ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ», 2023, т. 12, № 4, с. 201–210

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 517.9

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, РЕДУКЦИИ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОННОЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

А.Д. Полянин
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
e-mail: polyanin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию: 27.09.2023
После доработки: 28.09.2023
Принята к публикации: 10.10.2023

Исследуется сильно нелинейное уравнение в частных производных с тремя независимыми переменными $u_t = u_{xx}u_{yy} - u^2_{xy}$, которое встречается в электронной магнитной гидродинамике. Описаны многопараметрические преобразования, сохраняющие вид этого уравнения, а также двумерные и одномерные редукции, приводящие его к более простым уравнениям в частных производных с двумя независимыми переменными (в том числе к стационарным уравнениям типа Монжа–Ампера, нестационарным уравнениям теплопроводности и уравнениям нелинейной теории фильтрации) или обыкновенным дифференциальным уравнениям. Методами обобщенного разделения переменных построены точные решения, многие из которых допускают представление в элементарных функциях. Рассмотрены также более сложные решения, которые выражаются через решения линейных уравнений диффузионного типа.

Ключевые слова: нелинейные уравнения с частными производными, одно- и двумерные редукции, точные решения, решения с обобщенным разделением переменных, уравнения типа Монжа–Ампера, магнитная гидродинамика, нелинейные уравнения теплопроводности, уравнения диффузии.
DOI: 10.26583/vestnik.2023.293

ВВЕДЕНИЕ. РАССМАТРИВАЕМОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ

В плазменной электронной магнитной гидродинамике разработан подход, в котором электронная составляющая плазмы представлена в виде набора случайных или регулярно распределенных точечных электронных вихрей. Локальные деформации сжатия-разрежения нестационарных движений акустического типа в такой двумерной вихревой системе описываются нелинейным уравнением Смирнова–Чукбара–Забурдаева [1–3]:

$$u_t = u_{xx}u_{yy} - u^2_{xy}, \qquad (1)$$

в котором в правой части опущен общий постоянный множитель (без ограничения общности это достигается простым масштабированием по любой независимой или зависимой переменной).

В стационарном случае уравнение (1) вырождается в однородное уравнение Монжа–Ампера, общее решение которого можно представить в параметрической форме [4] (преобразования и точные решения этого и родственных более сложных уравнений типа Монжа–Ампера можно найти [5–7]).

В работе [8] методом разделения переменных были получены точные решения нестационарного уравнения (1) в виде произведения трех функций разных аргументов: $u = X(x)Y(y)T(t)$.

Методы построения решений математических уравнений, основанные на решениях более простых уравнений, обычно называются редукциями. Редукции играют ключевую роль для построения точных решений дифференциальных уравнений и обычно приводят к уравнениям более низкого порядка или уравнениям меньшей размерности. Наиболее важными для нелинейных уравнений с частными производными являются одномерные редукции, используя которые удается представить их решения в терминах решений гораздо более простых обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

В данной работе под точными решениями нелинейных уравнений с частными производными понимаются решения, которые выражаются:

- с помощью элементарных функций и неопределенных интегралов;
- через решения ОДУ или систем ОДУ;
- через решения линейных уравнений математической физики.

Важно отметить, что точные решения нелинейных уравнений математической физики с частными производными играют важную роль стандартных «математических эталонов», которые широко используются для оценки точности, верификации и разработки различных численных, асимптотических и приближенных аналитических методов. Редукции и точные решения нелинейных уравнений с частными производными чаще всего строятся с использованием методов группового анализа [6, 9, 10], методов обобщенного и функционального разделения переменных [7, 11–14], метода дифференциальных связей [7, 11, 13–15] и некоторых других аналитических методов [7, 14, 16–21].

В данной работе для поиска точных решений нелинейного уравнения магнитной гидродинамики (1) использованы различные модификации метода обобщенного разделения переменных [7, 11–14] и приведенные в [7] точные решения более простых, чем исходное, промежуточных редуцированных уравнений с меньшим числом независимых переменных. Особое внимание уделяется построению простых точных решений, которые выражаются через элементарные функции. Такие решения удобно использовать в качестве тестовых задач для оценки точности и проверки адекватности численных методов решения сильно нелинейных уравнений с частными производными.

НЕКОТОРЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1. Преобразование

$$\bar{x} = a_1x + b_1y + c_1,$$
$$\bar{y} = a_2x + b_2y + c_2 \quad (a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0),$$
$$\bar{t} = pt + q, \quad \bar{u} = ku + a_3x + b_3y + c_3,$$
$$k = \frac{1}{p}\left(a_1b_2 - a_2b_1\right)^2, \qquad (2)$$

где a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, p, q – произвольные постоянные, приводит исходное уравнение (1) к уравнению точно такого же вида.

Одиннадцатипараметрическое инвариантное преобразование (2) позволяет с помощью более простых частных решений уравнения (1) строить его более сложные точные решения. А именно, если $u = F(x, y, t)$ – решение уравнения (1), то функция

$$u = \frac{p}{\left(a_1b_2 - a_2b_1\right)^2} F(a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2,$$
$$pt + q) + a_4x + b_4y + c_4,$$

где $a_4 = -a_3/k$, $b_4 = -b_3/k$, $c_4 = -c_3/k$, также является решением этого уравнения.

2. В полярных координатах r, φ, где $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, исходное уравнение принимает вид

$$u_t = r^{-2}u_{rr}(u_{\varphi\varphi} + ru_r) - [(r^{-1}u_\varphi)_r]^2. \qquad (3)$$

Это уравнение будет использовано далее для построения точных решений рассматриваемого уравнения.

