

УДК 517.91

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ЧАВИ–ВАДДИ–КОЛОКОЛЬНИКОВА

А.А. Кутуков*, Н.А. Кудряшов**

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

*e-mail: alexkutuk@gmail.com

**e-mail: nakudr@gmail.com

Поступила в редакцию 18.11.2023

После доработки: 18.11.2023

Принята к публикации: 23.11.2023

Рассматривается обобщенное уравнение Чави–Вадди–Колокольникова, которое описывает нелинейные физические и биологические процессы, в частности движение бактерий при воздействии раздражителей. Численное исследование модели проводится с использованием псевдоспектрального метода. Для тестирования программы применяются точные решения обобщенного уравнения Чави–Вадди–Колокольникова. Для численного моделирования используются начальные условия в виде периодических и уединенных волн, а также в виде белого шума. Приводятся графики результатов численного моделирования. Показано, что при различных значениях параметров модели происходит формирование периодических структур.

Ключевые слова: обобщенное уравнение Чави–Вадди–Колокольникова; численное моделирование; псевдоспектральный метод.

DOI: 10.26583/vestnik.2023.288

ВВЕДЕНИЕ

Важной задачей является нахождение условий формирования устойчивых периодических структур, описываемых эволюционными нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных. В данной работе при помощи методов численного моделирования исследуется задача для неинтегрируемого нелинейного дифференциального уравнения четвертого порядка, которое используется для описания процессов образования структуры в физических и биологических системах, например при моделировании движения колоний бактерий. Бактерии могут перемещаться под воздействием других бактерий или внешних раздражителей. Внешний раздражитель может быть, например, химический (хемотаксис [6, 7]) или световой (фототаксис [1, 13, 14]). Такое поведение бактерий можно описать с помощью дифференциальных уравнений [2, 6, 7, 11]. В работе [2] было предложено уравнение для описания концентрации бактерий, движение которых зависит от радиуса чувствительности. Это уравнение имеет вид

$$u_t + u_{xx} + u_{xxx} - \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x u_{xx}}{u} \right) = 0, \quad (1)$$

где $u(x, t)$ – функция, описывающая концентрацию бактерий; x и t – независимые переменные; α – параметр математической модели. Уравнение (1) называется уравнением Чави–Вадди–Колокольникова и является непрерывным расширением дискретной модели [5]. В работах [11, 12] проведено аналитическое исследование уравнения (1). В данной работе учитывается дисперсия и рассматривается обобщенное уравнение Чави–Вадди–Колокольникова [10]

$$u_t + u_{xx} + \sigma u_{xxx} + u_{xxxx} - \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x u_{xx}}{u} \right) = 0, \quad (2)$$

где $u(x, t)$ – функция, описывающая концентрацию бактерий; x и t – независимые переменные; α и σ – параметры математической модели. Уравнение (2) не проходит тест Пенлеве и задача Коши для этого уравнения не может быть решена методом обратной задачи рассеяния. Целью данной работы является численное исследование процесса формирования структур, описываемых уравнением (2).

ПСЕВДОСПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД
ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Рассматривается смешанная краевая задача следующего вида:

$$\begin{aligned} u_t &= L(u) + N(u), \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad u(x, t) = u(x + l, t), \end{aligned} \quad (3)$$

где L – линейный оператор; N – нелинейный оператор; $u_0(x)$ – начальное условие; l – период. Для уравнения (2) имеется

$$\begin{aligned} L(u) &= -u_{xx} \sigma u_{xxx} - u_{xxx}, \\ N(u) &= \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x u_{xx}}{u} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Для численного решения задачи (3) используется псевдоспектральный метод [3, 4, 15]. Применяется преобразование Фурье к задаче (3) и получается следующая задача Коши

$$v_t = \mathcal{L}(u) + \mathcal{N}(u), \quad v(k, 0) = v_0(k), \quad (5)$$

где v, v_0, \mathcal{L} и \mathcal{N} – преобразования Фурье u, u_0 ; L и N соответственно. Задачу Коши (5) можно решить с помощью метода Рунге-Кутты четвертого порядка с интегрирующим множителем [15]. Используя замену переменных

$$U = v e^{-\mathcal{L}t}, \quad (6)$$

где $e^{-\mathcal{L}t}$ – интегрирующий множитель, получаем после замены переменной (6) задачу

$$U_t = e^{-\mathcal{L}t} \mathcal{N}(U e^{\mathcal{L}t}), \quad U(k, 0) = v_0(k). \quad (7)$$

