

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.95

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ:
СВОЙСТВА, МЕТОДЫ, РЕШЕНИЯ И МОДЕЛИ**

*А.В. Аксенов**

*Механико-математический факультет, Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова, Москва, 119991, Россия*

**e-mail: aksenov@mech.math.msu.su*

Поступила в редакцию: 29.05.2023

После доработки: 30.05.2023

Принята к публикации: 08.06.2023

Рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных с постоянным и переменным запаздыванием. Излагаются точные, приближенные аналитические и численные методы решения таких уравнений. Описаны наиболее распространенные математические модели с запаздыванием, используемые в теории популяций, биологии, медицине и других приложениях.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения с запаздыванием, уравнения в частных производных с запаздыванием, аналитические методы, численные методы, точные решения, математические модели с запаздыванием, пропорциональное и переменное запаздывание.

DOI: 10.26583/vestnik.2023.287

В 2022 г. в издательстве Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН вышла в свет книга А.Д. Полянина, В.Г. Сорокина, А.И. Журова «Дифференциальные уравнения с запаздыванием: Свойства, методы, решения и модели» [1].

Линейные и нелинейные дифференциальные уравнения (обыкновенные и в частных производных) с запаздыванием часто используются для математического моделирования явлений и процессов в различных областях теоретической физики, механики, теории управления, биологии, биофизики, биохимии, медицины, экологии, экономики и в технических приложениях.

Отметим некоторые факторы, приводящие к необходимости вводить запаздывание в математические модели, описываемые дифференциальными уравнениями. В биологии и биомеханике запаздывание обусловлено ограниченной скоростью передачи нервных и мышечных реакций в живых тканях; в медицине – в задачах о распространении инфекционных заболеваний – время запаздывания определяется инкубационным периодом (промежуток времени от момента заражения до первых признаков проявления болезни); в динамике популяций запаздывание связано с тем, что особи участвуют в репродукции лишь после достижения определенного возраста; в теории управления запаздывание обычно связано с конечной скоростью распро-

странения сигнала и ограниченной скоростью технологических процессов.

Наличие запаздывания в математических моделях и дифференциальных уравнениях является осложняющим фактором, который, как правило, приводит к сужению области устойчивости получаемых решений. Исследование и решение обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с запаздыванием по сложности сопоставимы с исследованием и решением уравнений в частных производных (УрЧП) без запаздывания.

В книге описаны качественные особенности дифференциальных уравнений с запаздыванием, и сформулированы для них типичные постановки задач с начальными данными и начально-краевыми задачами. Излагаются точные, приближенные аналитические и численные методы решения таких уравнений. Помимо дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием исследуются уравнения с пропорциональным запаздыванием (типа пантографа), а также более сложные уравнения с переменным запаздыванием общего вида или несколькими запаздываниями. Изложение теоретического материала сопровождается примерами практического применения рассматриваемых методов для получения искомых решений.

Дан обзор наиболее распространенных математических моделей с запаздыванием, ис-

пользуемых в теории популяций, биологии, медицине и других приложениях.

Приведены аналитические решения линейных задач типа Коши для ОДУ и систем ОДУ первого и второго порядка с постоянным и пропорциональным запаздыванием. Рассмотрены некоторые классы нелинейных ОДУ первого порядка с запаздыванием, которые допускают линеаризацию или точные решения. Обсуждаются вопросы устойчивости и неустойчивости решений ОДУ с запаздыванием.

Описаны наиболее распространенные аналитические и численные методы решения задач с начальными данными и краевых задач для ОДУ с постоянным и переменным запаздыванием (метод шагов, методы интегральных преобразований, метод регулярного разложения по малому параметру, метод сращиваемых асимптотических разложений, методы итерационного типа, метод разложения Адомиана, метод гомотопического анализа, метод коллокаций, проекционные методы типа Галеркина, методы Эйлера и Рунге – Кутты, метод стрельбы, методы, основанные на использовании пакета Mathematica и др.).

Методом разделения переменных получены решения в виде рядов Фурье по пространственным переменным линейных начально-краевых задач для УрЧП параболического и гиперболического типов с постоянным и пропорциональным запаздыванием и различными граничными условиями. Излагаются также численные методы решения начально-краевых задач для линейных и нелинейных УрЧП с запаздыванием. Наибольшее внимание уделено методу прямых, который базируется на сведении УрЧП с запаздыванием к системе ОДУ с запаздыванием. Рассмотрены конечно-разностные методы, основанные на неявной схеме, схеме с весами, схеме повышенного порядка точности и др. Обсуждается также метод декомпозиции области по времени, который обобщает метод шагов, используемый для решения ОДУ с запаздыванием. Сформулированы основные принципы построения и выбора тестовых задач, предназначенных для проверки адекватности и оценки точности численных и приближенных аналитических методов решения УрЧП с запаздыванием.

Общее решение нелинейных УрЧП с запаздыванием не удается найти даже в простейших случаях. Поэтому при исследовании таких уравнений обычно приходится ограничиваться поиском и анализом их частных решений,

которые принято называть точными решениями.