3. В эллиптических координатах r, φ, где $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$ (a и b – положительные константы), уравнение (1) записывается так:

$$u_t = (ab)^{-2}\{r^{-2}u_{rr}(u_{\varphi\varphi} + ru_r) - [(r^{-1}u_\varphi)_r]^2\}. \qquad (4)$$

4. В гиперболических координатах ζ, ψ, где $x = a\zeta\,\mathrm{ch}\,\psi$, $y = b\zeta\,\mathrm{sh}\,\psi$ (a и b – ненулевые константы), уравнение (1) имеет вид

$$u_t = -(ab)^{-2}\{\zeta^{-2}u_{\zeta\zeta}(u_{\psi\psi} + \zeta u_\zeta) - [(\zeta^{-1}u_\psi)_\zeta]^2\}. \qquad (5)$$

Видно, что уравнение (5) отличается от уравнения (4) только знаком правой части и очевидными переобозначениями. Поэтому точные решения уравнения (5) можно получить из точных решений уравнения (4), заменив t на $-t$ и сделав соответствующие переобозначения.

ДВУМЕРНЫЕ РЕДУКЦИИ, ОСНОВАННЫЕ НА ИНВАРИАНТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ

1. Переходя в (1) к переменным типа бегущей волны

$$u = U(\xi, \eta), \ \ \xi = x - a_1t, \ \ \eta = y - a_2t, \qquad (6)$$

где a_1 и a_2 – произвольные постоянные, приходим к двумерному уравнению типа Монжа–Ампера с постоянными коэффициентами

$$-a_1U_\xi - a_2U_\eta = U^2_{\xi\eta} - U_{\xi\xi}U_{\eta\eta}. \qquad (7)$$

Уравнение (7) допускает точные решения, квадратичные по любой независимой переменной, вида

$$U_1 = f_1(\xi)\eta^2 + g_1(\xi)\eta + h_1(\xi),$$
$$U_2 = f_2(\eta)\,\xi^2 + g_2(\eta)\,\xi + h_2(\eta), \qquad (8)$$

где функции f_i, g_i, h_i (i = 1, 2) описываются соответствующими одномерными системами ОДУ, которые здесь опускаются.

2. Переходя в (1) к переменным автомодельного типа

$$u = t^{-2\alpha-2\beta-1}U(\xi, \eta),\ \ \xi = xt^{\alpha},\ \ \eta = yt^{\beta}, \qquad (9)$$

где α и β – произвольные постоянные, получим двумерное уравнение типа Монжа–Ампера с переменными коэффициентами при младших производных

$$\alpha\xi U_\xi + \beta\eta U_\eta - (2\alpha + 2\beta + 1)U = U^2_{\xi\eta} - U_{\xi\xi}U_{\eta\eta}. \qquad (10)$$

Уравнение (10) допускает точные решения, квадратичные по любой независимой переменной, вида (8).

3. Переходя в (1) к переменным предельного автомодельного типа

$$u = e^{-2(\alpha+\beta)t}U(\xi, \eta),\ \ \ \xi = xe^{\alpha t},\ \ \eta = ye^{\beta t}, \qquad (11)$$

где α и β – произвольные постоянные, получим другое двумерное уравнение типа Монжа–Ампера с переменными коэффициентами при младших производных

$$\alpha\xi U_\xi + \beta\eta U_\eta - 2(\alpha + \beta)U = U^2_{\xi\eta} - U_{\xi\xi}U_{\eta\eta}. \qquad (12)$$

Уравнение (12) допускает точные решения, квадратичные по любой независимой переменной, вида (8).

4. Переходя в (1) к инвариантным переменным

$$u = U(\xi, \eta)/t,\ \ \ \xi = x + \lambda_1 \ln(t),\ \ \ \eta = y + \lambda_2 \ln(t), \qquad (13)$$

где λ и λ_2 – произвольные постоянные, получим еще одно двумерное уравнение типа Монжа–Ампера с постоянными коэффициентами

$$\lambda U_\xi + \lambda_2 U_\eta - U = U^2_{\xi\eta} - U_{\xi\xi}U_{\eta\eta}. \qquad (14)$$

Уравнение (14) допускает точные решения типа бегущей волны, а также решения, квадратичные по любой независимой переменной, вида (8).

Замечание 1. Более сложные двумерные редукции уравнения (1) можно получить, заменив в (6), (9), (11), (13) пространственные переменные их произвольными линейными комбинациями по правилу $x \Rightarrow a_1x + b_1y$ и $y \Rightarrow a_2x + b_2y$.

РЕДУКЦИИ С ОБОБЩЕННЫМ РАЗДЕЛЕНИЕМ ПЕРЕМЕННЫХ, ПРИВОДЯЩИЕ К НЕОДНОРОДНЫМ УРАВНЕНИЯМ МОНЖА–АМПЕРА

1. Уравнение (1) имеет решения с аддитивным разделением переменных вида

$$u = -At + \omega(x, y), \qquad (15)$$

где A – произвольная постоянная, а функция ω описывается неоднородным уравнением Монжа–Ампера с постоянной правой частью

$$\omega_{xx}\,\omega_{yy} - \omega^2_{xy} = -A. \qquad (16)$$

2. Нетрудно проверить, что уравнение (1) допускает точное решение с аддитивным разделением переменных вида (15), которое выражается в элементарных функциях

$$u = C_1x^2 + C_2xy + C_3y^2 + C_4x + C_5y + (4C_1C_3 - C^2_2)\,t + C_6, \qquad (17)$$

где C_1, ..., C_6 – произвольные постоянные.

