ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ», 2023, т. 12, № 6, с. 332–338

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.635

УСТОЙЧИВОСТЬ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ ТРЕТЬЕЙ, ПЯТОЙ, СЕДЬМОЙ И ДЕВЯТОЙ СТЕПЕНЕЙ

А.А. Байрамуков*, Н.А. Кудряшов*

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

**e-mail:* alim.a.bayramukov@gmail.com

***e-mail:* nakudr@gmail.com

Поступила в редакцию 24.11.2023
После доработки: 24.11.2023
Принята к публикации: 28.11.2023

Рассматривается модель нелинейной оптики, описываемая обобщенным уравнением Шрёдингера четвертого порядка с нелинейностями третьей, пятой, седьмой и девятой степеней. Изучается устойчивость точного решения данной модели в виде монохроматической волны. Анализ устойчивости в первом приближении позволяет получить условие неустойчивости точного решения. Метод расщепления по физическим факторам и метод Фурье используются для численного решения математической модели. Проводится анализ устойчивости решения численной модели в виде монохроматической волны, соответствующего точному решению аналитической модели. Получено условие неустойчивости в первом приближении решения численной модели в виде монохроматической волны. Показано, что из условия неустойчивости в первом приближении, полученного для точного решения в виде монохроматической волны, следует выполнение условия неустойчивости численного решения. Предложено условие на временной шаг численного решения, при выполнении которого условия неустойчивости в первом приближении для численного и аналитического решений эквивалентны.

Ключевые слова: обобщенное нелинейное уравнение Шредингера; устойчивость; метод расщепления по физическим факторам; метод Фурье.

DOI: 10.26583/vestnik.2023.292

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ) является базовой моделью для описания оптических импульсов в оптическом волокне [1]. Однако в настоящее время в нелинейной оптике предложен ряд обобщений НУШ, расширяющих базовую модель. Особый интерес для исследователей представляют решения обобщенных НУШ в виде уединенных волн – солитонов.

Интерес к солитонным решениям обобщенных НУШ обусловлен замечательными свойствами солитонов базового нелинейного уравнения Шрёдингера: их движение в оптической среде происходит с постоянной скоростью, пропорциональной амплитуде солитона, и без искажения формы, а столкновение двух солитонов подобно упругому столкновению частиц. Эти свойства солитонов НУШ открывают возможность их практического применения в волоконно-оптических системах передачи информации [2, 3].

Исследование свойств солитонных решений обобщенных НУШ с учетом процессов, пренебрегаемых в базовой модели, является важной и актуальной задачей. Построение солитонных решений для обобщений НУШ – одно из основных направлений исследований в области нелинейной волоконной оптики [4–10], и большинство работ ограничивается лишь этой задачей. Однако одним из основных свойств солитонов, на котором основывается их практическое использование, является их устойчивость, что требует дополнительного исследования.

Хотя анализ устойчивости точных решений для некоторых нелинейных моделей можно выполнить аналитическими методами [11], для этой цели часто используются численные методы. Это связано с тем, что с увеличением сложности моделей уменьшается область применения и эффективность аналитических методов. Так, одним из распространенных подходов к исследованию устойчивости решений нелинейных моделей является использование численного моделирования [12–14]. Авторы указанных работ прогнозируют устойчивость точного решения на основе моделирования его поведения при возмущении его начального значения белым шумом. Однако этот подход имеет существенный недостаток: численная модель может сама служить источником неустойчивости численных решений [15]. Таким образом, исследование устойчивости численной модели должно предшествовать проведению численных экспериментов.

Известно, что монохроматическая волна

$$q_c(x,t) = A_0 \exp\big(i(kx - \omega t - \theta_0)\big), \tag{1}$$

где

$$\omega = b_4 A_0^8 + b_3 A_0^6 + b_2 A_0^4 + b_1 A_0^2 - \\ -a_4 k^4 - a_3 k^3 + a_2 k^2 + a_1 k, \tag{2}$$

является аналитическим решением задачи

$$i\partial_t q + (a_4\partial_x^4 + ia_3\partial_x^3 + a_2\partial_x^2 + ia_1\partial_x)q = \\ = (b_1|q|^2 + b_2|q|^4 + b_3|q|^6 + b_4|q|^8)q, \\ q(x,0) = q_0(x), -\infty < x < +\infty, 0 < t, \tag{3}$$

обобщающей модель, предложенную в [10] для описания распространения фемтосекундных импульсов в нелинейной оптической среде без потерь. В работе [10] были найдены точные решения и законы сохранения модели (3) при $a_1 = a_2 = 0$, но не проведен анализ устойчивости ее решений.