Интегрирующий множитель позволяет выбирать более крупный шаг по времени при сохранении такой же точности вычислений. Для верификации численного алгоритма в качестве начального условия выбирается точное решение [10]

$$u_{exact} = \frac{C e^{-km(x-\omega t-x_0)}}{(1 + e^{-k(x-\omega t-x_0)})^p}, \quad (8)$$

где C и x_0 – произвольные константы; k, m, p, ω зависят от σ и α [10]. Точное решение (8) найдено в работе [10] с помощью метода простейших уравнений [8] с использованием дифференциального уравнения для логистической функции [9] и линейного дифференциального уравнения первого порядка. Также при $\sigma = 0$ в качестве начального условия выбирается точное решение для стационарного случая уравнения (1)

$$u_{st, exact} = C \left[\operatorname{sech} \left(\frac{\sqrt{\alpha-1}}{2} x \right) \right]^{\frac{2}{\alpha-1}}. \quad (9)$$

Чтобы избежать деления на ноль в численном решении, к начальным условиям вида (8) и (9) добавляется значение $\varepsilon = 10^{-6}$. В качестве погрешности численного решения выбирается

$$\Delta u = \max_i \left| u_{num}^i - u_{exact}^i \right|, \quad (10)$$

где u_{num}^i – численное решение в узле пространственной сетки i , а u_{exact}^i – аналитическое решение в узле пространственной сетки i . Зависимость погрешности численного решения от времени для уравнения (2) приводится на рис. 1. Из рисунка видно, что погрешность вычислений не превышает 5×10^{-5} . На рис. 2 показан график погрешности численного решения от времени при $\alpha = 1.5, \sigma = 0$. Установлено, что численное решение соответствует точному решению (8), а погрешность при расчетах до времени $t = 100$ не превышает 9.0×10^{-6} .

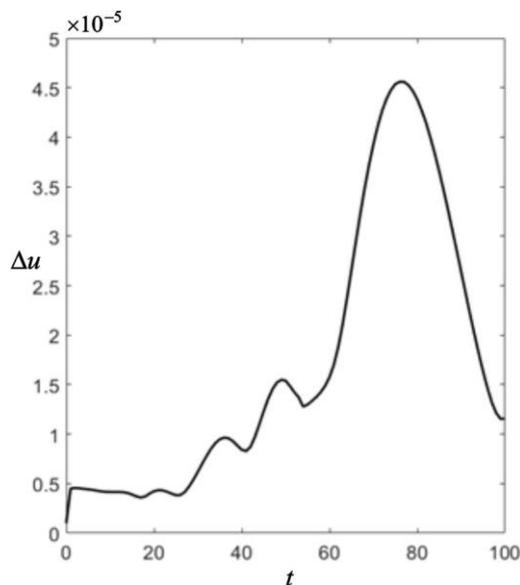


Рис. 1. График погрешности вычислений Δu от времени t при $\alpha = 1.5, \sigma = 1$

При выполнении численных экспериментов осуществляется контроль за сохраняющейся величиной $\int_{-\infty}^{\infty} u dx = \text{const}$. При выборе начального условия в виде точного решения (8) относительное изменение сохраняющейся величины не превышало 1.0×10^{-6} за время $t = 1000$. Полученные результаты позволяют сделать вывод о корректной работе численного алгоритма.