3. Используя результаты [7], можно получить, например, следующие точные решения вида (15) уравнения (1):

$$u = -At \pm \frac{\sqrt{A}}{C_2}x(C_1x + C_2y) + \varphi(C_1x + C_2y) + C_3x + C_4y + C_5,$$

$$u = -At \pm \frac{1}{x + C_1}\left(C_2y^2 + C_3y + \frac{C_3^2}{4C_2}\right) - \frac{A}{12C_2}(x^3 + 3C_1x^2) + C_4y + C_5x + C_6,$$

$$u = -At \pm \frac{2\sqrt{A}}{3C_1C_2}(C_1x - C_2^2y^2 + C_3)^{3/2} + C_4x + C_5y + C_6,$$

где C_1, ..., C_6 – произвольные постоянные, $\varphi = \varphi(z)$ – произвольная функция.

Замечание 2. При $A > 0$ общее решение неоднородного уравнения Монжа–Ампера (16) можно представить в параметрическом виде [4, 7].

4. Уравнение (1) допускает более сложные, чем (15), решения с обобщенным разделением переменных вида

$$u = -(ax + by + c)t + \omega(x, y), \qquad (18)$$

где a, b, c – произвольные постоянные, а функция ω описывается неоднородным уравнением Монжа–Ампера с переменной правой частью

$$\omega_{xx}\omega_{yy} - \omega^2_{xy} = -ax - by - c. \qquad (19)$$

При $b = 0$ уравнение (19) имеет, например, точные решения

$$\omega = \pm\frac{2}{3a}y(ax+c)^{3/2} + \varphi(x) + C_1 y, \qquad (20)$$

где $\varphi(x)$ – произвольная функция.

РЕДУКЦИЯ С РАЗДЕЛЕНИЕМ ПЕРЕМЕННЫХ, ПРИВОДЯЩАЯ К ЛИНЕЙНОМУ УРАВНЕНИЮ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

1. Уравнение (1) допускает решения с обобщенным разделением переменных вида

$$u = \frac{1}{2}ax^2 + bxy + \frac{1}{2}cy^2 + dy + (ac-b^2)t + U(x,t), \qquad (21)$$

где a, b, c, d – произвольные постоянные, а функция $U = U(x,t)$ описывается линейным уравнением теплопроводности

$$U_t = cU_{xx}. \qquad (22)$$

2. О решениях уравнения (22) при произвольных начальных и граничных условиях см., например, в [22, 23]. В [23] приведен большой список простых точных решений линейного уравнения теплопроводности, которые выражаются в элементарных функциях. Для иллюстрации сказанного приведем несколько решений уравнения (22), которые содержат экспоненциальные и тригонометрические функции:

$$U = C_1 \exp(c\mu^2 t \pm \mu x) + C_2,$$
$$U = C_1 \exp(-c\mu^2 t)\cos(\mu x) + C_2,$$
$$U = C_1 \exp(-c\mu 2t)\sin(\mu x) + C_2,$$
$$U = C_1 \exp(-\mu x)\cos(\mu x - 2\mu^2 t) + C_2,$$
$$U = C_1 \exp(-\mu x)\sin(\mu x - 2\mu^2 t) + C_2,$$

где C_1, C_2, μ – произвольные постоянные.

РЕДУКЦИИ, КВАДРАТИЧНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ОДНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Уравнение (1) имеет решения с обобщенным разделением переменных, квадратичные относительно любой пространственной переменной, например

$$u = y^2 f(x,t) + yg(x,t) + h(x,t), \qquad (23)$$

где функции $f = f(x, t)$, $g = g(x, t)$, $h = h(x, t)$ описываются системой уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными

$$f_t = 2ff_{xx} - 4f^2_x,\ \ g_t = 2fg_{xx} - 4f_x g_x,$$
$$h_t = 2fh_{xx} - g^2_x. \qquad (24)$$

Здесь первое уравнение для f нелинейно и изолированно (т.е. не зависит от других уравнений), а два других уравнения линейны относительно искомых функций g и h (причем уравнение для g однородно, а уравнение для h – неоднородно).

Отметим, что заменой $f = \xi^{-1/2}$ первое уравнение (24) сводится к нелинейному уравнению теплопроводности специального вида

$$\xi_t = 2(\xi^{-1/2}\xi_x)_x, \qquad (25)$$

которое допускает много точных решений (см., например, [7]).

2. Последние два уравнения системы (24) имеют тривиальное решение $g = h = 0$. Справедливо также более общее утверждение.

Утверждение. Пусть $f = f(x, t)$ – любое решение первого уравнения (24). Тогда последние два уравнения системы (24) допускают частные решения

$$g = C_1 f + C_2,\ \ h = \frac{1}{4}C_1^2 f + C_3, \qquad (26)$$

Это утверждение доказывается путем подстановки функций (26) в последние два уравнения системы (24) и сравнением полученных выражений с первым уравнением (24).

