времени и пространстве. Таким образом, в регионах с высокой плотностью популяции питание станет дефицитным, и особи будут стремиться мигрировать в регионы с более низкой плотностью, чтобы иметь более высокие шансы выжить. В [34–36] процесс диффузии обсуждается с экологической точки зрения.

Замечание 1. Формальное введение диффузионного слагаемого в правую часть ОДУ с запаздыванием может привести к некоторым сложностям. Дело в том, что, хотя диффузия и временное запаздывание связаны соответственно с пространством и временем, они не являются независимыми друг от друга, поскольку рассматриваемые особи, клетки, нейроны, молекулы и т.п. не находятся в одних и тех же точках пространства в предыдущие моменты времени. Возможные способы устранения указанной проблемы путем введения распределенного (нелокального) запаздывания обсуждаются в [37].

Реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием вида (2) и родственные более сложные уравнения и системы таких уравнений возникают в различных приложениях, таких как теория популяций [38–42], биомедицина [43–48], эпидемиология [49–51], химия [32, 52, 53], математическая теория искусственных нейронных сетей [54–56] и др. (см. обзоры в химии [30, 31, 57]). Такие уравнения по сложности анализа и изучения сопоставимы с системами нелинейных уравнений в частных производных без запаздывания. Тем не менее, в последнее время с помощью метода функциональных связей [58, 59] было построено большое количество точных решений с обобщенным и функциональным разделением переменных для нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием, содержащих произвольные функции [58–63]. Некоторые точные решения были получены методами группового анализа [64] и путем использования решений более простых уравнений [65]. Решения типа бегущей волны $u = u(z)$, где $z = kx + \lambda t$, рассматривались, например, в [66]. Отметим, что нелинейные реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием не допускают автомодельных решений вида $u = t^{\beta}\varphi(xt^{\lambda})$, которые часто имеют реакционно-диффузионные уравнения без запаздывания.

ЛИНЕЙНЫЕ РЕАКЦИОННО-ДИФФУЗИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ПРОСТЕЙШЕГО ВИДА

В данной статье рассматриваются линейные реакционно-диффузионные уравнения с постоянным запаздыванием

$$u_t = a_1 u_{xx} + a_2 w_{xx} + c_1 u + c_2 w + f(x, t),$$
$$w = u(x, t - \tau), \qquad (3)$$

где $a_1 \geq 0,\ a_2 \geq 0,\ a_1 + a_2 > 0,\ \tau > 0,\ f(x, t)$ – некоторая заданная функция.

Однородные уравнения вида (3) при $f(x, t) \equiv 0$ допускают точные решения, которые выражаются в элементарных функциях и описаны ниже.

1. Решения с мультипликативным разделением переменных:

$$u = [A\cos(kx) + B\sin(kx)]e^{-\lambda t},$$
$$k = \sqrt{(\lambda + c_1 + c_2 e^{\lambda\tau})/(a_1 + a_2 e^{\lambda\tau})}$$

при
$$\lambda + c_1 + c_2 e^{\lambda\tau} > 0; \qquad (4)$$
$$u = [A\exp(kx) + B\exp(-kx)]e^{-\lambda t},$$
$$k = \sqrt{-(\lambda + c_1 + c_2 e^{\lambda\tau})/(a_1 + a_2 e^{\lambda\tau})}$$

при
$$\lambda + c_1 + c_2 e^{\lambda\tau} < 0,$$

где A, B, λ – произвольные постоянные. Заметим, что эти решения являются частными случаями более сложных решений вида $u = \varphi(x)\,\psi(t)$.

Решение (4) является периодическим по пространственной переменной x и затухает при $t \to \infty$ (если $\lambda > 0$).

2. Точные решения, периодические по времени t:

$$u = e^{-\gamma x}[A\cos(\omega t - \beta x) + B\sin(\omega t - \beta x)],$$

где A, B, ω – произвольные постоянные, а константы β и γ можно выразить через ω и параметры исходного уравнения путем решения алгебраической системы уравнений

$$[a_1 + a_2\cos(\omega\tau)](\gamma^2 - \beta^2) + 2a_2\sin(\omega\tau)\beta\gamma + c_1 + c_2\cos(\omega\tau) = 0,$$
$$a_2\sin(\omega\tau)(\gamma^2 - \beta^2) - 2[a_1 + a_2\cos(\omega\tau)]\beta\gamma + \omega + c_2\sin(\omega\tau) = 0.$$

Исключив γ (или β) из этой системы, можно получить биквадратное уравнение для β (или γ).

3. При некоторых ограничениях на параметры исходного уравнения существуют решения, которые являются периодическими по обеим независимым переменным x и t, вида

$$u = [A_1 \cos(\gamma x) + B_1 \sin(\gamma x)] \times$$
$$\times [A_2 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t)],$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 – произвольные постоянные, а константы γ и ω определяются из трансцендентной системы уравнений

$$c_1 + c_2 \cos(\omega\tau) = [a_1 + a_2 \cos(\omega\tau)]\,\gamma^2,$$
$$\omega + c_2 \sin(\omega\tau) = a_2 \sin(\omega\tau)\,\gamma^2.$$

4. Имеются решения полиномного вида по пространственной переменной x (содержащие соответственно четные и нечетные степени):

$$u = \sum_{k=0}^{n} A_k(t) x^{2k} \quad \text{и} \quad u = \sum_{k=0}^{n} B_k(t) x^{2k+1}.$$

ЛИНЕЙНЫЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ РЕАКЦИОННО-ДИФФУЗИОННОГО ТИПА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Предварительные замечания. Многие свойства линейных уравнений в частных производных с запаздыванием аналогичны свойствам более простых уравнений в частных производных без запаздывания. Граничные условия в начально-краевых задачах для уравнений в частных производных с запаздыванием формулируются точно так же, как и для уравнений в частных производных без запаздывания.

Начальные условия (начальные данные) для уравнений с частными производными в задачах с постоянным запаздыванием $\tau > 0$, задаются на целом интервале $t_0 - \tau \le t \le t_0$ (а не в точке $t = t_0$, как в задачах без запаздывания). При этом ищется решение, непрерывное в точке $t = t_0$, иногда встречается $t_0 = \tau$.

Для решения линейных задач, описываемых уравнениями в частных производных с запаздыванием, можно использовать метод разделения переменных и методы интегральных преобразований (таким же образом, как это делается для линейных уравнений в частных производных без запаздывания [67, 68]).

