

УДК 517.95

РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА КЛЕЙНА–ГОРДОНА С ПОСТОЯННЫМ И ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В.Г. Сорокин

ФГСБУН Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук,
Москва, 119526, Россия
e-mail: vsesor@gmail.com

Поступила в редакцию 19.09.2023

После доработки: 19.09.2023

Принята к публикации: 26.09.2023

Рассматриваются одномерные линейные однородные уравнения типа Клейна–Гордона с постоянным и пропорциональным запаздыванием, которые помимо искомой функции $u(x, t)$ содержат функцию с постоянным запаздыванием вида $u(x, t - \tau)$, где $\tau > 0$ – постоянное запаздывание, или функцию с пропорциональным запаздыванием вида $u(x, pt)$, где p – коэффициент пропорциональности. Приводятся выраженные в элементарных функциях точные решения таких уравнений. Сформулированы начально-краевые задачи с начальными данными общего вида и однородными граничными условиями первого, второго и третьего рода, а также смешанными граничными условиями. Приводится подробное описание решения этих задач с помощью метода разделения переменных. В результате получены аналитические формулы решений начально-краевых задач для линейных однородных уравнений типа Клейна–Гордона с постоянным и пропорциональным запаздыванием.

Ключевые слова: линейные однородные уравнения типа Клейна–Гордона, уравнения в частных производных с запаздыванием, уравнения в частных производных с пропорциональным запаздыванием, начально-краевые задачи, решения в замкнутом виде, точные решения.

DOI: 10.26583/vestnik.2023.294

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные уравнения с постоянным запаздыванием

Дифференциальные уравнения с запаздыванием применяются при математическом моделировании процессов, текущее состояние которых зависит в том числе от состояния в некоторый момент в прошлом. Такие уравнения помимо искомой функции $u(t)$ содержат функцию с запаздыванием $w = u(t - \tau)$, где t – время, $\tau > 0$ – время запаздывания. Простейшее обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) с постоянным запаздыванием имеет вид [1–4]:

$$u'_t = F(u, w), \quad w = u(t - \tau), \quad (1)$$

где F – некоторая функция.

Более сложные процессы с пространственной неоднородностью моделируются реакционно-диффузионными уравнениями с постоянным

запаздыванием (см. [5, 6], а также обзор публикаций в [7]):

$$u_t = au_{xx} + F(u, w), \quad w = u(x, t - \tau), \quad (2)$$

где $u = u(x, t)$, $a > 0$ – коэффициент диффузии; F – кинетическая функция.

В специальном случае $F(u, w) = f(w)$ в (2) можно говорить об инерционности процесса переноса субстанции в локально-неравновесной среде: реакция системы на некоторое воздействие является не мгновенной, как в классическом локально-равновесном случае, а запаздывает на время τ .

Замечание 1. Решения начально-краевых задач для реакционно-диффузионных уравнений типа (2) рассматривались в [7].

Уравнения типа Клейна–Гордона с запаздыванием имеют вид

$$u_{tt} = au_{xx} + F(u, w), \quad w = u(x, t - \tau), \quad (3)$$

где a – некоторая положительная константа ($\sqrt{a}$ – скорость); F – функция источника.

РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА КЛЕЙНА–ГОРДОНА С ПОСТОЯННЫМ И ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Эти уравнения также называют волновыми уравнениями с запаздыванием. Точные решения нелинейных уравнений типа Клейна–Гордона с запаздыванием построены с помощью метода функциональных связей в [8] (см. также [9, 10], где рассматривались более сложные гиперболические уравнения с запаздыванием телеграфного типа) и с помощью группового анализа в [11–13]. В [14] рассматриваются способы построения точных решений для уравнений с запаздыванием типа (3) (а также уравнений типа (2) и других уравнений) с помощью точных решений более простых уравнений в частных производных без запаздывания. Другие методы построения точных решений волновых уравнений с запаздыванием и сами точные решения описаны в [15, 16]. Численное интегрирование начально-краевых задач для нелинейных уравнений типа Клейна–Гордона с запаздыванием (3) с помощью комбинации метода прямых и методов решения систем ОДУ и сопоставление полученных численных решений с точными проводилось в [17].

Дифференциальные уравнения с пропорциональным запаздыванием

Уравнения вида (1), (2) и (3) можно усложнить, рассматривая переменное запаздывание $\tau = \tau(t)$ вместо постоянного. В частном случае $\tau(t) = (1 - p)t$, где p – коэффициент пропорциональности (чаще всего $0 < p < 1$, однако в литературе встречаются и случаи $p > 1$), имеем уравнения с пропорциональным запаздыванием. Например, ОДУ с пропорциональным запаздыванием имеет вид

$$u'_t = F(u, w), \quad w = u(pt) \quad (4)$$

и при $0 < p < 1$ часто называется уравнением пантографа [18]. Уравнения вида (4) и более сложные ОДУ с пропорциональным запаздыванием используются в описании процессов электродинамики [19], теории популяций [20], теории чисел [21], стохастических игр [22], теории графов [23], теории риска и очередей [24], теории искусственных нейронных сетей [25–27]. Важно отметить, что родственные ОДУ с пропорциональным запаздыванием при $p > 1$ используются в моделировании процессов биологии [28–30] и астрофизики [31].