3. Простейшим решением первого уравнения (24) является константа

$$f = \frac{1}{2}a, \qquad (27)$$

где a – произвольная постоянная. В этом случае последние два уравнения (24) являются линейными уравнениями теплопроводности

$$g_t = ag_{xx}, \quad h_t = ah_{xx} - g^2_x. \qquad (28)$$

первое из которых однородно, а второе – неоднородно. Решения этих уравнений можно получить для произвольных начальных и граничных условиях (см., например, в [22, 23]).

Отметим, что первое уравнение (28) имеет вырожденное стационарное решение $g = bx$, где b – произвольная постоянная. Большой список других простых точных решений этого уравнения, которые выражаются в элементарных функциях, можно найти в [23].

Приведем простые решения типа бегущей волны уравнений (28), содержащие экспоненциальные функции:

$$g = C_1 \exp(kx + ak^2 t),$$
$$h = C_2 \exp(kx + ak^2 t) + \frac{C_1^2}{2a} \exp[2(kx + ak^2 t)], \qquad (29)$$

где C_1, C_2, k – произвольные постоянные. Подставляя (27) и (29) в формулу (23), получим точное решение исходного уравнения (1).

4. Первое уравнение (24) имеет стационарное решение

$$f = \frac{1}{C_1 x + C_2}, \qquad (30)$$

а также более сложное нестационарное трехпараметрическое точное решение с обобщенным разделением переменных

$$f = \frac{(x + C_1)^2}{12(t + C_2)} + C_3 (t + C_2)^{1/3}, \qquad (31)$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

5. Система (24) допускает точное решение типа бегущей волны

$$f = f(z), \quad g = g(z), \quad h = h(z),$$
$$z = kx - \lambda t, \qquad (32)$$

где k и λ – произвольные постоянные. Решение соответствующего автономного ОДУ для функции f (которое сводится к линейному ОДУ первого порядка) можно выразить в элементарных функциях.

РЕДУКЦИИ К УРАВНЕНИЮ ТИПА МОНЖА–АМПЕРА В НОВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ТИПА БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

1. Уравнение (1) допускает решения с обобщенным разделением переменных комбинированного типа

$$u = C_1 x^2 + C_2 xy + C_3 y^2 + C_4 x + C_5 y + C_6 t + U(\xi, \eta),$$
$$\xi = a_1 x + b_1 y - \lambda_1 t, \quad \eta = a_2 x + b_2 y - \lambda_2 t, \qquad (33)$$

где C_i, a_j, b_j, λ_j ($i = 1, \dots, 6$; $j = 1, 2$) – произвольные постоянные; ξ и η – новые переменные типа бегущей волны, а функция $U = U(\xi, \eta)$ описывается двумерным уравнением типа Монжа–Ампера

$$\begin{aligned} C_6 - \lambda_1 U_\xi - \lambda_2 U_\eta &= 4C_1C_3 - C_2^2 + \\ &+ (a_1 b_2 - b_1 a_2)^2 (U_{\xi\xi} U_{\eta\eta} - U_{\xi\eta}^2) + \\ &+ 2(a_1^2 C_3 + b_1^2 C_1 - a_1 b_1 C_2) U_{\xi\xi} + \\ &+ 2(a_2^2 C_3 + b_2^2 C_1 - a_2 b_2 C_2) U_{\eta\eta} + \\ &+ 2[(2a_1a_2C_3 + 2b_1b_2C_1) - (a_1b_2 + b_1a_2)C_2] U_{\xi\eta}. \end{aligned} \qquad (34)$$

2. Уравнение (34) допускает точные решения, квадратичные по любой независимой переменной типа бегущей волны, вида

$$U_1 = f_1(\xi)\eta^2 + g_1(\xi)\eta + h_1(\xi),$$
$$U_2 = f_2(\eta)\xi^2 + g_2(\eta)\xi + h_2(\eta),$$

где функции f_i, g_i, h_i ($i = 1, 2$) описываются соответствующими одномерными системами ОДУ, которые здесь опускаются.

3. Рассмотрим специальный случай (33) – (34), положив

$$a_1 = a,\ b_1 = b,\ \lambda_1 = \lambda,\ a_2 = b_2 = 0,\ \lambda_2 = -1,\ \eta = t,$$

что соответствует решению вида

$$u = C_1 x^2 + C_2 xy + C_3 y^2 + C_4 x + C_5 y + C_6 t + U(\xi, t),$$
$$\xi = ax + by - \lambda t, \qquad (35)$$

где C_i, a, b, λ ($i = 1, \dots, 6$) – произвольные постоянные. В этом случае функция $U = U(\xi, t)$ описывается линейным уравнением типа конвективной теплопроводности с постоянным источником

$$\begin{aligned} U_t &= 2(a^2 C_3 + b^2 C_1 - abC_2) U_{\xi\xi} + \\ &+ \lambda U_\xi + 4C_1C_3 - C_2^2 - C_6. \end{aligned} \qquad (36)$$

4. В частности, взяв в (35)–(36) функцию U с одним аргументом ξ и положив $C_6 = 4C_1C_3 - -C_2^2$, приходим к линейному ОДУ с постоянными коэффициентами

$$2(a^2 C_3 + b^2 C_1 - abC_2) U''_{\xi\xi} + \lambda U'_\xi = 0,$$

общее решение которого выражается через экспоненту

$$U(\xi) = A_1 \exp\left[-\frac{\lambda}{2(a^2 C^3 + b^2 C_1 - abC_2} \xi \right] + A_2, \qquad (37)$$

где A_1 и A_2 – произвольные постоянные.

РЕДУКЦИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НОВОЙ ПЕРЕМЕННОЙ, ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ КООРДИНАТАМ

1. В переменных, одна из которых время, а другая задается параболической функцией по пространственным переменным

$$u = U(z, t), \quad z = y + ax^2, \qquad (38)$$

где a – произвольная постоянная, уравнение (1) редуцируется к двумерному уравнению

$$U_t = 2aU_z U_{zz}, \qquad (39)$$

которое встречается в теории нелинейной фильтрации жидкости в пористых средах. Ниже рассмотрены некоторые классы точных решений, которые допускает уравнение (39).

2. Редуцированное уравнение (39) имеет простое частное решение, пропорциональное произведению подходящих степеней независимых переменных

$$U = -\frac{z^3}{36at}.$$

3. Редуцированное уравнение (39) допускает решение с аддитивным разделением переменных

$$U = C_1(z + C_2)^{3/2} + \frac{9}{4}aC_1^2 t + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

4. Редуцированное уравнение (39) допускает решение типа бегущей волны

$$U = U(\xi), \quad \xi = z - \lambda t \equiv y + ax^2 - \lambda t,$$

где функция $U = U(\xi)$ удовлетворяет простому линейному ОДУ с постоянными коэффициентами $2aU''_{\xi\xi} + \lambda = 0$, общее решение которого имеет вид

$$U = -\frac{\lambda}{4a}\xi^2 + C_1\xi + C_2.$$

Замечание 3. Более общее решение уравнения (39) можно получить, если искать решение в виде

$$U = Ct + W(\xi), \quad \xi = z - \lambda t \equiv y + ax^2 - \lambda t.$$

5. Редуцированное уравнение (39) имеет автомодельное решение

$$U = t^{-3\beta-1}\, W(\xi), \quad \xi = z\, t^{\beta},$$

где β – произвольная постоянная, а функция $W = W(\xi)$ описывается ОДУ

$$-(3\beta + 1)W + \beta\xi W'_\xi = 2aW'_\xi\, W''_{\xi\xi}.$$

При $\beta = -1/3$ общее решение последнего уравнения имеет вид

$$W = -\frac{1}{36a}\xi^3 + C_1\xi + C_2,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

6. Редуцированное уравнение (39) допускает предельное автомодельное решение

$$U = e^{-3\beta t} W(\xi), \quad \xi = e^{\beta t} z,$$

где β – произвольная постоянная, а функция $W = W(\xi)$ описывается ОДУ

$$3\beta W + \beta\xi W'_\xi = 2aW'_\xi\, W''_{\xi\xi}.$$

7. Редуцированное уравнение (39) имеет другое инвариантное решение вида

$$U = t^{-1} W(\xi), \quad \xi = z + \lambda \ln t,$$

где λ – произвольная постоянная, а функция $W = W(\xi)$ описывается автономным ОДУ

$$-W + \lambda W'_\xi = 2aW'_\xi\, W''_{\xi\xi}.$$

8. Редуцированное уравнение (39) допускает точное решение в виде кубического полинома по z [11, 12]:

$$U = \psi_1(t) + \psi_2(t)z + \psi_3(t)z^2 + \psi_4(t)z^3,$$

где функции $\psi_n(t)$ $(n = 1, \ldots, 4)$ описываются системой ОДУ

$$\psi'_1 = 4a\psi_2\psi_3, \quad \psi'_2 = 4a(3\psi_2\psi_4 + 2\psi_3^2),$$
$$\psi'_3 = 36a\psi_3\psi_4, \quad \psi'_4 = 36a\psi_4^2.$$

9. Редуцированное уравнение (39) имеет также точное решение с обобщенным разделением переменных более экзотического вида [11, 12]:

$$U = \vartheta_1(t) + \vartheta_2(t)z^{3/2} + \vartheta_3(t)z^3,$$

где функции $\vartheta_n(t)$ $(n = 1, 2, 3)$ описываются системой ОДУ

$$\vartheta'_1 = \frac{9}{4}a\,\vartheta_2^2, \;\; \vartheta'_2 = \frac{45}{2}a\vartheta_2\vartheta_3, \;\; \vartheta'_3 = 36a\vartheta_3^2.$$

Эту систему нетрудно проинтегрировать в обратном порядке, начиная с последнего уравнения.

РЕДУКЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НОВОЙ ПЕРЕМЕННОЙ КВАДРАТИЧНОГО ВИДА ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ КООРДИНАТАМ

1. В переменных, одна из которых – время, а другая квадратична относительно пространственных переменных

$$u = U(z, t), \;\; z = ax^2 + bxy + cy^2 + kx + sy, \quad (40)$$

где a, b, c, k, s – произвольные постоянные, уравнение (1) редуцируется к двумерному уравнению

$$U_t = 2[(4ac - b^2)z + as^2 + ck^2 - bks]U_z U_{zz} + +(4ac - b^2)U_z^2. \quad (41)$$

Отметим, что в зависимости от знаков коэффициентов квадратичных слагаемых a, b, c в (40), кривая z = const может быть как эллипсом, так и гиперболой (или параболой в вырожденном случае при $4ac - b^2 = 0$).

Рассмотрим некоторые классы точных решений, которые допускает уравнение (41).