Формулировки начально-краевых задач. Рассмотрим одномерное линейное реакционно-диффузионное уравнение с постоянными коэффициентами и запаздыванием (3), определенное в области $\Omega = \{0 < x < h,\ t > 0\}$. Для краткости, далее будем обозначать это уравнение так:

$$L[u, w] = f(x, t), \quad t > 0, \tag{5}$$

где $L[u, w] \equiv u_t - a_1 u_{xx} - a_2 w_{xx} - c_1 u - c_2 w$ и $w = u(x, t - \tau)$.

Дополним уравнение (5) линейными неоднородными граничными условиями, которые, не конкретизируя, будем записывать в кратком виде:

$$\begin{aligned} &\Gamma_1[u] = g_1(t) \ \text{ при } \ x = 0,\ t > -\tau, \\ &\Gamma_2[u] = g_2(t) \ \text{ при } \ x = h,\ t > -\tau, \end{aligned} \tag{6}$$

и общим начальным условием

$$u = \varphi(x, t) \ \text{ при } \ 0 < x < h, -\tau \le t \le 0. \tag{7}$$

Будем считать, что входящие в граничные условия (6) линейные операторы $\Gamma_{1,2}[u]$ не зависят явно от времени t. Наиболее распространенные граничные условия приведены в третьем столбце табл. 1.

Будем считать, что функции f и φ, входящие в уравнение (3) и начальное условие (7), непрерывны, а функции g_1 и g_2, стоящие в граничных условиях (6), непрерывно дифференцируемы по t. Кроме того, будем предполагать, что граничные и начальные условия (6) и (7) совместны, т.е. выполняются соотношения

$$\Gamma_1[\varphi] = g_1(t) \ \text{ при } \ x = 0, t > -\tau;$$
$$\Gamma_2[\varphi] = g_2(t) \ \text{ при } \ x = h, t > -\tau.$$

В [69–73] для решения одномерных задач, описываемых реакционно-диффузионным уравнением с постоянным запаздыванием типа (3) и родственными уравнениями, использовался метод разделения переменных.

Представление решений начально-краевых задач в виде суммы решений более простых задач. Следуя [71,72], решение задачи (5)–(7) ищем в виде суммы

$$u = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t), \tag{8}$$

где

$$u_0 = u_0(x, t) \tag{9}$$

является любой дважды непрерывно дифференцируемой функцией, удовлетворяющей граничным условиям (6), т.е.

$$\begin{aligned} &\Gamma_1[u_0] = g_1(t) \ \text{ при } \ x = 0, \\ &\Gamma_2[u_0] = g_2(t) \ \text{ при } \ x = h. \end{aligned} \tag{10}$$

Определение функции u_0 не связано с решением дифференциальных уравнений. Эту функцию можно искать методом неопределенных коэффициентов, например, в виде квадратичного по x многочлена: $u_0 = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\,x + \alpha_2(t)\,x^2$ (в большинстве случаев можно положить $\alpha_2 \equiv 0$). Функциональные коэффициенты $\alpha_k(t)$ определяются путем подстановки этого многочлена в граничные условия (10).

В табл. 1 приведены простейшие функции $u_0 = u_0(x, t)$, которые удовлетворяют наиболее распространенным неоднородным граничным условиям в начально-краевых задачах для реакционно-диффузионных уравнений с одной пространственной переменной. В граничных условиях третьего рода считается, что $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$.

Две функции $u_1 = u_1(x, t)$ и $u_2 = u_2(x, t)$, также входящие в (8), определяются путем решения описанных ниже более простых начально-краевых задач с однородными (нулевыми) граничными условиями.

Задача 1. Функция u_1 удовлетворяет линейному однородному УрЧП с постоянным запаздыванием

$$L[u_1, w_1] = 0, \quad w_1 = u_1(x, t-\tau), \qquad (11)$$

однородным граничным условиям

$$\Gamma_1[u_1] = 0 \ \text{ при } \ x = 0,\ t > -\tau;$$
$$\Gamma_2[u_1] = 0 \ \text{ при } \ x = h,\ t > -\tau, \qquad (12)$$

и неоднородному начальному условию

$$u_1 = \Phi(x, t) \ \text{ при } \ 0 < x < h,\ -\tau \le t \le 0, \qquad (13)$$

где

$$\Phi(x, t) = \varphi(x, t) - u_0(x, t). \qquad (14)$$

Таблица 1. Простейшие функции $u_0 = u_0(x, t)$, которые удовлетворяют наиболее распространенным неоднородным граничным условиям на концах отрезка $0 \le x \le h$

№	Начально-краевая задача	Граничные условия	Функция $u_0 = u_0(x, t)$, удовлетворяющая граничным условиям
1	Первая	$u = g_1(t)$ при $x = 0$, $u = g_2(t)$ при $x = h$	$u_0 = g_1(t) + \dfrac{x}{h}\left[g_2(t) - g_1(t)\right]$
2	Вторая	$u_x = g_1(t)$ при $x = 0$, $u_x = g_2(t)$ при $x = h$	$u_0 = xg_1(t) + \dfrac{x^2}{2h}\left[g_2(t) - g_1(t)\right]$
3	Третья	$u_x - k_1u = g_1(t)$ при $x = 0$, $u_x + k_2u = g_2(t)$ при $x = h$	$u_0 = \dfrac{(k_2x - 1 - k_2h)g_1(t) + (1 + k_1x)g_2(t)}{k_2 + k_1 + k_1k_2h}$
4	Смешанная	$u = g_1(t)$ при $x = 0$, $u_x = g_2(t)$ при $x = h$	$u_0 = g_1(t) + xg_2(t)$
5	Смешанная	$u_x = g_1(t)$ при $x = 0$, $u = g_2(t)$ при $x = h$	$u_0 = (x - h)g_1(t) + g_2(t)$

Задача 2. Функция u_2 удовлетворяет линейному однородному УрЧП с постоянным запаздыванием

$$L[u_2, w_2] = F(x, t), \quad w_2 = u_2(x, t-\tau), \qquad (15)$$

где

$$F(x, t) = f(x, t) - L[u_0, w_0], \ \ w_0 = u_0(x, t-\tau), \qquad (16)$$

и нулевым граничным и начальному условиям

$$\Gamma_1[u_2] = 0 \ \text{ при } \ x = 0,\ \ t > -\tau;$$
$$\Gamma_2[u_2] = 0 \ \text{ при } \ x = h,\ \ t > -\tau; \qquad (17)$$

$$u_2 = 0 \ \text{ при } \ 0 < x < h,\ -\tau \le t \le 0. \qquad (18)$$

Решение задачи 1. Рассмотрим линейное однородное УрЧП с запаздыванием (11) с граничными и начальными условиями (12) и (13). Сначала ищем частные решения уравнения (11) в виде произведения функций разных аргументов

$$u_{1p} = X(x)\,T(t). \qquad (19)$$

Подставив (19) в (11), после элементарных преобразований получим

$$X(x)[T'(t) - c_1T(t) - c_2T(t-\tau)] = $$
$$= X''(x)[a_1T(t) + a_2T(t-\tau)]. \qquad (20)$$