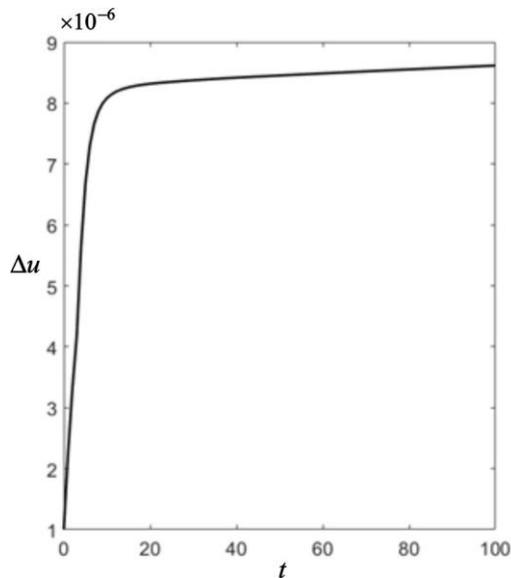


Рис. 2. График погрешности вычислений Δu от времени t при $\alpha = 1.5, \sigma = 0$

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Проведен ряд численных экспериментов с начальным условием в виде белого шума и различными значениями параметров уравнения (2), а также начальным условием в виде уединенных и периодических волн.

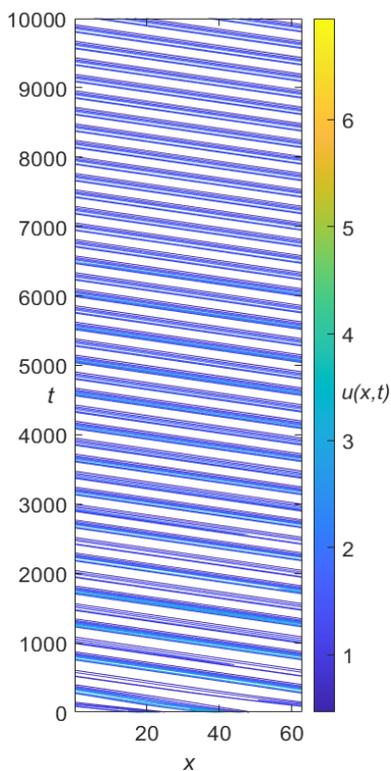


Рис. 3. График численного решения $u(x, t)$ задачи (3)–(4) при $\alpha = 1.5, \sigma = 2.5$ и начальном условии в виде двух уединенных волн различной амплитуды

Результаты численного моделирования задачи (3)–(4) для обобщенной модели Чави–Вадди–Колокольникова (2) показаны на рис. 3–7. Из рис. 3 видно, что две уединенные волны после быстрого изменения формы двигаются с одинаковой скоростью и в дальнейшем форму не меняют. На рис. 4 видно, что исходное состояние в виде белого шума со временем трансформируется в несколько одиночных структур.

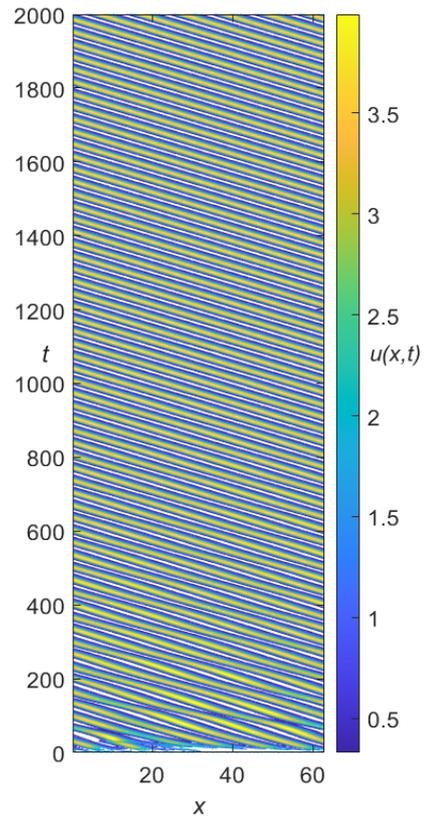


Рис. 4. График численного решения $u(x, t)$ задачи (3)–(4) при $\alpha = 2, \sigma = 1$ и начальном условии в виде белого шума