2. Редуцированное уравнение (41) допускает решения с аддитивным разделением переменных

$$U = Ct + \zeta(z),$$

где C – произвольная постоянная, а функция $\zeta = \zeta(z)$ описывается нелинейным ОДУ:

$$2[(4ac - b^2)z + as^2 + ck^2 - bks]\, \zeta'_z \zeta''_{zz} + + (4ac - b^2)(\zeta'_z)^2 = C,$$

которое легко интегрируется, поскольку допускает понижение порядка с помощью стандартной подстановки $\omega(z) = \zeta'_z$. Отметим, что полученное ОДУ имеет частное решение в виде квадратичного многочлена.

3. Редуцированное уравнение (41) допускает решения, квадратичные относительно z:

$$U = \varphi_2(t)z^2 + \varphi_1(t)z + \varphi_0(t),$$

где функции $\varphi_i(t)$ описываются системой ОДУ, которая здесь опускается.

4. При $4ac - b^2 \neq 0$ редуцированное уравнение (41) допускает решения квазиавтомодельного вида

$$U = t^{-2\beta-1}V(\eta), \quad \eta = [(4ac - b^2)z + as^2 + ck^2 - bks]t^{\beta}, \quad (42)$$

где β – произвольная постоянная, а функция $V = V(\eta)$ удовлетворяет нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$-(2\beta + 1)V + \beta\eta V'_\eta = 2A^3\eta V'_\eta V''_\eta + A^3(V'_\eta)^2, \quad A = 4ac - b^2. \quad (43)$$

Уравнение (43) допускает частное решение в виде квадратичного многочлена. В частности, оно имеет простое решение

$$V = -\frac{1}{12}A^{-3}\eta^2, \quad A = 4ac - b^2, \quad (44)$$

которое не зависит от параметра β.

5. Отметим, что при $4ac - b^2 > 0$ преобразование

$$t = t, \quad \rho = \left| z + \frac{as^2 + ck^2 - bks}{4ac - b^2} \right|^{1/2},$$
$$U = \frac{4}{4ac - b^2} W(t, \rho),$$

приводит уравнение (41) к каноническому виду

$$W_t = \rho^{-1} W_\rho W_{\rho\rho}. \quad (45)$$

6. Уравнение (45) имеет простое точное решение

$$W = -\frac{\rho^4}{48t}. \quad (46)$$

Используя решение (46) и результаты [19, 20] (см. второе утверждение), из (45) получим

$$W = e^{-4\lambda t}\Phi(\zeta), \quad \zeta = \rho e^{\lambda t}, \quad (47)$$

где λ – произвольная постоянная, а функция $\Phi = \Phi(\zeta)$ удовлетворяет нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$-4\lambda\Phi + \lambda\zeta\Phi'_\zeta = \zeta^{-1}\Phi'_\zeta\Phi''_{\zeta\zeta}$$

порядок которого можно понизить на единицу.

7. Уравнение (45) имеет также точное решение с обобщенным разделением переменных полиномиального вида

$$W = \theta_1(t) + \theta_2(t)\rho^2 + \theta_3(t)\rho^4, \quad (48)$$

где функции $\theta_n(t)$ (n = 1, 2, 3) описываются системой ОДУ

$$\theta'_1 = 4\theta_2^2, \quad \theta'_2 = 32\theta_2\theta_3, \quad \theta'_3 = 48\theta_3^2.$$

Эту систему нетрудно проинтегрировать в обратном порядке, начиная с последнего уравнения.

Замечание 4. Уравнение (45) с точностью до обозначений совпадает с уравнением (49), точные решения которого (отличные от указанных выше в пп. 6 и 7) приведены далее.

РЕДУКЦИИ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ В ПОЛЯРНЫХ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

1. Уравнение (3), записанное в полярных координатах r, φ, допускает точные решения, не зависящие от угловой переменной, которые описываются двумерным уравнением

$$u_t = r^{-1}u_r u_{rr}, \quad (49)$$

которое с точностью до обозначений совпадает с уравнением (45) (некоторые его точные решения описаны ранее в пп. 6 и 7).

2.Уравнение (49) имеет точное решение с аддитивным разделением переменных

$$u = C_1 C_2^2 t + C_2 \int \sqrt{C_1 r^2 + C_3}\, dr + C_4,$$

где C_1, ..., C_4 – произвольные постоянные (при различных знаках константы C_1 интеграл в правой части выражается через разные элементарные функции).

3. Уравнение (49) допускает автомодельное решение

$$u = t^{-4\beta-1} F(z), \quad z = rt^{\beta},$$

где β – произвольная постоянная, а функция $F = F(z)$ описывается ОДУ

$$-(4\beta+1)F + \beta z F'_z = z^{-1} F'_z F''_{zz}.$$

Это уравнение можно проинтегрировать при $\beta = -1/4$.

4. Уравнение (3) имеет также точные решения с разделением переменных вида

$$u = r^4 v(\varphi, t), \qquad (50)$$

где функция $v = v(\varphi, t)$ описывается двумерным уравнением

$$v_t = 12v(v_{\varphi\varphi} + 4v) - 9v_{\varphi}^2. \qquad (51)$$

5. Поскольку уравнение (51) не зависит явно от независимых переменных, то оно имеет решение типа бегущей волны

$$v = v(Z),\ Z = \varphi - \lambda t,$$

где λ – произвольная постоянная, а функция $v = v(Z)$ описывается автономным ОДУ

$$12v(v''_{ZZ} + 4v) - 9(v'z)^2 + \lambda v'_Z = 0.$$

6. Уравнение (51) допускает также решение с простым разделением переменных вида

$$v = (t + C)^{-1} V(\varphi),$$

где C – произвольная постоянная, а функция $V = V(\varphi)$ описывается автономным ОДУ

$$12V(V''_{\varphi\varphi} + 4V) - 9(V'_{\varphi})^2 + V = 0.$$

7. Уравнение (3), записанное в полярных координатах r, φ, допускает точные решения с неполным разделением переменных вида

$$u = \frac{1}{t + C} W(r, \varphi),$$

где функция W описывается двумерным уравнением

$$r^{-2} W_{rr}(W_{\varphi\varphi} + rW_r) - [(r^{-1}W_{\varphi})_r]^2 + W = 0.$$