Уравнения в частных производных с пропорциональным запаздыванием, а именно реакционно-диффузионные уравнения

$$u_t = au_{xx} + F(u, w), \quad w = u(x, pt) \quad (5)$$

и уравнения типа Клейна–Гордона

$$u_{tt} = au_{xx} + F(u, w), \quad w = u(x, pt) \quad (6)$$

встречаются в публикациях значительно реже, чем такие же уравнения с постоянным запаздыванием. В [32] получено асимптотическое решение линейного уравнения типа (5). В [33] методом разделения переменных построены точные решения линейных уравнений вида (5) и (6). Многие нелинейные уравнения с пропорциональным запаздыванием вида (5) и (6), допускающие редукции и точные решения с аддитивным, мультипликативным, обобщенным и функциональным разделением переменных рассматриваются в [34–37]. Приближенные аналитические методы решения некоторых линейных и нелинейных уравнений в частных производных с пропорциональным запаздыванием описаны в [38, 39]; численные методы – в [40, 41].

Виды рассматриваемых в статье уравнений

В статье рассматриваются линейные однородные уравнения типа Клейна–Гордона с постоянным запаздыванием

$$u_{tt} = a_1 u_{xx} + a_2 w_{xx} + c_1 u + c_2 w, \quad w = u(x, t - \tau), \quad (7)$$

где $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$, $a_1 + a_2 > 0$, $\tau > 0$, и с пропорциональным запаздыванием

$$u_{tt} = a_1 u_{xx} + a_2 w_{xx} + c_1 u + c_2 w, \quad w = u(x, pt), \quad (8)$$

где $0 < p < 1$.

Точные решения и решения начально-краевых задач с общими начальными данными и с граничными условиями первого, второго и третьего рода (а также смешанными граничными условиями) для уравнений типа (7) рассматриваются во второй части статьи, а для уравнений типа (8) – в третьей.

ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА КЛЕЙНА–ГОРДОНА С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Точные решения простейшего вида

Уравнения с постоянным запаздыванием вида (7) допускают точные решения, которые выражаются в элементарных функциях и описаны далее.

1. Решения с мультипликативным разделением переменных:

$$\begin{aligned} u &= [A \cos(kx) + B \sin(kx)] e^{-\lambda t}, \\ k &= \sqrt{(c_1 + c_2 e^{\lambda \tau} - \lambda^2) / (a_1 + a_2 e^{\lambda \tau})} \quad (9) \\ \text{при } c_1 + c_2 e^{\lambda \tau} - \lambda^2 &> 0; \\ u &= [A \exp(kx) + B \exp(-kx)] e^{-\lambda t}, \\ k &= \sqrt{-(c_1 + c_2 e^{\lambda \tau} - \lambda^2) / (a_1 + a_2 e^{\lambda \tau})} \\ \text{при } c_1 + c_2 e^{\lambda \tau} - \lambda^2 &< 0, \end{aligned}$$

где A, B, λ – произвольные постоянные. Заметим, что эти решения являются частными случаями более сложных решений с мультипликативным разделением переменных $u = \varphi(x)\psi(t)$.

Решение (9) является периодическим по пространственной переменной x и затухает при $t \rightarrow \infty$ (если $\lambda > 0$).

2. При некоторых ограничениях на параметры исходного уравнения существуют решения, которые являются периодическими по обоим независимым переменным x и t , вида

$$\begin{aligned} u &= [A_1 \cos(\gamma x) + B_1 \sin(\gamma x)] \times \\ &\times [A_2 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t)], \end{aligned}$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 – произвольные постоянные, а константы γ и ω определяются из трансцендентной системы уравнений

$$\begin{aligned} \omega^2 + c_1 + c_2 \cos(\omega \tau) &= [a_1 + a_2 \cos(\omega \tau)] \gamma^2, \\ (c_2 - a_2 \gamma^2) \sin(\omega \tau) &= 0. \end{aligned}$$

3. При некоторых ограничениях на параметры исходного уравнения существуют решения, периодические по времени t , вида

$$\begin{aligned} u &= [A_1 \operatorname{ch}(\gamma x) + B_1 \operatorname{sh}(\gamma x)] \times \\ &\times [A_2 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t)], \end{aligned}$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 – произвольные постоянные, а константы γ и ω определяются из трансцендентной системы уравнений

$$\begin{aligned} \omega^2 + c_1 + c_2 \cos(\omega \tau) &= -[a_1 + a_2 \cos(\omega \tau)] \gamma^2, \\ (c_2 + a_2 \gamma^2) \sin(\omega \tau) &= 0. \end{aligned}$$

4. Существуют другие решения, периодические по времени t :

$$u = e^{-\gamma x} [A \cos(\omega t - \beta x) + B \sin(\omega t - \beta x)],$$

где A, B, ω – произвольные постоянные, а параметры β и γ могут быть выражены через ω и параметры исходного уравнения путем решения

алгебраической системы уравнений, которая здесь не приводится.

5. Имеются решения полиномиального вида по x (содержащие соответственно четные и нечетные степени):

$$u = \sum_{k=0}^n A_k(t) x^{2k} \quad \text{и} \quad u = \sum_{k=0}^n B_k(t) x^{2k+1}.$$

Линейные начально-краевые задачи для уравнений типа Клейна–Гордона с постоянным запаздыванием

Предварительные замечания. Отметим основное отличие при постановке начально-краевой задачи для уравнений в частных производных с постоянным запаздыванием от более простых уравнений в частных производных без запаздывания. Дело в том, что начальные условия (начальные данные) в задачах для уравнений с постоянным запаздыванием $\tau > 0$ необходимо задавать на целом отрезке $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$ (а не в точке $t = t_0$, как в задачах без запаздывания). При этом искомое решение должно быть также непрерывно в точке $t = t_0$. Чаще всего используется начальная точка $t_0 = 0$, иногда встречается $t_0 = \tau$.

Граничные условия в начально-краевых задачах для уравнений в частных производных с запаздыванием формулируются точно так же, как и для уравнений в частных производных без запаздывания.