Разделяя в этом уравнении переменные, приходим к линейному ОДУ второго порядка и ОДУ первого порядка с постоянным запаздыванием:

$$X''(x) = -\lambda^2 X(x), \qquad (21)$$

$$T'(t) = (c_1 - a_1\lambda^2)T(t) + (c_2 - a_2\lambda^2)T(t-\tau). \qquad (22)$$

Требуя, чтобы функция $u_{1p} = X(x)T(t)$ удовлетворяла однородным граничным условиям (12), приходим к однородным граничным условиям для функции X:

$$\Gamma_1[X] = 0 \ \text{ при } \ x = 0, \ \Gamma_2[X] = 0 \ \text{ при } \ x = h. \quad (23)$$

Нетривиальные решения $X = X_n(x)$ линейной однородной задачи на собственные значения (21), (23) существуют только для дискретного множества значений параметра λ:

$$\lambda = \lambda_n, \quad X = X_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots . \quad (24)$$

Важно отметить, что собственные функции $X_n(x)$ и $X_m(x)$ ортогональны в том смысле, что

$$\int_0^h X_n(x)X_m(x)dx = 0 \quad \text{при} \quad n \neq m. \quad (25)$$

Собственные значения и собственные функции для однородных линейных краевых задач, описываемых ОДУ (21), для пяти наиболее распространенных граничных условий приведены в табл. 2.

Подставив собственные значения $\lambda = \lambda_n$ в (22), получим соответствующие ОДУ с запаздыванием для функций $T = T_n(t)$.

Решение линейной начально-краевой задачи (11)–(14) ищем в виде ряда

$$u_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t), \quad (26)$$

где функции $u_{1n}(x, t) = X_n(x)\,T_n(t)$–частные решения уравнения (11), удовлетворяющие однородным граничным условиям (12).

Чтобы найти начальные условия для ОДУ с запаздыванием (22) при $\lambda = \lambda_n$, представим начальное условие (13) в виде разложения по собственным функциям:

$$\Phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t)X_n(x), \quad 0 \le x \le h, \quad -\tau \le t \le 0. \quad (27)$$

Умножая (27) на $X_m(x)$ ($m = 1, 2, 3, \ldots$), интегрируя по пространственной переменной x от 0 до h и учитывая (25), имеем

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^h \Phi(\xi,t)X_n(\xi)d\xi, \quad -\tau \le t \le 0, \quad (28)$$

где функция $\Phi(\xi, t)$ определена формулой (14) и $\|X_n\|^2 = \int_0^h X_n^2(\xi)d\xi.$

Таблица 2. Собственные функции в задачах на собственные значения, описываемые однородным ОДУ $X''_{xx} = -\lambda^2 X$ с наиболее распространёнными однородными граничными условиями на концах отрезка $0 \le x \le h$

№	Начально-краевая задача	Граничные условия	Собственные значения и собственные функции $X_n = X_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$
1	Первая	$X = 0$ при $x = 0$, $X = 0$ при $x = h$	$\lambda_n = \pi n/h$; $X_n = \sin\left(\frac{\pi n x}{h}\right)$
2	Вторая	$X'_x = 0$ при $x = 0$, $X'_x = 0$ при $x = h$	$\lambda_0 = 0$, $\lambda_n = \pi n/h$; $X_0 = 1$, $X_n = \cos\left(\frac{\pi n x}{h}\right)$
3	Третья	$X'_x - k_1 X = 0$ при $x = 0$, $X'_x + k_2 X = 0$ при $x = h$	λ_n – корни трансцендентного уравнения $\frac{\operatorname{tg}(\lambda h)}{\lambda} = \frac{k_1 + k_2}{\lambda^2 - k_1 k_2}$, $(\lambda_n > 0)$; $X_n = \cos(\lambda_n x) + \frac{k_1}{\lambda_n}\sin(\lambda_n x)$
4	Смешанная	$X = 0$ при $x = 0$, $X'_x = 0$ при $x = h$	$\lambda_n = \frac{\pi(2n-1)}{2h}$; $X_n = \sin\frac{\pi(2n-1)x}{2h}$
5	Смешанная	$X'_x = 0$ при $x = 0$, $X = 0$ при $x = h$	$\lambda_n = \frac{\pi(2n-1)}{2h}$; $X_n = \cos\frac{\pi(2n-1)x}{2h}$

Из соотношений (26) и (27) получим начальные условия для ОДУ с запаздыванием (22) при $\lambda = \lambda_n$ в виде

$$T_n(t) = \Phi_n(t), \quad -\tau \le t \le 0, \tag{29}$$

где функции $\Phi_n(t)$ задаются выражениями (28).

Введем обозначения

$$\alpha_n = c_1 - a_1 \lambda^2_n, \quad \beta_n = c_2 - a_2 \lambda^2_n,$$
$$\sigma_n = \beta_n \exp(-\alpha_n \tau). \tag{30}$$

Тогда, как показано в [72], решение задачи (22), (29) при $\lambda = \lambda_n$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} T_n(t) &= e^{\alpha_n(t+\tau)} \exp_d(\sigma_n t, \sigma_n \tau)\Phi_n(-\tau) + \\ &+ \int_{-\tau}^{0} e^{\alpha_n(t-s)} \exp_d(\sigma_n(t-\tau-s), \sigma_n\tau) \times \\ &\times \left[\Phi'_n(s) - \alpha_n \Phi_n(s)\right] ds. \end{aligned} \tag{31}$$

Здесь $\exp_d(t, \tau)$ – экспонента с запаздыванием, которая определяется как

$$\exp_d(t,\tau) \equiv \sum_{k=0}^{[t/\tau]+1} \frac{\left[t-(k-1)\tau\right]^k}{k!}, \tag{32}$$

где символ $[A]$ обозначает целую часть числа A, а индекс d указывает на запаздывание (от англ. *delay*).

Подставив (31) в (26), находим решение задачи (11)–(14):

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \Big\{ e^{\alpha_n(t+\tau)} \exp_d(\sigma_n t, \sigma_n\tau) \times \\ &\times \Phi_n(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} e^{\alpha_n(t-s)} \exp_d(\sigma_n(t-\tau-s), \sigma_n\tau) \times \\ &\times \left[\Phi'_n(s) - \alpha_n\Phi_n(s)\right] ds \Big\}, \end{aligned} \tag{33}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_n(t) &= \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^h \left[\varphi(\xi,t) - u_0(\xi,t)\right] X_n(\xi) d\xi, \\ \|X_n\|^2 &= \int_0^h X_n^2(\xi) d\xi. \end{aligned} \tag{34}$$

Для любой из пяти основных начально-краевых задач, граничные условия которых приведены в табл. 1, в формулы (33)–(34) следует подставить соответствующие собственные значения λ_n и собственные функции $X_n(x)$, представленные в табл. 2.