В данной книге большое внимание уделено описанию и практическому применению методов построения точных решений нелинейных уравнений математической физики с запаздыванием (методы обобщенного и функционального разделения переменных, метод функциональных связей, метод порождающих уравнений, принцип аналогии решений и др.). Важно отметить, что подавляющее большинство аналитических методов, которые успешно позволяют находить точные решения нелинейных уравнений с частными производными без запаздывания, либо вообще неприменимы для построения точных решений нелинейных УрЧП с постоянным или переменным запаздыванием, либо имеют весьма ограниченную область применимости. Уравнения математической физики с двумя независимыми переменными и запаздыванием имеют специфические качественные особенности: (i) УрЧП с постоянным запаздыванием не допускают автомодельных решений, которые весьма часто имеют УрЧП без запаздывания, (ii) УрЧП с пропорциональным запаздыванием по одной независимой переменной не имеют решений типа бегущей волны.

Рассмотрено много нелинейных реакционно-диффузионных и волновых уравнений с запаздыванием, которые зависят от одной или нескольких произвольных функций или содержат ряд свободных параметров. Такие уравнения наиболее сложны для анализа, а их точные решения могут использоваться для тестирования и оценки погрешности численных и приближенных аналитических методов решения соответствующих начально-краевых задач. Для удобства читателей авторы добавили в книгу справочное приложение, которое содержит обширные таблицы точных решений уравнений в частных производных с постоянным и переменным запаздыванием.

В целом, данная книга содержит много нового материала, который ранее в монографиях не публиковался. Основные результаты можно найти в статьях авторов [2–5].

Для максимального расширения круга потенциальных читателей с разной математической подготовкой авторы по возможности старались избегать использования специальной терминологии. Поэтому некоторые результаты описаны схематично и упрощенно, чего вполне достаточно для их практического применения. Многие разделы можно читать независимо друг

от друга, что облегчает работу с материалом. Подробное оглавление позволяет быстро находить необходимую информацию.

Автор считает, что книга будет полезной для широкого круга научных работников, преподавателей вузов, аспирантов и студентов, специализирующихся в области прикладной и вычислительной математики, математической физики, механики, теории управления, биологии, биофизики, биохимии, медицины, химической технологии и экологии. Отдельные разделы книги, методы и примеры могут быть использованы в курсах лекций по прикладной математике, математической физике и функционально-дифференциальным уравнениям, для чтения спецкурсов и проведения практических занятий.

Отметим, что электронная версия книги находится в свободном доступе в интернете (https://eqworld.ipmnet.ru/Arts_Polyanin/Book_Polyanin_Sorokin_Zhurov_2022.pdf).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Полянин А.Д., Сорokin В.Г., Журов А.И.* Дифференциальные уравнения с запаздыванием: Свойства, методы, решения и модели. М.: ИПМех РАН, 2022.
2. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations. // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014. V. 19. № 3. Pp. 417–430.
3. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* New generalized and functional separable solutions to non-linear delay reaction-diffusion equations // *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2014. Vol. 59. Pp. 16–22.
4. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Nonlinear pantograph-type diffusion PDEs: Exact solutions and the principle of analogy. // *Mathematics*, 2021, V. 9. № 5. P. 511.
5. *Aksenov A.V., Polyanin A.D.* Methods for constructing complex solutions of nonlinear PDEs using simpler solutions // *Mathematics*, 2021. V. 9. № 4. P. 345.
6. *Aksenov A.V., Polyanin A.D.* Review of methods for constructing exact solutions of equations of mathematical physics based on simpler solutions. // *Theoretical and Mathematical Physics*, 2022. V. 211. № 2. Pp. 567–594.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta «MIFI», 2023, vol. 12, no. 3, pp. 187–190

DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DELAY: PROPERTIES, METHODS, SOLUTIONS AND MODELS

*A.V. Aksenov**

¹ *Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University,
Moscow, 119991, Russia*

**e-mail: aksenov@mech.math.msu.su*

Received May 29, 2023; revised May 30, 2023; accepted June 08, 2023

Ordinary differential equations and partial differential equations with constant and variable delay are considered. Exact, approximate analytical and numerical methods for solving such equations are presented. The most common mathematical models with delay used in population theory, biology, medicine and other applications are described.

Keywords: ordinary differential equations with delay, partial differential equations with delay, analytical methods, numerical methods, exact solutions, mathematical models with delay, proportional and variable delay.

REFERENCES

1. *Polyanin A.D., Sorokin V.G., Zhurov A.I.* *Differentsialnye uravneniya s zapazdyvaniem svojstva metodyresheniya i modeli* [Differential equations with delay: Properties, methods, solutions and models]. Moscow. Institute of Mechanics and Mathematics RAS Publ., 2022 [in Russian].
2. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014. Vol. 19. No. 3. Pp. 417–430.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ:
СВОЙСТВА, МЕТОДЫ, РЕШЕНИЯ И МОДЕЛИ

3. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* New generalized and functional separable solutions to non-linear delay reaction-diffusion equations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2014. Vol. 59. Pp. 16–22.

4. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Nonlinear pantograph-type diffusion PDEs: Exact solutions and the principle of analogy. *Mathematics*, 2021. Vol. 9. No. 5. P. 511.

5. *Aksenov A.V., Polyanin A.D.* Methods for constructing complex solutions of nonlinear PDEs using simpler solutions. *Mathematics*, 2021. Vol. 9. No. 4. P. 345.

6. *Aksenov A.V., Polyanin A.D.* Review of methods for constructing exact solutions of equations of mathematical physics based on simpler solutions. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2022. Vol. 211. No. 2. Pp. 567–594.