Решение линейных задач для уравнений в частных производных с запаздыванием можно вести с помощью метода разделения переменных или методов интегральных преобразований (по аналогии с задачами для линейных уравнений в частных производных без запаздывания [42, 43]).

Формулировки начально-краевых задач. Рассмотрим начально-краевую задачу для одномерного линейного однородного уравнения типа Клейна–Гордона с постоянными коэффициентами и запаздыванием (7) при согласованных начальных условиях общего вида

$$\begin{aligned} u &= \varphi(x, t) \quad \text{при } 0 < x < h, \quad -\tau \leq t \leq 0, \\ u_t &= \varphi_t(x, t) \quad \text{при } 0 < x < h, \quad -\tau \leq t \leq 0, \end{aligned} \quad (10)$$

и различных линейных однородных граничных условиях, которые запишем в компактной форме

РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ
ТИПА КЛЕЙНА–ГОРДОНА С ПОСТОЯННЫМ И ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

$$\begin{aligned}\Gamma_1[u] &= 0 \text{ при } x=0, t > -\tau; \\ \Gamma_2[u] &= 0 \text{ при } x=h, t > -\tau;\end{aligned}\quad (11)$$

где $0 < h < \infty$.

Наиболее распространенные однородные граничные условия приведены в табл. 1. В частности, в случае граничных условий первого рода в (11) надо взять $\Gamma_1[u] = \Gamma_2[u] = u$.

Предполагается, что функция φ , входящая в начальные условия (10), непрерывно дифференцируема по времени t , а входящие в граничные условия (11) линейные операторы $\Gamma_{1,2}[u]$ не зависят явно от времени t . Кроме того, считается, что начальные условия (10) и граничные условия (11) совместны, т. е. выполняются соотношения

$$\varphi(0, t) = \varphi_t(0, t) = 0, \quad \varphi(h, t) = \varphi_t(h, t) = 0.$$

Замечание 2. Решение начально-краевой задачи для линейного однородного уравнения типа Клейна–Гордона (7) при $a_2 = c_1 = 0$ с однородными граничными условиями первого рода (11) (при $\Gamma_1[u] = \Gamma_2[u] = u$) и начальными условиями (10) было получено методом разделения переменных в [44].

Таблица 1. Наиболее распространенные однородные граничные условия на концах отрезка $0 \leq x \leq h$

№	Начально-краевая задача	Граничные условия
1	Первая	$u = 0$ при $x = 0$ $u = 0$ при $x = h$
2	Вторая	$u_x = 0$ при $x = 0$ $u_x = 0$ при $x = h$
3	Третья	$u_x - k_1 u = 0$ при $x = 0$ $u_x + k_2 u = 0$ при $x = h$
4	Смешанная	$u = 0$ при $x = 0$ $u_x = 0$ при $x = h$
5	Смешанная	$u_x = 0$ при $x = 0$ $u = 0$ при $x = h$

Построение решения начально-краевой задачи. Начнем с поиска частных решений исходного уравнения типа Клейна–Гордона с запаздыванием (7) в виде произведения функций разных аргументов

$$Up = X(x)T(t). \quad (12)$$

Подставив (12) в (7), после элементарных преобразований получим:

$$\begin{aligned}X(x)[T''(t) - c_1 T(t) - c_2 T(t - \tau)] = \\ = X''(x)[a_1 T(t) + a_2 T(t - \tau)].\end{aligned}\quad (13)$$

Разделяя в этом уравнении переменные, приходим к линейному ОДУ второго порядка и ОДУ второго порядка с постоянным запаздыванием:

$$X''(x) = -\lambda^2 X(x), \quad (14)$$

$$T''(t) = (c_1 - a_1 \lambda^2) T(t) + (c_2 - a_2 \lambda^2) T(t - \tau). \quad (15)$$

Требую, чтобы функция (12) удовлетворяла однородным граничным условиям (11), приходим к однородным граничным условиям для функции X :

$$\begin{aligned}\Gamma_1[X] &= 0 \text{ при } x=0, \\ \Gamma_2[X] &= 0 \text{ при } x=h.\end{aligned}\quad (16)$$

Нетривиальные решения $X = X_n(x)$ линейной однородной задачи на собственные значения (14), (16) существуют только для дискретного набора значений параметра λ :

$$\lambda = \lambda_n, \quad X = X_n(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Важно отметить, что собственные функции $X_n(x)$ и $X_m(x)$ ортогональны в том смысле, что

$$\int_0^h X_n(x) X_m(x) dx = 0 \text{ при } n \neq m. \quad (18)$$

Собственные значения и собственные функции для однородных линейных краевых задач, описываемых ОДУ (14), для пяти наиболее распространенных граничных условий приведены в табл. 2.

Подставив собственные значения $\lambda = \lambda_n$ в (15), получим соответствующие ОДУ с запаздыванием для функций $T_n(t)$:

$$\begin{aligned}T_n''(t) &= (c_1 - a_1 \lambda_n^2) T_n(t) + \\ &+ (c_2 - a_2 \lambda_n^2) T_n(t - \tau).\end{aligned}\quad (19)$$

Решение линейной начально-краевой задачи для исходного уравнения типа Клейна–Гордона с запаздыванием (7) с начальными условиями (10) и однородными граничными условиями (11) ищем в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t), \quad (20)$$

где функции $u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t)$ – частные решения уравнения (7), удовлетворяющие однородным граничным условиям (11).