Целью данной работы является исследование устойчивости точного решения в виде монохроматической волны (1) модели (3), а также соответствующего решения численной модели, полученной с помощью метода расщепления по физическим факторам с использованием метода Фурье для решения (3).

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ МОНОХРОМАТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Рассмотрим результат действия малого возмущения $\varepsilon(x,t)$ на решение (1):

$$\tilde{q}_c = A_0 \exp\big(i(kx - \omega t)\big)\big(1 + \varepsilon(x,t)\big), \tag{4}$$

где

$$|\varepsilon|^2 \ll 1. \tag{5}$$

Так как

$$|1+\varepsilon|^{2n} = (1+\varepsilon)^n(1+\bar{\varepsilon})^n = \\ = 1 + n(\varepsilon + \bar{\varepsilon}) + O(|\varepsilon|^2), \quad n = 1, 2, \dots,$$

подстановка (4) в уравнение (3) с учетом (2) и (5) приводит к линеаризованному дифференциальному уравнению

$$i\partial_t\varepsilon + (\tilde{a}_4\partial_x^4 + i\tilde{a}_3\partial_x^3 + \tilde{a}_2\partial_x^2 + i\tilde{a}_1\partial_x)\varepsilon = \\ = \tilde{b}(\varepsilon - \bar{\varepsilon}), \tag{6}$$

где

$$\tilde{a}_4 = a_4, \quad \tilde{a}_3 = ka_4 + a_3, \\ \tilde{a}_2 = -(6k^2 a_4 + 3ka_3 - a_2), \\ \tilde{a}_1 = -(4k^3 a_4 + 3k^2 a_3 - 2ka_2 - a_1), \\ \tilde{b} = 4A_0^8 b_4 + 3A_0^6 b_3 + 2A_0^4 b_2 + A_0^2 b_1. \tag{7}$$

Пусть возмущение $\varepsilon(x,t)$ является периодической функцией по x с периодом L. Тогда $\varepsilon(x,t)$ можно представить в виде ряда Фурье:

$$\varepsilon(x,t) = \textstyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{\varepsilon}_n(t)\exp(i\mu_n x), \quad \mu_n = \frac{2\pi n}{L}. \tag{8}$$

Используя метод преобразования Фурье, из (6) получаем систему линейных дифференциальных уравнений для $\hat{\varepsilon}_n(t)$:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\hat{\varepsilon}_n \\ \bar{\hat{\varepsilon}}_{-n}\end{bmatrix} = G_n \begin{bmatrix}\hat{\varepsilon}_n \\ \bar{\hat{\varepsilon}}_{-n}\end{bmatrix}, \ n = -\infty, \dots, +\infty, \tag{9}$$

где

$$G_n = i\begin{bmatrix} G_{11}^{(n)} & G_{12}^{(n)} \\ G_{21}^{(n)} & G_{22}^{(n)} \end{bmatrix}, \tag{10}$$

$$G_{11}^{(n)} = \tilde{a}_4\mu_n^4 + \tilde{a}_3\mu_n^3 - \tilde{a}_2\mu_n^2 - \tilde{a}_1\mu_n - \tilde{b}, \\ G_{12}^{(n)} = \tilde{b}, \quad G_{21}^{(n)} = -\tilde{b}, \\ G_{22}^{(n)} = -\tilde{a}_4\mu_n^4 + \tilde{a}_3\mu_n^3 + \tilde{a}_2\mu_n^2 - \tilde{a}_1\mu_n + \tilde{b}.$$

Собственные значения λ_1, λ_2 матрицы (10) равны

$$\lambda_{1,2} = i(\mu_n^3\tilde{a}_3 - \mu_n\tilde{a}_1) \pm \\ \pm\sqrt{(\mu_n^4\tilde{a}_4 - \mu_n^2\tilde{a}_2)(-\mu_n^4\tilde{a}_4 + \mu_n^2\tilde{a}_2 + 2\tilde{b})}. \tag{11}$$

Полагая, что параметры уравнения (6) являются вещественными числами, из (7) и (11) получаем, что если выполнено неравенство

$$0 < (\tilde{a}_4\mu_n^4 - \tilde{a}_2\mu_n^2)\tilde{b} < 2\tilde{b}^2, \tag{12}$$

то $\pm n$-ная спектральная компонента возмущения (8) на начальных этапах будет расти экспоненциально, и решение (1) будет неустойчивым. В случае если (12) не выполняется, исследование устойчивости в первом приближении не позволяет сделать вывод об устойчивости решения (1). Таким образом, неравенство (12) представляет собой условие неустойчивости в первом приближении для решения (1) аналитической модели (3).