Решение задачи 2. Рассмотрим теперь линейное неоднородное УрЧП с запаздыванием (15)–(16) с однородными граничными и начальным условиями (17) и (18).

Сначала разложим неоднородную составляющую уравнения (15) в ряд по собственным функциям (24):

$$\begin{aligned} F(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) X_n(x), \\ F_n(t) &= \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^h F(\xi,t) X_n(\xi) d\xi, \end{aligned} \tag{35}$$

где функция $F(x, t)$ определяется формулой (16), а $\|X_n\|^2 = \int_0^h X_n^2(\xi) d\xi.$

Решение задачи (15)–(18) ищем в виде ряда

$$u_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) X_n(x), \tag{36}$$

который удовлетворяет однородным граничным условиям (17). Подставив (36) в (15) и учитывая (35), получим линейные неоднородные ОДУ с запаздыванием для функций $U_n(t)$:

$$\begin{aligned} U'_n(t) &= (c_1 - a_1\lambda^2_n)\, U_n(t) + \\ &+ (c_2 - a_2\lambda^2_n)\, U_n(t-\tau) + F_n(t), \end{aligned} \tag{37}$$

где функции $F_n(t)$ находятся с помощью второй формулы в (35). Для завершения формулировки задачи уравнения (37) дополним однородными начальными условиями

$$U_n(t) = 0, \; -\tau \le t \le 0, \tag{38}$$

которые следуют из (18) и (36).

Решение задачи (37)–(38) в области $t \ge 0$ можно представить в виде интеграла [72]:

$$\begin{aligned} U_n(t) &= \int_0^t e^{\alpha_n(t-s)} \exp_d(\sigma_n(t-s), \sigma_n\tau) F_n(s) ds, \\ \sigma_n &= e^{-\alpha_n\tau}\beta_n, \end{aligned} \tag{39}$$

где параметры α_n и β_n определены в (30). Подставив (39) в (36), находим решение задачи (15)–(18):

$$\begin{aligned} u_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg[&\int_0^t e^{\alpha_n(t-s)} \exp_d(\sigma_n(t-s), \sigma_n\tau) \times \\ &\times F_n(s) ds \Bigg] X_n(x). \end{aligned} \tag{40}$$

Решение начально-краевой задачи (5)–(7) с любыми граничными условиями, представленными в табл. 1, можно получить, подставив функции (9), (33) и (40) в (8) и взяв функцию $u_0 = u_0(x, t)$ из табл. 1, а соответствующие собственные значения λ_n и собственные функции $X_n(x)$ из табл. 2.

Замечание 2. Можно показать, что при $a_1 > a_2 \geq 0$ и $c_1 = c_2 = 0$ все решения однородного реакционно-диффузионного уравнения с постоянным запаздыванием (3) (при $f \equiv 0$), удовлетворяющие однородным граничным условиям первого рода, стремятся к тривиальному решению при $t \to \infty$. При $a_2 > a_1 \geq 0$ тривиальное решение этой же начально-краевой задачи будет неустойчивым.

Замечание 3. В [57] рассматривались линейные начально-краевые задачи реакционно-диффузионного типа с запаздыванием с несколькими пространственными переменными.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 123021700057-0).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.

2. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972.

3. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.

4. *Глаголев М.В., Сабреков А.Ф., Гончаров В.М.* Дифференциальные уравнения с запаздыванием как математические модели динамики популяций // Динамика окружающей среды и глобальные изменения климата, 2018. Т. 9. № 2. С. 40–63.

5. *Кащенко С.А.* Исследование стационарных режимов дифференциально-разностного уравнения динамики популяции насекомых // Моделирование и анализ информационных систем, 2012. Т. 19. № 5. С. 18–34.

6. *Кащенко И.С., Кащенко С.А.* Динамика уравнения с двумя запаздываниями, моделирующая численность популяции // Известия вузов. ПНД, 2019. Т. 27. № 2. С. 21–38.

7. *Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Теория релаксационных колебаний для уравнения Хатчинсона // Мат. сборник, 2011. Т. 202. № 6. С. 51–82.

8. *Переварюха А.Ю.* Сценарий невынужденной деструкции популяции в модификации уравнения Хатчинсона // Владикавказский математический журнал, 2017. Т. 19. № 4. С. 58–69.

9. *Berezansky L., Braverman E., Idels L.* Nicholson's blowflies differential equations revisited: Main results and open problems // Appl. Math. Modelling, 2010. V. 34. P. 1405–1417.

10. *Kuang Y.* Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. San Diego: Academic Press, 2012.

11. *Бочаров Г.А., Марчук Г.И.* Прикладные проблемы математического моделирования в иммунологии // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2000. Т. 40. № 12. С. 1905–1920.

12. *Воропаева О.Ф., Козлова А.О., Сенотрусова С.Д.* Численный анализ перехода от уравнения с запаздыванием к системе ОДУ в математической модели сети онкомаркеров // Вычислительные технологии, 2016. Т. 21. № 2. С. 12–25.

13. *Кубышкин Е.П., Морякова А.Р.* Бифуркации периодических решений уравнения Мэкки–Гласса // Моделирование и анализ информационных систем, 2016. Т. 23. № 6. С. 784–803.

14. *Gourley S.A., Kuang Y., Nagy J.D.* Dynamics of a delay differential equation model of hepatitis B virus infection // J. Biol. Dynam., 2008. V. 2. № 2. P. 140–153.

15. *Liu B.* New results on the positive almost periodic solutions for a model of hematopoiesis // Nonlinear Anal. Real World Appl., 2014. V. 17. P. 252–264.

16. *Schiesser W.E.* Time Delay ODE/PDE Models: Applications in Biomedical Science and Engineering. Boca Raton: CRC Press, 2019.

17. *Виницкий С.И., Гусев А.А., Дербов В.Л., Красовицкий П.М., Пеньков Ф.М., Чулуунбаатар Г.* Редуцированная модель *SIR* пандемии COVID-19 // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2021. Т. 61. № 3. С. 400–412.

18. *Перцев Н.В., Логинов К.К., Топчий В.А.* Анализ математической модели эпидемии, построенной на основе дифференциальных уравнений с запаздыванием // Сибирский журнал индустриальной математики, 2020. Т. 23 № 2. С. 119–132.