Таблица 2. Собственные функции в задачах на собственные значения, описываемые однородным ОДУ $X''_{xx} = -\lambda^2 X$ с наиболее распространенными однородными граничными условиями на концах отрезка $0 \leq x \leq h$

№	Начально-краевая задача	Граничные условия	Собственные значения и собственные функции $X_n = X_n(x), n = 1, 2, \dots$
1	Первая	$X = 0$ при $x = 0$ $X = 0$ при $x = h$	$\lambda_n = \pi n/h; X_n = \sin\left(\frac{\pi n x}{h}\right)$
2	Вторая	$X'_x = 0$ при $x = 0$ $X'_x = 0$ при $x = h$	$\lambda_0 = 0, \lambda_n = \pi n/h;$ $X_0 = 1, X_n = \cos\left(\frac{\pi n x}{h}\right)$
3	Третья	$X'_x - k_1 X = 0$ при $x = 0$ $X'_x + k_2 X = 0$ при $x = h$	λ_n – корни трансцендентного уравнения; $\frac{\operatorname{tg}(\lambda h)}{\lambda} = \frac{k_1 + k_2}{\lambda^2 - k_1 k_2}, (\lambda_n > 0);$ $X_n = \cos(\lambda_n x) + \frac{k_1}{\lambda_n} \sin(\lambda_n x)$
4	Смешанная	$X = 0$ при $x = 0$ $X'_x = 0$ при $x = h$	$\lambda_n = \frac{\pi(2n-1)}{2h}; X_n = \sin \frac{\pi(2n-1)x}{2h}$
5	Смешанная	$X'_x = 0$ при $x = 0$ $X = 0$ при $x = h$	$\lambda_n = \frac{\pi(2n-1)}{2h}; X_n = \cos \frac{\pi(2n-1)x}{2h}$

Чтобы найти начальные условия для ОДУ второго порядка с запаздыванием (19), представим начальные условия (10) в виде разложения по собственным функциям:

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t) X_n(x), \quad (21)$$

$$0 \leq x \leq h, \quad -\tau \leq t \leq 0.$$

Умножая (21) на $X_m(x)$ ($m = 1, 2, \dots$), интегрируя по пространственной переменной x от 0 до h и учитывая условия ортогональности (18), имеем

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^h \varphi(\xi, t) X_n(\xi) d\xi, \quad (22)$$

$$\|X_n\|^2 = \int_0^h X_n^2(\xi) d\xi.$$

Из условий (10) и соотношений (20) и (21) получаем начальные условия для ОДУ второго порядка с запаздыванием (19) в виде

$$T_n(t) = \Phi_n(t), \quad T'_n(t) = \Phi'_n(t) \quad (23)$$

при $-\tau \leq t \leq 0$.

где функции $\Phi_n(t)$ определяются формулами (22).

Для удобства представления аналитического решения задачи типа Коши для ОДУ второго порядка с запаздыванием (19) и начальными данными введем обозначения

$$\alpha = \sqrt{a_1 \lambda^2 - c_1}, \quad \beta = c_2 - a_2 \lambda^2. \quad (24)$$

Зафиксируя и опуская индекс n запишем:

$$T''(t) = -\alpha^2 T(t) + \beta T(t - \tau), \quad (25)$$

$$T(t) = \Phi(t), \quad T'(t) = \Phi'(t) \quad \text{при } -\tau \leq t \leq 0,$$

где α и β определяются формулами (24).

При $\alpha_1 \lambda^2 > c_1$, как показано в [44], решение задачи Коши (25) в области $t > \tau$ можно выразить через решения двух более простых задач по формуле

$$T(t) = \frac{\Phi(\tau) - \gamma \Phi(0)}{1 - \gamma} T_1(t) - \frac{\Phi'(\tau) - \gamma \Phi'(0)}{1 - \gamma} \times$$

$$\times \left(\frac{\tau}{1 - \gamma} T_1(t) - T_2(t) \right) + \frac{\gamma}{1 - \gamma} \times \quad (26)$$

$$\times \int_0^{\tau} \left(\frac{\tau}{1 - \gamma} T_1(t) - T_2(t) \right) \Phi''(t) dt, \quad \gamma = \frac{\beta}{\alpha^2},$$

где $T_1(t)$ и $T_2(t)$ – решения задачи (25), соответственно, при $\Phi(t) \equiv 1$ и $\Phi(t) \equiv t$.

РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА КЛЕЙНА–ГОРДОНА С ПОСТОЯННЫМ И ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Ниже приведены входящие в (26) вспомогательные функции $T_1(t)$ и $T_2(t)$, которые были получены методом шагов в [44].

1. На отрезке $m\tau \leq t \leq (m+1)\tau$ решение задачи (25) при $\Phi(t) \equiv 1$ можно представить в виде

$$T_1(t) = \gamma^m + (1-\gamma) \sum_{k=1}^m \gamma^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} A_{k,n} \times \frac{[\alpha(t-k\tau)]^n}{n!} \cos \left[\alpha(t-k\tau) - \frac{1}{2} \pi n \right], \quad (27)$$

где $\gamma = \frac{\beta}{\alpha^2}$, а постоянные $A_{k,n}$ определяются по формулам

$$A_{k,0} = 1, \quad A_{k,n} = \sum_{j=0}^{k-n-1} \frac{n}{n+2j} 2^{-n-2j} C_{n+2j}^j, \quad (28)$$

$$1 \leq n < k,$$

где $C_n^j = \frac{n!}{j!(n-j)!}$ – биномиальные коэффициенты. Отметим, что $0 < A_{k,n} \leq 1$.