В следующем разделе рассмотрим применение метода расщепления по физическим факторам с использованием метода Фурье для численного решения аналитической модели (3).

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ (3)

Получим с помощью метода расщепления по физическим факторам с использованием метода Фурье (split-step Fourier method) [15] выражения для численного решения задачи (3). Использование метода Фурье предполагает, что задача имеет периодические граничные условия. Таким образом, метод применим лишь для моделирования периодических решений задачи (3). Однако его также можно использовать для моделирования солитонных решений, если исходную задачу (3) аппроксимировать задачей с периодическими граничными условиями с периодом, существенно превышающим длину волны солитона.

Рассмотрим задачу

$$q_t = i\mathcal{L}q + i\mathcal{N}(|q|^2)q,$$

$$q(x,0) = q_0(x),\ -\tfrac{L}{2} < x < \tfrac{L}{2},\ 0 < t, \qquad (13)$$

$$q(x+L,t) = q(x,t),\ -\infty < x < +\infty, \qquad (14)$$

полученную из (3) добавлением условия (14) периодичности по x решения $q(x,t)$, где

$$\mathcal{L} = ia_1\,\partial x + a_2\,\partial_x^2 + ia_3\,\partial_x^3 + a_4\,\partial_x^4, \qquad (15)$$

$$\mathcal{N}(q) = -(b_1 q + b_2 q^2 + b_3 q^3 + b_4 q^4),$$

– линейный и нелинейный операторы исходной задачи (3).

В методе расщепления по физическим факторам решение $q(x,t)$ задачи (13), (14) аппроксимируется функцией $Q(x,t)$, вычисляемой по формуле [15]

$$Q(x,t+\tau) = \exp(i\tau\mathcal{L}) \times$$

$$\times \exp\Big(i\tau\mathcal{N}\big(|Q(x,t)|^2\big)\Big)\,Q(x,t). \qquad (16)$$

Вычисление (16) выполняется в два шага путем введения решения на промежуточном шаге $V(x,t)$:

$$V(x,t) = \exp\big(i\tau\mathcal{N}(|Q(x,t)|^2)\big)\,Q(x,t), \qquad (17)$$

$$Q(x,t+\tau) = \exp(i\tau\mathcal{L})\,V(x,t). \qquad (18)$$

Для вычисления (18) воспользуемся численным приближением дифференциального оператора (15). Для этого введем сеточную функцию

$$Q_j^{(m)} = Q(x_j,\ m\tau), \quad j = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2},$$

аппроксимирующую $Q(x, m\tau)$ на сетке с шагом h:

$$x_j = jh, \quad h = L/N, \quad j = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}.$$

Аналогично, $V_j^{(m)}$ – сеточная функция, аппроксимирующая $V(x, m\tau)$.

Если $Q(x,t)$ – периодическая функция по x, то промежуточное решение $V(x,t)$ также периодично, что следует из (17). Следовательно, возможно выполнить преобразование Фурье выражения (18). Ряды Фурье периодических функций $V(x,t)$ и $Q(x,t+\tau)$ аппроксимируются дискретным преобразованием Фурье сеточных функций $V_j^{(m)}$ и $Q_j^{(m+1)}$ [15]:

$$\hat{Q}_n^{(m+1)} = \exp\big(i\tau\hat{\mathcal{L}}_n\big)\,\hat{V}_n^{(m)},$$

$$n = -\tfrac{N}{2}, \dots, \tfrac{N}{2} - 1, \qquad (19)$$

где

$$\hat{A}_n = \frac{h}{L}\sum_{j=-N/2}^{N/2-1} A_j \exp\big(-i\mu_n x_j\big),$$

– дискретное преобразование Фурье,

$$\hat{\mathcal{L}}_n = a_4\mu_n^4 + a_3\mu_n^3 - a_2\mu_n^2 - a_1\mu_n,$$

где $\mu_n = \frac{2\pi n}{L}$.