Структуры, расположенные близко друг к другу, со временем сливаются, образуя структуру большей амплитуды. Этот результат согласуется с результатами, полученными в работе [2]. На рис. 5 также представлено численное решение задачи (3)–(4) с начальным условием в виде белого шума, но при других параметрах математической модели. Из рис. 5 видно, что до момента времени $t = 1250$ скорость движения структур не является постоянной.

На рис. 6 наблюдается процесс перехода от начального условия вида $u(x, 0) = 2\sin^2(x)$ к устойчивым периодическим волнам через несколько промежуточных этапов, которые для наглядности изображены на рис. 7. Процесс перехода к устойчивым периодическим структу-

рам заметен на рис. 6, начиная с момента времени $t = 250$.

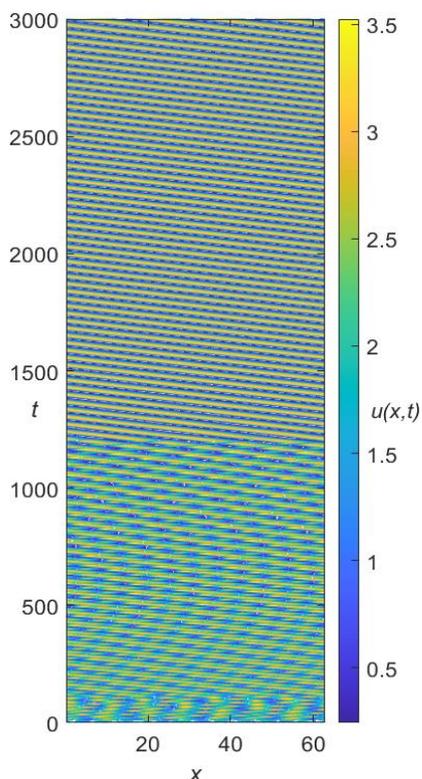


Рис. 5. График численного решения $u(x, t)$ задачи (3)–(4) при $\alpha = 2$, $\sigma = 4$ и начальном условии в виде белого шума

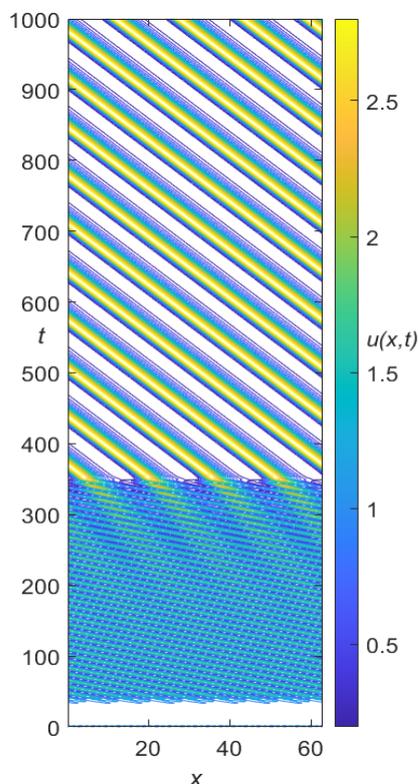


Рис. 6. График численного решения $u(x, t)$ задачи (3)–(4) при $\alpha = 2$, $\sigma = 1.5$ и начальном условии вида $u(x, 0) = 2\sin^2(x)$