2. На отрезке $m\tau \leq t \leq (m+1)\tau$ решение задачи (25) при $\Phi(t) \equiv t$ можно представить в виде

$$T_2(t) = \gamma^m (t-m\tau) + \tau \sum_{k=1}^m \gamma^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} A_{k,n} \times \frac{[\alpha(t-k\tau)]^n}{n!} \cos \left[\alpha(t-k\tau) - \frac{1}{2} \pi n \right] + \frac{1-\gamma}{\alpha} \sum_{k=1}^m \gamma^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} B_{k,n} \frac{[\alpha(t-k\tau)]^n}{n!} \times \sin \left[\alpha(t-k\tau) - \frac{1}{2} \pi n \right], \quad (29)$$

где $\gamma = \frac{\beta}{\alpha^2}$, постоянные $A_{k,n}$ вычисляются по формулам (28), а постоянные $B_{k,n}$ определяются так:

$$B_{k,0} = 2^{1-2k} k C_{2k}^k, \quad B_{k,n} = 2^{n+1-2k} \sum_{j=0}^{k-n-1} \frac{n(k-n-j)}{n+2j} \times C_{n+2j}^j C_{2(k-n-j)}^{k-n-j}, \quad 1 \leq n < k.$$

После определения функций $T_n(t)$ решение исходной задачи (7), (10), (11) определяется рядом (20), в котором собственные функции $X_n(x)$ и собственные значения λ_n для пяти наиболее распространенных граничных условий берутся из табл. 2.

Замечание 3. Можно показать [45], что начально-краевые задачи для уравнений типа Клейна–Гордона (7) с начальными данными

(10) и граничными условиями (11) при выполнении неравенства $a_2 > a_1$ некорректны по Адамару.

Замечание 4. В [44] было получено аналитическое решение начально-краевой задачи для одномерного линейного однородного уравнения типа Клейна–Гордона с постоянным запаздыванием (7) при $a_2 = c_1 = 0$ с однородными граничными условиями первого рода $u|_{x=0} = u|_{x=h} = 0$.

ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА КЛЕЙНА – ГОРДОНА С ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Точные решения простейшего вида

Линейные однородные уравнения типа Клейна–Гордона с пропорциональным запаздыванием

$$u_{tt} = a_1 u_{xx} + a_2 w_{xx} + c_1 u + c_2 w, \quad w = u(x, pt) \quad (30)$$

допускают точные решения, которые выражаются в элементарных функциях и описаны ниже.

1. Решение с мультипликативным разделением переменных, периодическое по x :

$$u = [A \cos(kx) + B \sin(kx)] \varphi(t),$$

где A, B, k – произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается линейным ОДУ второго порядка с пропорциональным запаздыванием

$$\varphi''_{tt} = (c_1 - a_1 k^2) \varphi + (c_2 - a_2 k^2) \bar{\varphi}, \quad \bar{\varphi} = \varphi(pt). \quad (31)$$

Это ОДУ допускает аналитическое решение в виде степенного ряда [46, с. 33]:

$$u(t) = A \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{2n} t^{2n} \right) + B \left(t + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{2n+1} t^{2n+1} \right), \quad (32)$$

$$\gamma_{2n} = \frac{1}{(2n)!} \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha + \beta p^{2k}),$$

$$\gamma_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)!} \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha + \beta p^{2k+1}), \quad (33)$$

$$\alpha = c_1 - a_1 k^2, \quad \beta = c_2 - a_2 k^2.$$

2. Решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = [A \operatorname{ch}(kx) + B \operatorname{sh}(kx)] \varphi(t),$$

где A, B, k – произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(t)$ описывается линейным ОДУ второго порядка с пропорциональным запаздыванием

$$\varphi''_t = (c_1 + a_1 k^2)\varphi + (c_2 + a_2 k^2)\bar{\varphi},$$

$$\bar{\varphi} = \varphi(pt).$$

Это ОДУ допускает аналитическое решение в виде степенного ряда (32)–(33), где $\alpha = c_1 + a_1 k^2$, $\beta = c_2 + a_2 k^2$.

3. Решение с аддитивным разделением переменных:

$$u = \varphi(x) + \psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются, соответственно, линейным ОДУ второго порядка и ОДУ второго порядка с пропорциональным запаздыванием

$$(a_1 + a_2)\varphi''_{xx} + (c_1 + c_2)\varphi = 0,$$

$$\psi''_t = c_1\psi + c_2\bar{\psi}, \quad \bar{\psi} = \psi(pt).$$

4. Имеются решения полиномиального вида по x (содержащие, соответственно, четные и нечетные степени):

$$u = \sum_{k=0}^n A_k(t)x^{2k} \quad \text{и} \quad u = \sum_{k=0}^n B_k(t)x^{2k+1}.$$

Линейные начально-краевые задачи для уравнений типа Клейна–Гордона с пропорциональным запаздыванием

Формулировки начально-краевых задач.

Рассмотрим начально-краевую задачу для исходного уравнения типа Клейна–Гордона с пропорциональным запаздыванием (30) с начальными условиями общего вида

$$u = \varphi(x) \quad \text{или} \quad t = 0,$$

$$u_t = \psi(x) \quad \text{при} \quad t = 0$$
(34)

и различными линейными однородными граничными условиями, которые для удобства запишем в компактной форме

$$\Gamma_1[u] = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,$$

$$\Gamma_2[u] = 0 \quad \text{при} \quad x = h,$$
(35)

где $0 < h < \infty$. Наиболее распространенные граничные условия приведены в табл. 1. В частности, в случае граничных условий первого рода в (35) надо взять $\Gamma_1[u] = \Gamma_2[u] = u$.