Наконец, из (17) и (19) имеем:

$$V_j^{(m)} = \exp\left(i\tau\mathcal{N}\left(\left|Q_j^{(m)}\right|^2\right)\right)\cdot Q_j^{(m)}, \qquad (20)$$

$$Q_j^{(m+1)} =$$

$$= \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \hat{V}_n^{(m)} \exp\left(i\big(\tau\widehat{\mathcal{L}_n} + \mu_n x_j\big)\right). \qquad (21)$$

Формулы (20) и (21) с начальным условием

$$Q_j^{(0)} = q_0(x_j), \quad j = -\tfrac{N}{2}, \dots, \tfrac{N}{2} - 1, \qquad (22)$$

позволяют численно решить задачу (13), (14).

В следующем разделе исследуется устойчивость в первом приближении решения численной модели (20), (21), (22) в виде монохроматической волны.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ МОНОХРОМАТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЧИСЛЕННОЙ МОДЕЛИ

Рассмотрим сеточную функцию

$$Q_{c_j}^{(m)} = A_0 \exp\left(i\left(kx_j - \omega m\tau\right)\right),$$
$$j = -\tfrac{N}{2}, \dots, \tfrac{N}{2} - 1, \tag{23}$$

соответствующую решению (1) в виде монохроматической волны при $\theta_0 = 0$.

Решение (23) периодично с периодом $L = 2\pi/k$.

Исследуем устойчивость в первом приближении решения (23). Возмущенное решение (23) дано выражением

$$Q_j^{(m)} = Q_{c_j}^{(m)}\left(1 + \varepsilon_j^{(m)}\right),$$
$$j = -\tfrac{N}{2}, \dots, \tfrac{N}{2} - 1, \tag{24}$$

где сеточная функция $\varepsilon_j^{(m)}$ – малое возмущение. Предположим, что $\varepsilon_j^{(m)}$ периодично с периодом L, и $\left|\varepsilon_j^{(m)}\right| \ll 1$.

Согласно (20), имеем

$$V_j^{(m)} = \exp\left(i\tau\mathcal{N}\left(A_0^2\left|1 + \varepsilon_j^{(m)}\right|^2\right)\right) \times$$
$$\times Q_{c_j}^{(m)}\left(1 + \varepsilon_j^{(m)}\right). \tag{25}$$

Используя разложение в ряд Тейлора и условие малости возмущения $\varepsilon_j^{(m)}$, получим

$$i\mathcal{N}\left(A_0^2\left|1 + \varepsilon_j^{(m)}\right|^2\right) \approx$$
$$\approx \mathcal{N}\left(A_0^2\left(1 + \varepsilon_j^{(m)} + \bar{\varepsilon}_j^{(m)}\right)\right) \approx$$
$$\approx \mathcal{N}(A_0^2) + A_0^2\mathcal{N}'(A_0^2)\left(\varepsilon_j^{(m)} + \bar{\varepsilon}_j^{(m)}\right) =$$
$$= \mathcal{N}(A_0^2) - \tilde{b}\left(\varepsilon_j^{(m)} + \bar{\varepsilon}_j^{(m)}\right), \tag{26}$$

где $\mathcal{N}'(q) = \frac{d}{dq}\mathcal{N}(q)$, и $\tilde{b}$ определено в (7).

Из (25) и (26) следует

$$V_j^{(m)} \approx Q^{*}{}_j^{(m)}\left(1 + E_j^{(m)}\right), \tag{27}$$

где

$$Q^{*}{}_j^{(m)} = \exp\left(i\tau\mathcal{N}(A_0^2)\right) \cdot Q_{c_j}^{(m)},$$
$$E_j^{(m)} = \left(1 - i\tau\tilde{b}\right)\varepsilon_j^{(m)} - i\tau\tilde{b}\bar{\varepsilon}_j^{(m)}. \tag{28}$$

Применив ДПФ к (28), получим

$$\widehat{Q^{*}}_n^{(m)} = \begin{cases} 0, & n \neq 1, \\ A_0 \exp\left(i\tau(\mathcal{N}(A_0^2) - \omega m)\right) & n = 1, \end{cases}$$
$$\hat{E}_n^{(m)} = \left(1 - i\tau\tilde{b}\right)\hat{\varepsilon}_n^{(m)} - i\tau\tilde{b}\bar{\hat{\varepsilon}}_{-n}^{(m)},$$

откуда для спектральных компонент (27) следует

$$\hat{V}_n^{(m)} = \frac{1}{N}\begin{cases} \widehat{Q^{*}}_1^{(m)}\hat{E}_{[n-1]}^{(m)}, & n \neq 1, \\ \widehat{Q^{*}}_1^{(m)}\left(N + \hat{E}_0^{(m)}\right), & n = 1. \end{cases} \tag{29}$$