8. Поскольку уравнения в полярных и эллиптических координатах (3) и (4) отличаются только постоянным множителем в правой части, то точные решения уравнения (4) можно получить из решений уравнения (3), заменив в них переменную t по правилу $t \Rightarrow (ab)^{-2} t$.

КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Исследуется нелинейное уравнение в частных производных с тремя независимыми переменными вида $u_t = u_{xx}u_{yy} - u^2_{xy}$, которое описывает локальные нестационарные движения плазмы в электронной магнитной гидродинамике. Рассматриваются инвариантные многопараметрические преобразования, сохраняющие вид этого уравнения. Описаны двух- и одномерные редукции, приводящие его к более простым уравнениям с частными производными с двумя независимыми переменными (в том числе к стационарным уравнениям типа Монжа–Ампера и линейным или нелинейным нестационарным уравнениям теплопроводности) или обыкновенным дифференциальным уравнениям. Получен ряд решений с обобщенным разделением переменных, которые выражаются в элементарных функциях, а также некоторые другие точные решения.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 123021700057-0).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Smirnov V.V., Chukbar K.V.* «Phonons» in two-dimensional vortex lattices // Journal of Experimental and Theoretical Physics, 2001. V. 93. № 1. P. 126–135.

2. *Zaburdaev V.Yu., Smirnov V.V., Chukbar K.V.* Nonlinear dynamics of electron vortex lattices // Plasma Physics Reports, 2014. V. 30. № 3. P. 214–217.

3. *Ohkitani K., Sultu F.Al.* Singularity formation in the Smirnov–Chukbar–Zaburdaev equation for the deformation of vortex lattices // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2013. V. 46. № 20. P. 205501.

4. *Гурса Э.* Курс математического анализа. Т. 3. Ч. 1. М.: Гостехиздат, 1933.

5. *Хабиров С.В.* Неизэнтропические одномерные движения газа, построенные с помощью контактной группы неоднородного уравнения Монжа – Ампера // Математический сборник, 1990. V. 181. № 12. P. 1607–1622.

6. *Ibragimov N.H. (ed.).* CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, vol.1, Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws. Boca Raton: CRC Press, 1994.

7. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.

8. *Dubinov A.E., Kitayev I. N.* New exact solutions of the equation of non-linear dynamics of a lattice of electronic vortices in plasma in the framework of electron magnetohydrodynamics // Magnetohydrodynamics, 2020. V. 56. № 4. P. 369–375.

9. *Ovsiannikov L.V.* Group Analysis of Differential Equations. New York: Academic Press, 1982.

10. *Olver P.J.* Application of Lie Groups to Differential Equations, 2nd ed. NewYork: Springer-Verlag, 2000.

11. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005.

12. *Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R.* Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics. Chapman & Hall / CRC Press, Boca Raton, 2007.

13. *Полянин А.Д.,Журов А.И.* Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики. М.: ИПМех РАН, 2020.

14. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear PDEs. Boca Raton–London: CRC Press, 2022.

15. *Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н.* Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984.

16. *Kudryashov N.A.* Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations // Chaos,S olitons and Fractals. 2005. V. 24. № 5. P. 1217–1231.

17. *Кудряшов Н.А.* Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Изд. дом «Интеллект», 2010.

18. Полянин А.Д., Аксенов А.В. Использование простых решений нелинейных уравнений математической физики для построения более сложных решений // Вестник НИЯУ«МИФИ», 2020. Т. 9. № 5. P. 420–437.

19. *Aksenov A.V., Polyanin A.D.* Methods for constructing complex solutions of nonlinear PDEs using simpler solutions // Mathematics, 2021. V. 9. № 4, 345.

20. *Аксенов А.В., Полянин А.Д.* Обзор методов построения точных решений уравнений математической физики, основанных на использовании более простых решений // Теоретическая и математическая физика, 2022. V. 211. № 2. C. 149–180. DOI: https://doi.org/10.4213/tmf10247

21. *Polyanin A.D., Sorokin V.G., Zhurov A.I.* Delay Ordinary and Partial Differential Equations. Boca Raton: CRC Press, 2024.

22. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.

23. *Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E.* Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists, 2^{nd} ed. Boca Raton–London: CRC Press, 2016.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta «MIFI», 2023, vol. 12, no. 4, pp. 201–210

TRANSFORMATIONS, REDUCTIONS AND EXACT SOLUTIONS OF A HIGHLY NONLINEAR EQUATION OF ELECTRON MAGNETOHYDRODYNAMICS

A.D. Polyanin*

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences,Moscow, 119526 Russia

**e-mail: polyanin@ipmnet.ru*

Received September 27, 2023; revised September 28, 2023; accepted October 10, 2023

A strongly nonlinear partial differential equation with three independent variables of the form $u_t = u_{xx}u_{yy} - u^2_{xy}$, which occurs in electron magnetohydrodynamics, isconsidered. Multiparameter transformations that preserve the form of this equation are described, as well as two- and one-dimensional reductions that lead to simpler partial differential equations with two independent variables (including stationary equations of the Monge–Ampere type and nonstationary heat equations) or ordinary differential equations. By methods of generalized separation of variables, exact solutions are constructed, many of which admit representation in elementary functions. More complex solutions are also considered, which are expressed in terms of solutions of linear diffusion-type equations.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, РЕДУКЦИИ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО
СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОННОЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Keywords: nonlinear partial differential equations, exact solutions, one-dimensional and two-dimensional reductions, generalized separable solutions, Monge–Ampere type equations, magnetohydrodynamics, nonlinear heat equations, diffusion-type equations.