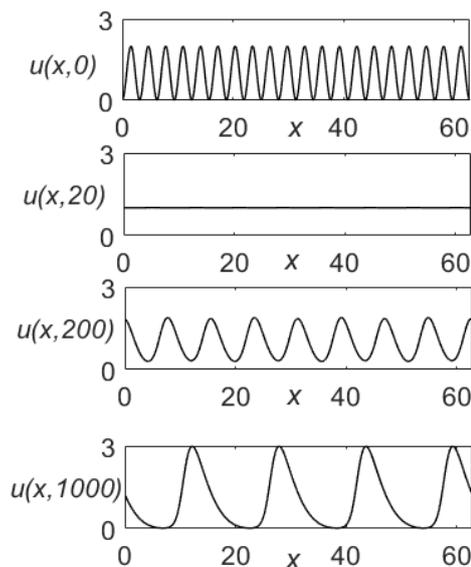


Рис. 7. Графики численного решения $u(x, t)$ задачи (3)–(4) при $\alpha = 2$, $\sigma = 1.5$ и начальном условии в виде белого шума для различных моментов времени

Таким образом, численное решение задачи (3)–(4) показывает, что различные начальные профили волн через некоторое время трансформируются в периодические структуры, движущиеся с постоянной скоростью.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследована обобщенная модель Чави–Вадди–Колокольникова. Проведено численное решение задачи, описываемой обобщенным уравнением Чави–Вадди–Колокольникова с периодическими граничными условиями и различными начальными условиями. Верификация программы проведена на точных решениях уравнения (2) и стационарного случая уравнения (1). Обнаружено, что для уравнения (2) белый шум и уединенные волны трансформируются в движущиеся периодические структуры.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00141).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bhaya D., Levy D., Requeijo T. Group dynamics of phototaxis: Interacting stochastic many-particle systems and their continuum limit. *Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications* // Springer, 2008. P. 145–159.

2. Chavy-Waddy P.-C., Kolokolnikov T. A local PDE model of aggregation formation in bacterial colonies // *Nonlinearity*, 2016. V. 29(10). P. 3174.
3. Cox S.M., Matthews P.C. Exponential time differencing for stiff systems // *Journal of Computational Physics*, 2002. V. 176(2). P. 430–455.
4. Fornberg B.A. Practical guide to pseudospectral methods // Cambridge university press, 1998.
5. Galante A., Levy D. Modeling selective local interactions with memory // *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2013. V. 260. P. 176–190.
6. Keller E. F., Segel L.A. Model for chemotaxis // *Journal of theoretical biology*, 1971. Vol. 30(2). P. 225–234.
7. Keller E.F., Segel L.A. Traveling bands of chemotactic bacteria: a theoretical analysis // *Journal of theoretical biology*, 1971. V. 30(2). P. 235–248.
8. Kudryashov N.A. Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations // *Chaos, Solitons & Fractals*, 2005. V. 24(5). P. 1217–1231.
9. Kudryashov N.A. Logistic function as solution of many nonlinear differential equations // *Applied Mathematical Modelling*, 2015. V. 39(18). P. 5733–5742.
10. Kudryashov N.A., Kutukov A.A., Lavrova S.F. Properties of the generalized Chavy–Waddy–Kolokolnikov model for description of bacterial colonies // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2023. Art. No. 107645.
11. Kudryashov N.A., Lavrova S.F. Painlevé Test, Phase Plane Analysis and Analytical Solutions of the Chavy–Waddy–Kolokolnikov Model for the Description of Bacterial Colonies // *Mathematics*, 2023. V. 11(14). P. 3203.
12. León-Ramrez A., González-Gaxiola O., Chacón-Acosta G. Analytical Solutions to the Chavy–Waddy–Kolokolnikov Model of Bacterial Aggregates in Phototaxis by Three Integration Schemes // *Mathematics*, 2023. V. 11(10). P. 2352.
13. Levy D., Requeijo T. Stochastic models for phototaxis // *Bulletin of Mathematical Biology*, 2008. V. 70. P. 1684–1706.
14. Marée A.F.M., Panfilov A.V., Hogeweg P. Phototaxis during the slug stage of Dictyostelium discoideum: a model study // *Proceedings of the Royal Society of London. Series B: Biological Sciences*, 1999. V. 266(1426). P. 1351–1360.
15. Trefethen L.N. Spectral methods in MATLAB // SIAM, 2000.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta «MIFI», 2023, vol. 12, no. 6, pp. 326–331