где

$$[n-1] = \begin{cases} n - 1 & n > -N/2, \\ N/2 - 1, & n = -N/2. \end{cases}$$

Согласно (21) и (29), значение сеточной функции (24) на следующем временном слое равно

$$\hat{Q}_1^{(m+1)} = \frac{1}{N}\widehat{Q_{c_1}}^{(m+1)}\left(N + \hat{E}_0^{(m)}\right), \tag{30}$$
$$\hat{Q}_n^{(m+1)} = \frac{1}{N}\exp\left(i\tau\left(\hat{\mathcal{L}}_n - \hat{\mathcal{L}}_1\right)\right)\widehat{Q_{c_1}}^{(m+1)}\hat{E}_{[n-1]}^{(m)},$$
$$n \neq 1,$$

поскольку $\widehat{Q^{*}}_1^{(m)}\exp\left(i\tau\hat{\mathcal{L}}_1\right) = \widehat{Q_{c_1}}^{(m+1)}$, что следует из (2) и (23).

С другой стороны, применив ДПФ к (24), имеем

$$\hat{Q}_1^{(m+1)} = \frac{1}{N}\widehat{Q_{c_1}}^{(m+1)}\hat{\varepsilon}_{[n-1]}^{(m+1)}, \tag{31}$$

$$\hat{Q}_n^{(m+1)} = \widehat{Q_{c_1}}^{(m+1)}\left(N + \hat{\varepsilon}_0^{(m+1)}\right),\ n \neq 1,$$

Сравнение (30) и (31) дает выражение для вычисления спектральных компонент возмущения $\varepsilon^{(m)}$ на следующем временном слое в первом приближении:

$$\begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_n^{(m+1)} \\ \bar{\hat{\varepsilon}}_{-n}^{(m+1)} \end{bmatrix} = H_n \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_n^{(m)} \\ \bar{\hat{\varepsilon}}_{-n}^{(m)} \end{bmatrix},\ n = -\infty, \dots, +\infty, \tag{32}$$

где

$$H_n = i\begin{bmatrix} H_{11}^{(n)} & H_{12}^{(n)} \\ H_{21}^{(n)} & H_{22}^{(n)} \end{bmatrix}, \tag{33}$$

$$H_{11}^{(n)} = \left(1 - i\tau\tilde{b}\right)\exp\left(i\tau\hat{\mathcal{D}}_n\right),$$
$$H_{12}^{(n)} = -i\tau\tilde{b}\exp\left(i\tau\hat{\mathcal{D}}_n\right),$$

$$H_{21}^{(n)} = i\tau\tilde{b}\exp\left(-i\tau\widehat{\mathcal{D}}_{-n}\right),$$

$$H_{22}^{(n)} = \left(1 + i\tau\tilde{b}\right)\exp\left(-i\tau\widehat{\mathcal{D}}_{-n}\right)$$

и

$$\widehat{\mathcal{D}}_n = \hat{\mathcal{L}}_{n+1} - \hat{\mathcal{L}}_1 = \\ = \tilde{a}_4\mu_n^4 + \tilde{a}_3\mu_n^3 - \tilde{a}_2\mu_n^2 - \tilde{a}_1\mu_n\,, \qquad (34)$$

где $\tilde{a}_i$ определены в (7). Равенство (32) представляет собой дискретный аналог линеаризованной системы дифференциальных уравнений (9).

Заметим, что (34) можно представить как сумму четной и нечетной функций от n:

$$\widehat{\mathcal{D}}_n = \widehat{\mathcal{D}}_n^+ + \widehat{\mathcal{D}}_n^-, \qquad (35)$$

где

$$\widehat{\mathcal{D}}_n^+ = \tilde{a}_4\mu_n^4 - \tilde{a}_2\mu_n^2, \quad \widehat{\mathcal{D}}_n^- = \tilde{a}_3\mu_n^3 - \tilde{a}_1\mu_n$$

и

$$\widehat{\mathcal{D}}_{-n}^+ = \widehat{\mathcal{D}}_n^+, \quad \widehat{\mathcal{D}}_{-n}^- = -\widehat{\mathcal{D}}_n^-.$$