19. *Guglielmi N., Iacomini E., Viguerie A.* Delay differential equations for the spatially resolved simulation of epidemics with specific application to COVID-19 // Math. Meth. Appl. Sci., 2022. V. 45. № 8. P. 4752–4771.

20. *Кильматов Т.Р.* Временной лаг как фактор потери устойчивости экономической системы // Экономика и математические методы, 2013. Т. 49. № 3. С. 120–122.

21. *Chen X., Liu H., Xu Ch.* The new result on delayed finance system // Nonlinear Dyn., 2014. V. 78. P. 1989–1998.

22. *Zhang X., Zhu H.* Hopf bifurcation and chaos of a delayed finance system // Complexity, 2019. V. 2019. 6715036.

23. *Suarez M.J., Schopf P.S.* A delayed action oscillator for ENSO // J. Atmos. Sci., 1988. V. 45. P. 3283–3287.

24. *Kalmar-Nagy T., Stepan G., Moon F.C.* Subcritical HOPF bifurcation in the delay equation model for

machine tool vibrations // Nonlinear Dyn., 2001. V. 26. P. 121–142.

25. *Кащенко И.С., Кащенко С.А.* Локальная динамика модели полупроводникового лазера с запаздыванием // ТМФ, 2023. Т. 215. № 2. С. 232–241.

26. *Кащенко С.А., Майоров В.В., Майорова Н.Л.* Анализ колебательных процессов в сети импульсных нейронов // Вестник НИЯУ МИФИ, 2018. Т. 7, № 2. С. 138–162.

27. *Arik S.* Global asymptotic stability of a larger class of neural networks with constant time delay // Phys. Lett. A, 2003. V. 311. P. 504–511.

28. Wu J., Campbell S. A., Belair J. Time-delayed neural networks: stability and oscillations. In: Encyclopedia of Computational Neuroscience. P. 2966–2972. New York: Springer, 2015.

29. Zhao H. Exponential stability and periodic oscillatory of bidirectional associative memory neural network involving delays // Neurocomputing, 2006. V. 69. P. 424–448.

30. *Полянин А.Д., Сорокин В.Г.* Реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием: математические модели и качественные особенности // Вестник НИЯУ МИФИ, 2017. Т. 6. № 1. С. 41–55.

31. *Wu J.* Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. New York: Springer, 1996.

32. *Wu J., Zou X.* Traveling wave fronts of reaction-diffusion systems with delay // J. Dyn. Differ. Equ., 2001. V. 13. № 3. P. 651–687.

33. *Cohen D.S., Rosenblat S.* Multi-species interactions with hereditary effects and spatial diffusion // J. Math. Biol., 1979. V. 7. P. 231–241.

34. *Murray J.D.* Mathematical Biology, 3rd ed. New York: Springer, 2002.

35. *Britton N.F.* Reaction-Diffusion Equations and Their Applifations to Biology. New York: Academic Press, 1986.

36. *Cantrell R.S., Cosner C.* Spatial Ecology via Reaction Diffusion Equations. Chichester: John Wiley & Sons, 2003.

37. *Gourley S.A, So J. W.-H., Wu J.H.* Nonlocality of reaction-diffusion equations induced by delay: biological modeling and nonlinear dynamics // J. Math. Sci., 2004. V. 124. № 4. P. 5119–5153.

38. *Алешин С.В., Глызин С.Д., Кащенко С.А.* Уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова с запаздыванием // Моделирование и анализ информационных систем, 2015. Т. 2. № 2. С. 304–321.

39. *Горюнов В.Е.* Динамика решений логистического уравнения с запаздыванием и диффузией в плоской области // ТМФ, 2022. Т. 212. № 2. С. 234–256.

40. *Huang J., Zou X.* Traveling wavefronts in diffusive and cooperative Lotka Volterra system with delays // J. Math. Anal. Appl., 2002. V. 271. P. 455–466.

41. *Song Y., Jiang H., Yuan Yu.* Turing-hopf bifurcation in the reaction-diffusion system with delay and application to a diffusive predator-prey model // J. Appl. Anal. Comput., 2019. V. 9. № 3. P. 1132–1164.

42. *Trofimchuk E., Tkachenko V., Trofimchuk S.* Slowly oscillating wave solutions of a single species reaction-diffusion equation with delay // J. Differ. Equ., 2008. V. 245. P. 2307–2332.

43. *Тасевич А.Л., Бочаров Г.А., Вольперт В.А.* Уравнения реакции – диффузии в имунологии // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2018. Т. 58. № 12. С. 2048–2059.

44. *Hattaf K., Yous N.* A generalized HBV model with diffusion and two delays // Comput. Math. Appl., 2015. V. 69. №1 . P. 31–40.

45. *Jia Yu.* Bifurcation and pattern formation of a tumor immune model with time-delay and diffusion // Math. Comput. Simul., 2020. V. 178. P. 92–108.

46. *Pan X., Shu H., Wang L., Wang X.-S.* Dirichlet problem for a delayed diffusive hematopoiesis model // Nonlinear Anal.: Real World Appl. 2019. V. 48. P. 493–516.

47. *Piotrowska M.J., Forys U.* A simple model of carcinogenic mutations with time delay and diffusion // Math. Biosci. Eng., 2013. V. 10. № 3. P. 861–872.

48. *Ramirez-Carrasco C., Molina-Garay J.* Existence and approximation of traveling wavefronts for the diffusive Mackey – Glass equation // Aust. J. Math. Anal. Appl., 2021. V. 18. № 1. P. 1–12.

49. *Cheng Y., Lu D., Zhou J., Wei J.* Existence of traveling wave solutions with critical speed in a delayed diffusive epidemic model // Adv. Differ. Equ., 2019. 494.

50. *Liu P.-P.* Periodic solutions in an epidemic model with diffusion and delay // Appl. Math. Comput., 2015. V. 265. P. 275–291.

51. *Zhu C.-C., Zhu J.* Dynamic analysis of a delayed COVID-19 epidemic with home quarantine in temporal-spatial heterogeneous via global exponential attractor method // Chaos Solit. Fractals, 2021. V. 143. 110546.

52. *Trofimchuk E., Pinto M., Trofimchuk S.* Traveling waves for a model of the Belousov–Zhabotinsky reaction // J. Differ. Equ., 2013. V. 254. P. 3690–3714.

53. *Zhang G.-B.* Asymptotics and uniqueness of traveling wavefronts for a delayed model of the Belousov Zhabotinsky reaction // Applicable Analysis, 2020. V. 99. № 10. P. 1639–1660.

54. *Cao Ya., Cao Yu., Guo Zh., Huang T., Wen Sh.* Global exponential synchronization of delayed memristive neural networks with reaction-diffusion terms // Neural Networks, 2020. V. 123. P. 70–81.