NUMERICAL STUDY OF THE GENERALIZED CHAVY–WADDY–KOLOKOLNIKOV MODEL

A.A. Kutukov*, N.A. Kudryashov**

National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409, Russia

*e-mail: alexkutuk@gmail.com

**e-mail: nakudr@gmail.com

Received November 18, 2023; revised November 18, 2023; accepted November 23, 2023

The generalized Chavy–Waddy–Kolokolnikov equation is considered, which describes nonlinear physical and biological processes, in particular, the movement of bacteria under the influence of stimuli. Numerical study of the model is carried out using the pseudospectral method. To test the program, exact solutions of the generalized Chavy–Waddy–Kolokolnikov equation are used. For numerical modeling, initial conditions are used in the form of periodic and solitary waves, as well as in the form of white noise. Graphs of the results of numerical simulation are presented. It is shown that at different values of the model parameters, periodic structures are formed.

Keywords: generalized Chavy–Waddy–Kolokolnikov equation; numerical modeling; pseudospectral method.

REFERENCES

1. Bhaya D., Levy D., Requeijo T. Group dynamics of phototaxis: Interacting stochastic many-particle systems and their continuum limit. *Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications*. Springer, 2008. Pp. 145–159.
2. Chavy–Waddy P.-C., Kolokolnikov T. A local PDE model of aggregation formation in bacterial colonies. *Nonlinearity*, 2016. Vol. 29(10). Pp. 3174.
3. Cox S.M., Matthews P.C. Exponential time differencing for stiff systems. *Journal of Computational Physics*, 2002. Vol. 176(2). Pp. 430–455.

4. *Fornberg B.* A practical guide to pseudospectral methods. Cambridge university press, 1998.
5. *Galante A., Levy D.* Modeling selective local interactions with memory. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2013. Vol. 260. Pp. 176–190.
6. *Keller E.F., Segel L.A.* Model for chemotaxis. *Journal of theoretical biology*, 1971. Vol. 30(2). Pp. 225–234.
7. *Keller E.F., Segel L.A.* Traveling bands of chemotactic bacteria: a theoretical analysis. *Journal of theoretical biology*, 1971. 30(2). Pp. 235–248.
8. *Kudryashov N.A.* Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2005. Vol. 24(5). Pp. 1217–1231.
9. *Kudryashov N.A.* Logistic function as solution of many nonlinear differential equations. *Applied Mathematical Modelling*, 2015. Vol. 39(18). Pp. 5733–5742.
10. *Kudryashov N.A., Kutukov A.A., Lavrova S.F.* Properties of the generalized Chavy-Waddy–Kolokolnikov model for description of bacterial colonies. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2023. Art. No. 107645.
11. *Kudryashov N.A., Lavrova S.F.* Painlevé Test, Phase Plane Analysis and Analytical Solutions of the Chavy–Waddy–Kolokolnikov Model for the Description of Bacterial Colonies. *Mathematics*, 2023. Vol. 11(14). Pp. 3203.
12. *León-Ramrez A., González-Gaxiola O., Chacón-Acosta G.* Analytical Solutions to the Chavy-Waddy–Kolokolnikov Model of Bacterial Aggregates in Phototaxis by Three Integration Schemes. *Mathematics*, 2023. Vol. 11(10). Pp. 2352.
13. *Levy D., Requeijo T.* Stochastic models for phototaxis. *Bulletin of Mathematical Biology*, 2008. Vol. 70. Pp. 1684–1706.
14. *Marée A.F.M., Panfilov A.V., Hogeweg P.* Phototaxis during the slug stage of *Dictyostelium discoideum*: a model study. *Proceedings of the Royal Society of London. Series B: Biological Sciences*, 1999. Vol. 266(1426). Pp. 1351–1360.
15. *Trefethen L.N.* Spectral methods in MATLAB. SIAM, 2000.