Далее, из (35) и (33) следует

$$H_n = \exp\left(i\tau\widehat{\mathcal{D}}_n^-\right)\begin{bmatrix} H'^{(n)}_{11} & H'^{(n)}_{12} \\ H'^{(n)}_{21} & H'^{(n)}_{22} \end{bmatrix}, \qquad (36)$$

$$H'^{(n)}_{11} = \left(1 - i\tau\tilde{b}\right)\exp\left(i\tau\widehat{\mathcal{D}}_n^+\right),$$

$$H'^{(n)}_{12} = -i\tau\tilde{b}\exp\left(i\tau\widehat{\mathcal{D}}_n^+\right),$$

$$H'^{(n)}_{21} = i\tau\tilde{b}\exp\left(-i\tau\widehat{\mathcal{D}}_n^+\right),$$

$$H'^{(n)}_{22} = \left(1 + i\tau\tilde{b}\right)\exp\left(-i\tau\widehat{\mathcal{D}}_n^+\right).$$

Собственные значения (36) равны

$$\lambda_n^{(1,2)} = \beta_n \pm \sqrt{\beta_n^2 - 1}, \qquad (37)$$

где

$$\beta_n = \cos\left(\tau\widehat{\mathcal{D}}_n^+\right) + \tau\tilde{b}\sin\left(\tau\widehat{\mathcal{D}}_n^+\right). \qquad (38)$$

Поведение n-ной спектральной компоненты возмущения $\varepsilon_j^{(m)}$ в начальных этапах определяется модулями собственных значений (37) матрицы (36). Предположим, что коэффициенты (7) являются вещественными числами. Тогда, согласно (38), β_n тоже является вещественным числом, и возможны два различных случая. Если $|\beta_n| \leq 1$, исследование устойчивости в первом приближении не позволяет сделать вывод об устойчивости решения (23), поскольку имеет место $\left|\lambda_n^{(1,2)}\right| = 1$. Если же $|\beta_n| > 1$, то $\left|\lambda_n^{(1)}\right| > 1$ или $\left|\lambda_n^{(2)}\right| > 1$, и решение (23) неустойчиво. Так, с учетом (38), условие неустойчивости решения (23) можно записать в виде

$$\left|\cos\left(\tau\widehat{\mathcal{D}}_n^+\right) + \tau\tilde{b}\sin\left(\tau\widehat{\mathcal{D}}_n^+\right)\right| > 1,$$

что эквивалентно [15]

$$\left|\cos\left(\tau\widehat{\mathcal{D}}_n^+ - \theta_0\right)\right| > \cos\theta_0, \qquad (39)$$

где θ_0 определяется через

$$\cos\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2\tilde{b}^2}}, \quad \sin\theta_0 = \frac{\tau\tilde{b}}{\sqrt{1 + \tau^2\tilde{b}^2}},$$

причем $0 < \theta_0 < \pi/2$, если $\tilde{b} > 0$, и $-\pi/2 < \theta_0 < 0$, если $\tilde{b} < 0$.

Для упрощения (39), введем функцию непрерывного аргумента μ [15]

$$g(\mu^2) = \tilde{a}_4\mu^4 - \tilde{a}_2\mu^2,$$

для которой $g(\mu_n^2) = \widehat{\mathcal{D}}_n^+$. Тогда можно рассмотреть левую часть неравенства (39) как непрерывную периодическую функцию непрерывного аргумента $g(\mu^2)$:

$$|\cos(\tau g(\mu^2) - \theta_0)| > \cos\theta_0. \qquad (40)$$

Обозначив

$$g_p = \frac{\theta_0 + p\pi}{\tau}, \quad p \in Z,$$

точки перегиба функции в левой части неравенства (40), условие (40) можно записать как [15]

$$\tau\left|g(\mu_n^2) - g_p\right| < |\theta_0|, \quad p \in Z. \qquad (41)$$

Умножив (41) на $\tilde{b}$, поскольку $\theta_0\tilde{b} > 0$, получим

$$-\theta_0\tilde{b} < (\tau g(\mu_n^2) - \theta_0 - p\pi)\tilde{b} < \theta_0\tilde{b},\ p \in Z. \qquad (42)$$

Для $p = 0$, используя разложение θ_0 в ряд Тейлора, из (42) имеем

$$0 < (\tilde{a}_4\mu_n^4 - \tilde{a}_2\mu_n^2)\tilde{b} < 2\tilde{b}^2 + O(\tau). \qquad (43)$$

Условие (43) при $\tau \to 0$ соответствует условию неустойчивости (12), полученному для монохроматического решения аналитической модели. Следовательно, условие (42) при $p = 0$ отражает естественную неустойчивость модели (3). Напротив, условие (42) при $p \neq 0$ не имеет соответствия в аналитической модели и отражает неустойчивость исключительно численной природы. Таким образом, из выполнения условия (42) неустойчивости в первом приближении численного решения в виде монохроматической волны не следует выполнение условия (12).