Отметим, что начальные условия для уравнений с пропорциональным запаздыванием за-

даются в точке, как и для уравнений без запаздывания, в отличие от уравнений с постоянным запаздыванием, для которых начальные условия задаются на отрезке.

Построение решения начально-краевой задачи. Частные решения исходного уравнения ищем в виде произведения функций разных аргументов $u_p = X(x)T(t)$. Используя стандартную процедуру разделения переменных, приходим к линейному ОДУ второго порядка и ОДУ второго порядка с пропорциональным запаздыванием:

$$X''(x) = -\lambda^2 X(x),$$
(36)

$$T''(t) = (c_1 - a_1 \lambda^2)T(t) + (c_2 - a_2 \lambda^2)T(pt).$$
(37)

Требуя, чтобы функция $u_p = X(x)T(t)$ удовлетворяла однородным граничным условиям (35), получим однородные граничные условия для функции X :

$$\Gamma_1[X] = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,$$

$$\Gamma_2[X] = 0 \quad \text{при} \quad x = h.$$
(38)

Нетривиальные решения $X = X_n(x)$ линейной однородной задачи на собственные значения (36), (38) существуют только для дискретного набора значений параметра λ :

$$\lambda = \lambda_n, \quad X = X_n(x), \quad n = 1, 2, \dots$$
(39)

Собственные значения и собственные функции однородных линейных краевых задач, описываемых ОДУ (36), для пяти наиболее распространенных граничных условий, приведены в табл. 2.

Подставив собственные значения $\lambda = \lambda_n$ в (37), получим соответствующие ОДУ с пропорциональным запаздыванием для функций $T = T_n(t)$.

Используя принцип линейной суперпозиции, ищем решение линейной начально-краевой задачи для исходного уравнения (30) с начальными и граничными условиями (34) и (35) в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x),$$
(40)

где функции $T_n(t)$ описываются уравнением (37) при $\lambda = \lambda_n$. По построению ряд (40) удовлетворяет исходному уравнению (30) и однородным граничным условиям (35).

Чтобы найти начальные условия для ОДУ второго порядка с пропорциональным запаздыванием (37), функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, входящие в

РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА КЛЕЙНА–ГОРДОНА С ПОСТОЯННЫМ И ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

начальные условия (34), представим в виде разложений по собственным функциям:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x), \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n X_n(x), \\ A_n &= \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^h \varphi(\xi) X_n(\xi) d\xi, \\ B_n &= \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^h \psi(\xi) X_n(\xi) d\xi,\end{aligned}\quad (41)$$

где $\|X_n\|^2 = \int_0^h X_n^2(\xi) d\xi$. Из соотношений (40) и

(41) получим начальные условия для ОДУ с пропорциональным запаздыванием (37):

$$T_n(0) = A_n, \quad T'_n(0) = B_n. \quad (42)$$

Линейное ОДУ второго порядка с пропорциональным запаздыванием (37) с точностью до обозначений совпадает с уравнением (31), аналитическое решение которого имеет вид (32)–(33) и удовлетворяет начальным условиям (42). Учитывая изложенное, можно представить решение линейной задачи (37), (42) в виде линейной комбинации двух степенных рядов:

$$\begin{aligned}T_n(t) &= A_n \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{n,2m} t^{2m} \right) + \\ &+ B_n \left(t + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{n,2m+1} t^{2m+1} \right),\end{aligned}\quad (43)$$

где

$$\begin{aligned}\gamma_{n,2m} &= \frac{1}{(2m)!} \prod_{k=0}^{m-1} (\alpha_n + \beta_n p^{2k}), \\ \gamma_{n,2m+1} &= \frac{1}{(2m+1)!} \prod_{k=0}^{m-1} (\alpha_n + \beta_n p^{2k+1}), \\ \alpha_n &= c_1 - a_1 \lambda_n^2, \quad \beta_n = c_2 - a_2 \lambda_n^2.\end{aligned}\quad (44)$$

При $0 < p < 1$ оба ряда в (44) имеют бесконечный радиус сходимости.

Подставив выражения (43) в (40), получим решение рассматриваемой начально-краевой задачи (30), (34), (35) в виде

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{n,2m} t^{2m} \right) + \right. \\ &\left. + B_n \left(t + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{n,2m+1} t^{2m+1} \right) \right] X_n(x).\end{aligned}\quad (45)$$

Решения начально-краевых задач для исходного уравнения типа Клейна–Гордона с пропорциональным запаздыванием (30) с пятью

граничными условиями, представленными в табл. 1, могут быть получены по формулам (41) для A_n и B_n , (44) для $\gamma_{n,2m}$ и $\gamma_{n,2m+1}$ и (45), где соответствующие собственные значения λ_n и собственные функции $X_n(x)$ берутся из табл. 2.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит А.Д. Полянина за внимание к работе и полезные замечания.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 123021700057-0).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
2. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972.
3. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
4. Kuang Y. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. San Diego: Academic Press, 2012.
5. Полянин А.Д., Сорокин В.Г. Реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием: Математические модели и качественные особенности // Вестник НИЯУ МИФИ, 2017. Т. 6. № 1. С. 41–55.
6. Wu J. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. New York: Springer, 1996.
7. Полянин А.Д., Сорокин В.Г. Решения линейных начально-краевых задач реакционно-диффузионного типа с запаздыванием // Вестник НИЯУ МИФИ. 2023. Т. 12. № 3 (в печати).
8. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Generalized and functional separable solutions to nonlinear delay Klein–Gordon equations. // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014. V. 19. P. 2676–2689.
9. Полянин А.Д., Сорокин В.Г., Вязьмин А.В. Точные решения и качественные особенности нелинейных гиперболических реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием // Теоретические основы химической технологии, 2015. Т. 49. № 5. С. 527–541.
10. Сорокин В.Г. Точные решения нелинейных телеграфных уравнений с запаздыванием // Вестник НИЯУ МИФИ, 2019. Т. 8. № 5. С. 453–464.
11. Long F.-S., Meleshko S.V. On the complete group classification of the one-dimensional nonlinear Klein–Gordon equation with a delay // Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2016. V. 39. P. 3255–3270.