55. *Wang K., Teng Z., Jiang H.* Global exponential synchronization in delayed reaction-diffusion cellular neural networks with the Dirichlet boundary conditions // Math. Comput. Model, 2010. V. 52. P. 12–24.

56. *Yang Z., Xu D.* Global dynamics for non-autonomous reaction-diffusion neural networks with time-varying delays // Theor. Comput. Sci., 2008. V. 403. P. 3–10.

57. *Полянин А.Д., Сорокин В.Г., Журов А.И.* Дифференциальные уравнения с запаздыванием: Свойства, методы, решения и модели. М.: ИПМех РАН, 2022.

58. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2014. V. 19. № 3. P. 417–430.

59. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coeffients // Int. J. Non-Linear Mech., 2014. V. 67. P. 267–277.

60. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Exact solutions of linear and nonlinear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time // Int. J. Non-Linear Mech., 2013. V. 54. P. 115–126.

61. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Exact separable solutions of delay reaction-diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2014. V. 19. № 3. P. 409–416.

62. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* New generalized and functional separable solutions to nonlinear delay reaction-diffusion equations // Int. J. Non-Linear Mech., 2014. V. 59. P. 16–22.

63. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Nonlinear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coeffients: Exact methods and new solutions // Appl. Math. Lett., 2014. V. 37. P. 43–48.

64. *Meleshko S.V., Moyo S.* On the complete group classiffication of the reaction-diffusion equation with a delay // J. Math. Anal. Appl., 2008. V. 338. P. 448–466.

65. *Полянин А.Д., Сорокин В.Г.* Построение точных решений нелинейных уравнений математической физики с запаздыванием с помощью решений более простых уравнений без запаздывания // Вестник НИЯУ МИФИ, 2020. Т. 9, № 2. С.115–128.

66. *Полянин А.Д., Сорокин В.Г.* Нелинейные реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием: Точные решения типа бегущей волны // Вестник НИЯУ МИФИ, 2015. Т. 4, № 2. С. 119–126.

67. *Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E.* Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists, 2nd ed. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2016.

68. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.

69. *Martin J.A., Rodriguez F., Company R.* Analytic solution of mixed problems for the generalized diffusion equation with delay // Math. Comput. Modelling, 2004. V. 40. P. 361–369.

70. *Reyes E., Rodriguez F., Martin J.A.* Analytic-numerical solutions of diffusion mathematical models with delays // Comput. Math. Appl., 2008. V. 56. P. 743–753.

71. *Khusainov D.Y., Ivanov A.F., Kovarzh I.V.* Solution of one heat equation with delay // Nonlinear Oscillations, 2009. V. 12. № 2. P. 260–282.

72. *Khusainov D.Y., Pokojovy M., Azizbayov E.I.* On classical solvability for a linear 1D heat equation with constant delay // Konstanzer Schriften in Mathematik, 2013. № 316.

73. *Khusainov D., Pokojovy M., Reinhard R.* Strong and mild extrapolated L^2-solutions to the heat equation with constant delay // SIAM J. Math. Anal., 2015. V. 47. № 1. P. 427–454.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta «MIFI», 2023, vol. 12, no. 3, pp. 153–164

SOLUTIONS OF LINEAR INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF REACTION-DIFFUSION TYPE WITH DELAY

A.D. Polyanin*, V.G. Sorokin**

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia

**e-mail: polyanin@ipmnet.ru*

***e-mail: vsesor@gmail.com*

Received June 20, 2023; revised June 21, 2023; accepted July 26, 2023

Linear one-dimensional equations of reaction-diffusion type with a constant delay are considered. Exact solutions of such equations are described, which are expressed in elementary functions. Closed-form solutions are obtained for the corresponding initial-boundary value problems with common initial data and boundary conditions of the first, second, and third kind, as well as mixed boundary conditions.

Keywords: linear reaction-diffusion equations, partial differential equations with delay, initial-boundary value problems, closed-form solutions, exact solutions.

REFERENCES

1. *Bellman R., Cooke K.L.* Differencial'no-raznostnye uravneniya [Differential-difference equations]. Moscow, Mir Publ., 1967.

2. *Myshkis A.D.* Linejnye dfferencial'nye uravnenija s zapazdyvajushhim argumentom [Linear Differential Equations with Retarded Arguments]. Moscow, Nauka Publ., 1972.

3. *Elsgolt's L.E., Norkin S.B.* Vvedenie v teoriyu differencial'nyh uravnenij s otklonyayushchimsya argumentom [Introduction to the Theory and Application of Differential Equations With Deviating Arguments]. Moscow, Nauka Publ., 1971.

4. *Glagolev M.V., Sabrekov A.F., Gonharov V.M.* Differencial'nye uravnenija s zapazdyvaniem kak matematiheskie modeli dinamiki populjacij [Delay differential equations as a tool for mathematical modelling of population dynamic]. Dinamika okruzhajushhej sredy i global'nye izmenenija klimata, 2018. Vol. 9. No. 2. Pp. 40–63 (in Russian).

5. *Kashchenko S.A.* Issledovanie stacionarnykh rezhimov differencial'no-raznostnogo uravnenija dinamiki populjacii nasekomykh [Stationary states of a delay differential equation of insect population's dynamics]. Modelirovanie i analiz informacionnykh sistem, 2021. Vol. 19. No. 5. Pp. 18–34 (in Russian).

6. *Kashchenko I.S., Kashchenko S.A.* Dinamika uravnenija s dvumja zapazdyvanijami, modelirujushhego chislennost' populjacii [Dynamics of equation with two delays modelling the number of population]. Izvestija vuzov. PND, 2019. Vol. 27. No. 2. Pp. 21–38 (in Russian).

7. *Kolesov A.Yu., Rozov N.Kh*. The theory of relaxation oscillations for Hutchinson's equation. Sbornik: Mathematics, 2011. Vol. 202. No. 6. Pp. 829–858.

8. *Perevarukha A.Yu*. Scenarij nevynuzhdennoj destrukcii populjacii v modifikacii uravnenija Khatchinsona [Scenario of involuntary destruction of a population in a modified Hutchinson equation]. Vladikavkazskij matematicheskij zhurnal, 2017. Vol. 19. No. 4. Pp. 58–69 (in Russian).

9. *Berezansky L., Braverman E., Idels L*. Nicholson's blowflies differential equations revisited: Main results and open problems. Appl. Math. Modelling, 2010. Vol. 34. Pp. 1405–1417.

10. *Kuang Y.* Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. San Diego, Academic Press, 2012.

11. *Bocharov G.A., Marchuk G.I.* Prikladnye problemy matematicheskogo modelirovanija v immunologii [Applied problems of mathematical modeling in immunology]. Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki, 2000. Vol. 40. No. 12. Pp. 1905–1920 (in Russian).