Поскольку n в (32) принимает ограниченные значения, то и значения $g(\mu_n^2) = \widehat{\mathcal{D}}_n^+$ будут ограничены. Подбирая такое достаточно малое τ, что

$$-(\pi - \theta) < \tau g(\mu_n^2) + |\theta| < \pi - \theta, \qquad (44)$$

$$n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1,$$

можно предотвратить выполнение условия неустойчивости (42) при $p \neq 0$. В таком случае условие неустойчивости в первом приближении численного решения (23) совпадает с условием неустойчивости в первом приближении решения (1) аналитической модели. При этом следует иметь в виду, что соответствующее значение τ необходимо, но не достаточно для устойчивости численного решения (23), поскольку, во-первых, остается условие (43), соответствующее условию неустойчивости аналитического решения, и во-вторых, условие неустойчивости (42) было получено лишь в первом приближении, и из него не следует устойчивость решения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ устойчивости в первом приближении относительно решения (1) модели (3) позволил получить следующие результаты.

Получены условия неустойчивости в первом приближении для решения (1) аналитической модели (3) и решения (23) численной модели (20), (21), (22), построенной с помощью метода разложения по физическим факторам с использованием метода Фурье.

Показано, что из выполнения условия (12) неустойчивости в первом приближении, полученного для аналитического решения (1), следует выполнение условия (42) неустойчивости в первом приближении решения (23) численной модели (20), (21), (22). Однако обратное не верно, и условие (42) в общем случае не эквивалентно условию (12) неустойчивости в первом приближении решения (1).

Представлено условие (44) для шага по времени τ численной модели, при выполнении которого условия неустойчивости (42) и (12) будут эквивалентны.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00141).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Boyd R.W.* Nonlinear Optics. Elsevier Science & Technology Books, 2008.
2. *Hasegawa A., Kodama Y.* Signal transmission by optical solitons in monomode fiber // Proceedings of the IEEE, 1981. V. 69. № 9. P. 1145–1150.
3. *Blow K.J., Doran N. J.* High bit rate communication systems using non-linear effects // Optics Communications, 1982. V. 42. № 6. P. 403406.
4. *Triki H. et al.* Chirped solitary pulses for a nonic nonlinear Schrödinger equation on a continuous-wave background // Physical Review A, 2016. V. 93. № 6. P. 063810.
5. *Biswas A. et al.* Highly dispersive optical solitons with kerr law nonlinearity by extended Jacobi's elliptic function expansion // Optik, 2019. V. 183. P. 395–400.
6. *Hussain Q., Zaman F. D., Kara A. H.* Invariant analysis and conservation laws of time fractional Schrödinger equations // Optik, 2020. V. 206. P. 164356.
7. *Kudryashov N. A.* Highly dispersive optical solitons of equation with various polynomial nonlinearity law // Chaos, Solitons & Fractals, 2020. V. 140. P. 110202.
8. *Biswas A.* 1-soliton solution of the generalized Radhakrishnan, Kundu, Lakshmanan equation // Physics Letters A, 2009. V. 373. № 30. P. 2546–2548.
9. *Kudryashov N.A.* Highly dispersive optical solitons of the generalized nonlinear eighth-order Schrödinger equation // Optik, 2020. V. 206. P. 164335.
10. *Kudryashov N.A. et al.* Cubic–quartic optical solitons and conservation laws having cubic–quintic–septic–nonic self-phase modulation // Optik, 2022. V. 269. P. 169834.
11. *Seadawy A.R., Lu D.* Bright and dark solitary wave soliton solutions for the generalized higher order nonlinear Schrödinger equation and its stability // Results in Physics, 2017. V. 7. P. 43–48.
12. *He J.-R., Li H.-M.* Analytical solitary-wave solutions of the generalized nonautonomous cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation with different external potentials // Physical Review E, 2011. V. 83. № 6. P. 066607.
13. *Hambli N. et al.* q-Deformed solitary pulses in the higher-order nonlinear Schrödinger equation with cubic-quintic nonlinear terms // Optik, 2022. V. 268. P. 169724.
14. *Kruglov V.I., Triki H.* Propagation of periodic and solitary waves in a highly dispersive cubic–quintic medium with self-frequency shift and self-steepening nonlinearity // Chaos, Solitons & Fractals, 2022. V. 164. P. 112704.
15. *Weideman J., Herbst B.* Split-step methods for the solution of the non-linear Schrödinger equation // SIAM Journal on Numerical Analysis, 1986. V. 23. № 3. P. 485–507.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta «MIFI», 2023, vol. 12, no. 6, pp. 332–338