REFERENCES

1. *Smirnov V.V., Chukbar K.V.* «Phonons» in two-dimensional vortex lattices. Journal of Experimental and Theoretical Physics, 2001. Vol. 93. No. 1. P. 126–135.

2. *Zaburdaev V.Yu., Smirnov V.V., Chukbar K.V.* Nonlinear dynamics of electron vortex lattices. Plasma Physics Reports, 2014. Vol. 30. No. 3. Pp. 214–217.

3. *OhkitaniK., Sultu F. Al.* Singularity formation in the Smirnov–Chukbar–Zaburdaev equation for the deformation of vortex lattices. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2013. Vol. 46. No. 20. P. 205501.

4. *Goursat E.* A Course of Mathematical Analysis. Vol. 3. Part 1, Moscow, Gostekhizdat Publ. 1933 (in Russian).

5. *Khabirov S.V.* Neizentropicheskie odnomernye dvizheniya gaza, postroennye s pomoshch'yu kontaktnoj gruppy neodnorodnogo uravneniya Monzha-Ampera [Nonisentropic one-dimensional gas motions obtained with the help of the contact group of the nonhomogeneous Monge–Amp`ere equation]. Matematicheskij sbornik, 1990. Vol. 181. No. 12. Pp. 1607–1622 (in Russian).

6. *Ibragimov N.H. (ed.).* CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, vol.1, Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws. Boca Raton: CRC Press, 1994.

7. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.

8. *Dubinov A.E., Kitayev I.N.* New exact solutions of the equation of non-linear dynamics of a lattice of electronic vortices in plasma in the framework of electron magnetohydrodynamics. Magnetohydrodynamics, 2020. Vol. 56. No. 4. Pp. 369–375.

9. *Ovsiannikov L.V.* Group Analysis of Differential Equations. New York: Academic Press, 1982.

10. *Olver P.J.* Application of Lie Groups to Differential Equations, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2000.

11. *Polyanin A.D., Zaitsev A.I., Zhurov A.I.* Metody resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki i mekhaniki [Solution Methods for Nonlinear Equations of Mathematical Physics and Mechanics], Moscow, Fizmatlit Publ., 2005.

12. *Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R.* Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics. Chapman & Hall / CRC Press, Boca Raton, 2007.

13. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Metody razdeleniya peremennyh i tochnye resheniya nelinejnyh uravnenij matematicheskoj fiziki [Methods of Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear Equations of Mathematical Physics], Moscow IPMech RAS Publ., 2020.

14. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear PDEs. Boca Raton–London: CRC Press, 2022.

15. *Sidorov A.F., Shapeev V.P., Yanenko N.N.* Metod differencial'nyh svyazej I ego prilozheniya v gazovoj dinamike [Method of Differential Constraints and its Applications in Gas Dynamics], Novosibirsk: Nauka Publ., 1984.

16. *Kudryashov N.A.* Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations. Chaos, Solitons and Fractals. 2005. Vol. 24. No. 5. Pp. 1217–1231.

17. *Kudryashov N.A.* Metody nelinejnoj matematicheskoj fiziki [Methods of Nonlinear Mathematical Physics], Dolgoprudnyi: Izd. Dom Intellekt Publ., 2010.

18. *Polyanin A.D., Aksenov A.V.* Ispol'zovanie prostyh reshenij nelinejnyh uravnenij matematicheskoj fiziki dlya postroeniya bolee slozhnyh reshenij [Using simple solutions of nonlinear equations of mathematical physics to construct more complex solutions]. Vestnik NIYaU MIFI, 2020. Vol. 9. No. 5. Pp. 420–437 (in Russian).

19. *Aksenov A.V., Polyanin A.D.* Methods for constructing complex solutions of nonlinear PDEs using simpler solutions. Mathematics, 2021. Vol. 9. No. 4, 345.

20. *Aksenov A.V., Polyanin A.D.* Obzor metodov postroeniya tochnyh reshenij uravnenij matematicheskoj fiziki, osnovannyh na ispol'zovanii bolee prostyh reshenij [Review of methods for constructing exact solutions of equations of mathematical physics based on simpler solutions]. Theoretical and Mathematical Physics, 2022. Vol. 211. No. 2. Pp. 149–180 (in Russian) DOI: https://doi.org/10.4213/tmf10247

21. *Polyanin A.D., Sorokin V.G., Zhurov A.I.* Delay Ordinary and Partial Differential Equations. Boca Raton: CRC Press, 2024.

22. *Tikhonov A.N., Samarskii A.A.* Uravneniya matematicheskoj fiziki [Equations of Mathematical Physics], Moscow: Nauka Publ., 1972.

23. *Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E.* Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists, 2nd ed. Boca Raton–London: CRC Press, 2016.