12. *Voropaeva O.F., Kozlova A.O., Senotrusova S.D.* Chislennyj analiz perekhoda ot uravnenija s zapazdyvaniem k sisteme ODU v matematicheskoj modeli seti onkomarkerov [Numerical analysis of the transition from the equation with retarded argument to the ODE system in a mathematical model of the tumor markers network. Vyhislitel'nye tekhnologii, 2016. Vol. 21. No. 2. Pp. 12–25 (in Russian).

13. *Kubyshkin E.P., Moryakova A.R.* Bifurkacii periodicheskikh reshenij uravnenija Mehkki – Glassa [Bifurcation of Periodic Solutions of the Mackey Glass – Equation]. Modelirovanie i analiz informacionnykh sistem, 2016. Vol. 23. No. 6. Pp. 784–803 (in Russian).

14. *Gourley S.A., Kuang Y., Nagy J.D*. Dynamics of a delay differential equation model of hepatitis B virus infection. J. Biol. Dynam., 2008. Vol. 2. No. 2. Pp. 140–153.

15. *Liu B.* New results on the positive almost periodic solutions for a model of hematopoiesis. Nonlinear Anal. Real World Appl., 2014. Vol. 17. Pp. 252–264.

16. *Schiesser W.E.* Time Delay ODE/PDE Models: Applications in Biomedical Science and Engineering. Boca Raton, CRC Press, 2019.

17. *Vinitsky S.I., Gusev A.A., Chuluunbaatar G., Derbov V.L., Krassovitskiy P.M., Pen'kov F.M*. Reduced SIR model of COVID-19 pandemic. Comput. Math. Math. Phys., 2021. Vol. 61. No. 3. Pp. 376–387.

18. *Pertsev N.V., Loginov K.K., Topchii V.A.* Analysis of an epidemic mathematical model based on delay differential equations. J. Appl. Industr. Math., 2020. Vol. 14. No. 2. Pp. 396–406.

19. *Guglielmi N., Iacomini E., Viguerie A.* Delay differential equations for the spatially resolved simulation of epidemics with specific application to COVID-19. Math. Meth. Appl. Sci., 2022. V. 45. № 8. P. 4752–4771.

20. *Kil'matov T.R.* Vremennoj lag kak faktor poteri ustojchivosti ehkonomicheskoj sistemy [Time-Lag as a factor of loosing of the economic system]. Ehkonomika i matematicheskie metody, 2013. Vol. 49. No. 3. Pp. 120–122 (in Russian).

21. *Chen X., Liu H., Xu Ch.* The new result on delayed finance system. Nonlinear Dyn., 2014. Vol. 78. Pp. 1989–1998.

22. *Zhang X., Zhu H.* Hopf bifurcation and chaos of a delayed finance system. Complexity, 2019. Vol. 2019, 6715036.

23. *Suarez M.J., Schopf P.S.* A delayed action oscillator for ENSO. J. Atmos. Sci., 1988. Vol. 45. Pp. 3283–3287.

24. *Kalmar-Nagy T., Stepan G., Moon F.C.* Subcritical HOPF bifurcation in the delay equation model for machine tool vibrations. Nonlinear Dyn., 2001. Vol. 26. Pp. 121–142.

25. *Kashchenko I.S., Kashchenko S.A.* Local dynamics of the model of a semiconductor laser with delay. Theoret. Math. Phys., 2023. Vol. 215. No. 2. Pp. 658–666.

26. *Kashchenko S.A., Mayorov V.V., Mayorova N.L.* Analiz kolebatel'nykh processov v seti impul'snykh nejronov [Analysis of oscillating processes in a spiking neural network]. Vestnik NIYaU MIFI, 2018. Vol. 7. No. 2. Pp. 138–162 (in Russian).

27. *Arik S.* Global asymptotic stability of a clarger lass of neural networks with constant time delay. Phys. Lett. A, 2003. Vol. 311. Pp. 504–511.

28. *Wu J., Campbell S.A., Belair J.* Time-delayed neural networks: stability and oscillations. In: Encyclopedia of Computational Neuroscience. Pp. 2966–2972. New York, Springer, 2015.

29. *Zhao H.* Exponential stability and periodic oscillatory of bidirectional associative memory neural network involving delays. Neurocomputing, 2006. Vol. 69. Pp. 424–448.

30. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Reakcionno-diffuzionnye uravnenija s zapazdyvaniem: Matematicheskie modeli i kachestvennye osobennosti [Reaction diffusion equations with delay: Mathematical models and qualitative features]. Vestnik NIYaU MIFI, 2017. Vol. 6. No. 1. Pp. 41–55 (in Russian).

31. *Wu J.* Theory and Applications of Partial Functional Dfferential Equations. New York, Springer, 1996.

32. *Wu J., Zou X.* Traveling wave fronts of reaction-diffusion systems with delay. J. Dynamics Differ. Equ., 2001. Vol. 13. No. 3. Pp. 651–687.

33. *Cohen D.S., Rosenblat S.* Multi-species interactions with hereditary effects and spatial diffusion. J. Math. Biol., 1979. Vol. 7. Pp. 231–241.

34. *Murray J.D.* Mathematical Biology, 3-rd ed. New York, Springer, 2002.

35. *Britton N.F.* Reaction-Diffusion Equations and Their Applications to Biology. New York, Academic Press, 1986.

36. *Cantrell R.S., Cosner C.* Spatial Ecology via Reaction Diffusion Equations. Chichester, John Wiley & Sons, 2003.

37. *Gourley S.A, So J. W.-H., Wu J.H.* Nonlocality of reaction-diffusion equations induced by delay: biological modeling and nonlinear dynamics. J. Math. Sci., 2004. Vol. 124. No. 4. Pp. 5119–5153.

38. *Aleshin S.V., Glyzin S.D., Kaschenko S.A.* Uravnenie Kolmogorova – Petrovskogo – Piskunova s zapazdyvaniem [Fisher Kolmogorov – Petrovskii–Piscounov equation with delay. Model. Anal. Inform. Sist., 2015. Vol. 2. No. 2. Pp. 304–321 (in Russian).

39. *Goryunov V.E.* Dynamics of solutions of logistic equation with delay and diffusion in a planar domain. Theor. Math. Phys., 2022. Vol. 212. No. 2. Pp. 1092–1110.

40. *Huang J., Zou X.* Traveling wavefronts in diffusive and cooperative Lotka–Volterra system with delays. J. Math. Anal. Appl., 2002. Vol. 271. Pp. 455–466.