STABILITY OF THE NUMERICAL SOLUTION OF THE FOURTH ORDER GENERALIZED NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION WITH CUBIC-QUINTIC-SEPTIC-NONIC NONLINEARITY

A.A. Bayramukov*, N.A. Kudryashov**

National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409, Russia

**e-mail: alim.a.bayramukov@gmail.com*

***e-mail: nakudr@gmail.com*

Received November 24, 2023; revised November 24; accepted November 28

A model of nonlinear optics described by the generalized fourth-order Schrödinger equation with nonlinearities of the third, fifth, seventh and ninth degrees is considered. An analysis of the stability in the first approximation of the exact solution of this model in the form of a monochromatic wave is carried out. Analysis of stability in the first approximation allows us to obtain the condition for the instability of the exact solution. The split-step Fourier method is used to numerically solve the model. An analysis of the stability in the first approximation of the solution of the numerical model in the form of a monochromatic wave corresponding to the exact solution of the analytical model is carried out. The instability condition in the first approximation of the solution of the numerical model in the form of a monochromatic wave is derived. It is demonstrated that from the fulfillment of the instability condition in the first approximation, obtained for the exact solution in the form of a monochromatic wave, the fulfillment of the instability condition for the numerical solution follows, while the converse is not true. A condition is given for the time step of the numerical model, under which the instability conditions in the first approximation for the numerical and analytical solutions coincide.

Keywords: generalized nonlinear Schrödinger equation, stability, split-step Fourier method.

REFERENCES

1. *Boyd R.W.* Nonlinear Optics. Elsevier Science & Technology Books, 2008.
2. *Hasegawa A., Kodama Y.* Signal transmission by optical solitons in monomode fiber. Proceedings of the IEEE 1981. Vol. 69. No. 9. Pp. 1145–1150.
3. *Blow K.J., Doran N.J.* High bit rate communication systems using non-linear effects. Optics Communications, 1982. Vol. 42, No. 6. P. 403406.
4. *Triki H. et al.* Chirped solitary pulses for a nonic nonlinear Schrödinger equation on a continuous-wave background. Physical Review A, 2016. Vol. 93. No. 6. P. 063810.
5. *Biswas A. et al.* Highly dispersive optical solitons with kerr law nonlinearity by extended Jacobi's elliptic function expansion. Optik, 2019. Vol. 183. Pp. 395–400.
6. *Hussain Q., Zaman F.D., Kara A. H.* Invariant analysis and conservation laws of time fractional Schrödinger equations. Optik, 2020. Vol. 206. P. 164356.
7. *Kudryashov N.A.* Highly dispersive optical solitons of equation with various polynomial nonlinearity law. Chaos, Solitons & Fractals, 2020. Vol. 140. P. 110202.
8. *Biswas A.* 1-soliton solution of the generalized Radhakrishnan, Kundu, Lakshmanan equation. Physics Letters A, 2009. Vol. 373. No. 30. Pp. 2546–2548.
9. *Kudryashov N.A.* Highly dispersive optical solitons of the generalized nonlinear eighth-order Schrödinger equation. Optik, 2020. Vol. 206. Pp. 164335.
10. *Kudryashov N.A. et al.* Cubic–quartic optical solitons and conservation laws having cubic–quintic–septic–nonic self-phase modulation. Optik, 2022. Vol. 269. Pp. 169834.
11. *Seadawy A.R., Lu D.* Bright and dark solitary wave soliton solutions for the generalized higher order nonlinear Schrödinger equation and its stability. Results in Physics, 2017. Vol. 7. Pp. 43–48.
12. *He J.-R., Li H.-M.* Analytical solitary-wave solutions of the generalized nonautonomous cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation with different external potentials. Physical Review E, 2011. Vol. 83. No. 6. P. 066607.
13. *Hambli N. et al.* q-Deformed solitary pulses in the higher-order nonlinear Schrödinger equation with cubic-quintic nonlinear terms. Optik, 2022. Vol. 268. P. 169724.
14. *Kruglov V.I., Triki H.* Propagation of periodic and solitary waves in a highly dispersive cubic–quintic medium with self-frequency shift and self-steepening nonlinearity. Chaos, Solitons & Fractals, 2022. Vol. 164. Pp. 112704.
15. *Weideman J., Herbst B.* Split-step methods for the solution of the non-linear Schrödinger equation. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1986. Vol. 23. No. 3. Pp. 485–507.