41. *Song Y., Jiang H., Yuan Yu.* Turing- hopf bifurcation in the reaction-diffusion system with delay and application to a diffusive predator-prey model. J. Appl. Anal. Comput., 2019. Vol. 9. No. 3. Pp. 1132–1164.

42. *Trofimchuk E., Tkachenko V., Trofimchuk S.* Slowly oscillating wave solutions of a single species reaction-diffusion equation with delay. J. Differ. Equ., 2008. Vol. 245. Pp. 2307–2332.

43. *Bocharov G.A., Volpert V.A., Tasevich A.L.* Reaction diffusion equations in immunology. Comput. Math. Math. Phys., 2018. Vol. 58. Pp. 1967–1976.

44. *Hattaf K., Yousfi N.* A generalized HBV model with diffusion and two delays. Comput. Math. Appl., 2015. Vol. 69. No. 1. Pp. 31–40.

45. *Jia Yu.* Bifurcation and pattern formation of a tumor immune model with time-delay and diffusion. Math. Comput. Simul., 2020. Vol. 178. Pp. 92–108.

46. *Pan X., Shu H., Wang L., Wang X.-S.* Dirichlet problem for a delayed diffusive hematopoiesis model. Nonlinear Anal.: Real World Appl., 2019. Vol. 48. Pp. 493–516.

47. *Piotrowska M.J., Forys U.* A simple model of carcinogenic mutations with time delay and diffusion. Math. Biosci. Eng., 2013. Vol. 10. No. 3. Pp. 861–872.

48. *Ramirez-Carrasco C., Molina-Garay J.* Existence and approximation of traveling wavefronts for the diffusive Mackey – Glass equation. Aust. J. Math. Anal. Appl., 2021. Vol. 18. No. 1. Pp. 1–12.

49. *Cheng Y., Lu D., Zhou J., Wei J.* Existence of traveling wave solutions with critical speed in a delayed diffusive epidemic model. Adv. Differ. Equ., 2019, 494.

50. *Liu P.-P.* Periodic solutions in an epidemic model with diffusion and delay. Appl. Math. Comput., 2015. Vol. 265. Pp. 275–291.

51. *Zhu C.-C., Zhu J.* Dynamic analysis of a delayed COVID-19 epidemic with home quarantine in temporal-spatial heterogeneous via global exponential attractor method. Chaos Solit. Fractals, 2021. Vol. 143, 110546.

52. *Trofimchuk E., Pinto M., Trofimchuk S.* Traveling waves for a model of the Belousov – Zhabotinsky reaction. J. Differ. Equ., 2013. Vol. 254. Pp. 3690–3714.

53. *Zhang G.-B.* Asymptotics and uniqueness of traveling wavefronts for a delayed model of the Belousov–Zhabotinsky reaction. Applicable Analysis, 2020. Vol. 99. No. 10. Pp. 1639–1660.

54. *Cao Ya., Cao Yu., Guo Zh., Huang T., Wen Sh.* Global exponential synchronization of delayed memristive neural networks with reaction-diffusion terms. Neural Networks, 2020. Vol. 123. Pp. 70–81.

55. *Wang K., Teng Z., Jiang H.* Global exponential synchronization in delayed reaction-diffusion cellular neural networks with the Dirichlet boundary conditions. Math. Comput. Model., 2010. Vol. 52. Pp. 12–24.

56. *Yang Z., Xu D.* Global dynamics for non-autonomous reaction-diffusion neural networks with time-varying delays. Theor. Comput. Sci., 2008. Vol. 403. Pp. 3–10.

57. *Polyanin A.D., Sorokin V.G., Zhurov A.I.* Differential equations with delay: Properties, methods, solutions and models. Moscow, IPMech RAS Publ., 2022.

58. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2014. Vol. 19. No. 3. Pp. 417–430.

59. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction diffusion equations with varying transfer coeffcients. Int. J. Non-Linear Mech., 2014. Vol. 67. Pp. 267–277.

60. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Exact solutions of linear and nonlinear differential-difference heat and dif-

fusion equations with finite relaxation time. Int. J. Non-Linear Mech., 2013. Vol. 54. Pp. 115–126.

61. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Exact separable solutions of delay reaction-diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2014. Vol. 19. No. 3. Pp. 409–416.

62. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* New generalized and functional separable solutions to nonlinear delay reaction diffusion equations. Int. J. Non-Linear Mech., 2014. Vol. 59. Pp. 16–22.

63. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Nonlinear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coeffients: Exact methods and new solutions. Appl. Math. Lett., 2014. Vol. 37. Pp. 43–48.

64. *Meleshko S.V., Moyo S.* On the complete group classification of the reaction-diffusion equation with a delay. J. Math. Anal. Appl., 2008. Vol. 338. Pp. 448–466.

65. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Postroenie tochnykh reshenij nelinejnykh uravnenij matematicheskoj fiziki s zapazdyvaniem s pomoshh'ju reshenij bolee prostykh uravnenij bez zapazdyvanija [Construction of exact solutions for nonlinear equations of mathematical physics with delay using solutions of simpler equations without delay]. Vestnik NIYaU MIFI, 2020. Vol. 9. No. 2. Pp. 115–128 (in Russian).

66. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Nelinejnye reakcionno-diffuzionnye uravnenija s zapazdyvaniem: Tochnye reshenija tipa begushhej Volny [Nonlinear delay reaction diffusion equations: Exact traveling wave solutions]. Vestnik NIYaU MIFI, 2015. Vol. 4. No. 2. Pp. 119–126 (in Russian).

67. *Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E.* Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists, 2nd ed. Boca Raton, Chapman & Hall/CRC Press, 2016.

68. *Tikhonov A.N., Samarskii A.A*. Equations of Mathematical Physics. New York, Dover Publ., 1990.

69. *Martin J.A., Rodriguez F., Company R.* Analytic solution of mixed problems for the generalized diffusion equation with delay. Math. Comput. Modelling, 2004. Vol. 40. Pp. 361–369.

70. *Reyes E., Rodriguez F., Martin J.A.* Analytic-numerical solutions of diffusion mathematical models with delays. Comput. Math. Appl., 2008. Vol. 56. Pp. 743–753.

71. *Khusainov D.Y., Ivanov A.F., Kovarzh I.V.* Solution of one heat equation with delay. Nonlinear Oscillations, 2009. Vol. 12. No. 2. Pp. 260–282.

72. *Khusainov D.Y., Pokojovy M., Azizbayov E.I.* On classical solvability for a linear 1D heat equation with constant delay. Konstanzer Schriften in Mathematik, 2013. No. 316.

73. *Khusainov D., Pokojovy M., Reinhard R.* Strong and mild extrapolated L^2-solutions to the heat equation with constant delay. SIAM J. Math. Anal., 2015. Vol. 47. No. 1. Pp. 427–454.