12. Long F.-S., Meleshko S.V. Symmetry analysis of the nonlinear two-dimensional Klein–Gordon equation with a time-varying delay // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2017. V. 40. P. 4658–4673.
13. Lobo J.Z., Valaulikar Y.S. Group analysis of the one dimensional wave equation with delay // *Applied Mathematics and Computation*, 2020. V. 378. P. 125193.
14. Полянин А.Д., Сорокин В.Г. Построение точных решений нелинейных уравнений математической физики с запаздыванием с помощью решений более простых уравнений без запаздывания // *Вестник НИЯУ МИФИ*. 2020. Т. 9. № 2. С. 115–128.
15. Polyanin A.D. Construction of functional separable solutions in implicit form for non-linear Klein–Gordon type equations with variable coefficients // *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2019. V. 114. P. 29–40.
16. Zhurov A.I., Polyanin A.D. Symmetry reductions and new functional separable solutions of nonlinear Klein–Gordon and telegraph type equations // *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 2020. V. 27. № 2. P. 227–242.
17. Сорокин В.Г. Численное интегрирование нелинейных уравнений типа Клейна – Гордона с запаздыванием методом прямых // *Вестник НИЯУ МИФИ*, 2019. Т. 8. № 3. С. 232–247.
18. Ockendon J.R., Tayler A.B. The dynamics of a current collection system for an electric locomotive // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 1971. V. 332. P. 447–468.
19. Dehghan M., Shakeri F. The use of the decomposition procedure of Adomian for solving a delay differential equation arising in electrodynamics // *Physica Scripta*, 2008. V. 78. P. 065004.
20. Ajello W.G., Freedman H.I., Wu J. Analysis of a model representing stage-structured population growth with state-dependent time delay // *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1992. V. 52. P. 855–869.
21. Mahler K. On a special functional equation // *Journal of the London Mathematical Society*, 1940. V. 1. P. 115–123.
22. Ferguson T.S. Lose a dollar or double your fortune. *Proceedings of the 6th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, V. 3. Berkeley: University California Press, 1972. P. 657–666.
23. Robinson R.W. Counting Labeled Acyclic Digraphs. *New Directions in the Theory of Graphs*. New York: Academic Press, 1973. P. 239–273.
24. Gaver D.P. An absorption probability problem // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1964. V. 9. P. 384–393.
25. Zhang F., Zhang Y. State estimation of neural networks with both time-varying delays and norm-bounded parameter uncertainties via a delay decomposition approach // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2013. V. 18. P. 3517–3529.
26. Yang X., Song Q., Cao J., Lu J. Synchronization of coupled Markovian reaction-diffusion neural networks with proportional delays via quantized control // *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2019. V. 30. P. 951–958.
27. Wan P., Sun D., Chen D., Zhao M., Zheng L. Exponential synchronization of inertial reaction-diffusion coupled neural networks with proportional delay via periodically intermittent control // *Neurocomputing*, 2019. V. 356. P. 195–205.
28. Hall A.J., Wake G.C. A functional differential equation arising in the modeling of cell growth // *The Journal of the Australian Mathematical Society. Series B, Applied mathematics, Computer & control abstracts*, 1989. V. 30. P. 424–435.
29. Hall A.J., Wake G.C., Gandar P.W. Steady size distributions for cells in one dimensional plant tissues. *Journal of Mathematical Biology*, 1991. V. 30. P. 101–123.
30. Derfel G., van Brunt B., Wake G.C. A cell growth model revisited // *Functional Differential Equations*, 2012. V. 19. P. 71–81.
31. Амбарцумян В.А. К теории флуктуаций яркости в Млечном пути // *Доклады Академии наук СССР*, 1944. Т. 44. С. 244–247.
32. Efendiev M., van Brunt B., Wake G.C., Zaidi A.A. A functional partial differential equation arising in a cell growth model with dispersion // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2018. V. 41. P. 1541–1553.
33. Liu C.-S. Basic theory of a class of linear functional differential equations with multiplication delay. *arXiv*, 2018. URL: <https://arxiv.org/pdf/1605.06734> (accessed 10.09.2023).
34. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Nonlinear pantograph-type diffusion PDEs: Exact solutions and the principle of analogy // *Mathematics*, 2021. V. 9. P. 511.
35. Aksenov A.V., Polyanin A.D. Methods for constructing complex solutions of nonlinear PDEs using simpler solutions // *Mathematics*, 2021. V. 9. P. 345.
36. Aksenov A.V., Polyanin A.D. Review of methods for constructing exact solutions of equations of mathematical physics based on simpler solutions // *Theoretical and Mathematical Physics*, 2022. V. 211. P. 567–594.
37. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Reductions and exact solutions of nonlinear wave-type PDEs with proportional and more complex delays // *Mathematics*, 2023. Vol. 11. P. 516.
38. Abazari R., Ganji M. Extended two-dimensional DTM and its application on nonlinear PDEs with proportional delay // *International Journal of Computer Mathematics*, 2011. V. 88. P. 1749–1762.
39. Grover D., Sharma D., Singh P. Accelerated HPSTM: An efficient semi-analytical technique for the solution of nonlinear PDE's. // *Nonlinear Engineering*, 2020. V. 9. P. 329–337.
40. Sakar M.G., Uludag F., Erdogan F. Numerical solution of time-fractional nonlinear PDEs with proportional delays by homotopy perturbation method // *Applied Mathematical Modelling*, 2016. V. 40. P. 6639–6649.
41. Bekela A.S., Belachew M.T., Wole G.A. A numerical method using Laplace-like transform and variational theory for solving time-fractional nonlinear partial differential equations with proportional delay // *Advances in Difference Equations*, 2020. V. 2020. P. 586.

42. Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E. Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists, 2nd ed. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2016.

43. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.

44. Rodríguez F., Roales M., Martín J.A. Exact solutions and numerical approximations of mixed problems

for the wave equation with delay // Applied Mathematics and Computation, 2012. V. 219. №. 6. P. 3178–3186.

45. Полянин А.Д., Сорокин В.Г. Об устойчивости и неустойчивости решений реакционно-диффузионных и более сложных уравнений с запаздыванием // Вестник НИЯУ МИФИ, 2018. Т. 7. № 5. С. 389–404.

46. Polyanin A.D., Sorokin V.G., Zhurov A.I. Delay Ordinary and Partial Differential Equations. Boca Raton, London: CRC Press, 2024.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta «MIFI», 2023, vol. 12, no. 4, pp. 211–222

SOLUTIONS OF LINEAR INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR KLEIN–GORDON TYPE EQUATIONS WITH CONSTANT AND PROPORTIONAL DELAY

V.G. Sorokin

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526, Russia
e-mail: vsesor@gmail.com

Received September 19, 2023; revised September 19, 2023; accepted September 26, 2023

The paper deals with one-dimensional linear homogeneous Klein–Gordon type equations with constant and proportional delay, which, in addition to the desired functions $u(x, t)$, contain functions with constant delay of the form $u(x, t - \tau)$, where $\tau > 0$ is the constant delay, and functions with proportional delay of the form $u(x, pt)$, where p is the proportionality coefficient. Exact solutions of such equations expressed in elementary functions are given. Initial boundary value problems with general initial data and homogeneous boundary conditions of the first, second and third kind, as well as mixed boundary conditions, are formulated. A detailed description of solving these problems using the method of separation of variables is provided. As a result, analytical formulas for solutions of initial boundary value problems for linear homogeneous Klein–Gordon type equations with constant and proportional delay are obtained.

Keywords: linear homogeneous Klein–Gordon equations, partial differential equations with delay, initial-boundary value problems, closed-form solutions, exact solutions.

REFERENCES

1. Bellman R., Cook K. Differentsial'no-raznostnye uravneniya. [Differential-difference equations]. Moscow: Mir Publ., 1967.

2. Myshkis A.D. Linejnye differentsial'nye uravneniya s zapazdyvayushchim argumentom. [Linear differential equations with retarded argument]. Moscow: Nauka Publ., 1972.

3. Elsgolts L.E., Norkin S.B. Vvedenie v teoriyu differentsial'nyh uravnenij s otklonyayushchimsya argumentom [Introduction to the theory of differential equations with deviating argument]. Moscow: Nauka Publ., 1971.

4. Kuang Y. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. San Diego: Academic Press, 2012.

5. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Reakcionno-diffuzionnye uravneniya s zapazdyvaniem: Matematicheskie modeli i kachestvennye osobennosti. [Reaction-diffusion

equations with delay: Mathematical models and qualitative features]. Vestnik NIYaU MIFI, 2017. Vol. 6. No. 1. Pp. 41–55 (in Russian).

6. Wu J. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. New York: Springer, 1996.

7. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Resheniya linejnyh nachal'no-kraevykh zadach reakcionno-diffuzionnogo tipa s zapazdyvaniem. [Solutions of linear initial-boundary value problems of the reaction-diffusion type with delay]. Vestnik NIYaU MIFI, 2023. Vol. 12. No. 3 (in print).

8. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Generalized and functional separable solutions to nonlinear delay Klein–Gordon equations. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014. Vol. 19. Pp. 2676–2689.

9. Polyanin A.D., Sorokin V.G., Vyazmin A.V. Tochnye resheniya i kachestvennye osobennosti nelinejnyh giperbolicheskikh reakcionno-diffuzionnyh uravnenij s zapazdyvaniem. [Exact solutions and qualita-

tive features of nonlinear hyperbolic reaction-diffusion equations with delay]. *Teoreticheskie osnovy himicheskoy tekhnologii*, 2015. Vol. 49. No. 5. Pp. 527–541 (in Russian).

10. *Sorokin V.G.* Tochnye resheniya nelinejnyh telegrafnyh uravnenij s zapazdyvaniem [Exact solutions of nonlinear telegraph equations with delay]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2019. Vol. 8. No. 5. Pp. 453–464 (in Russian).

11. *Long F.-S., Meleshko S.V.* On the complete group classification of the one-dimensional nonlinear Klein–Gordon equation with a delay. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2016. Vol. 39. Pp. 3255–3270.

12. *Long F.-S., Meleshko S.V.* Symmetry analysis of the nonlinear two-dimensional Klein–Gordon equation with a time-varying delay. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2017. Vol. 40. Pp. 4658–4673.

13. *Lobo J.Z., Valaulikar Y.S.* Group analysis of the one dimensional wave equation with delay. *Applied Mathematics and Computation*, 2020. Vol. 378. Pp. 125193.

14. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Postroenie tochnyh reshenij nelinejnyh uravnenij matematicheskoy fiziki s zapazdyvaniem s pomoshch'yu reshenij bolee prostyh uravnenij bez zapazdyvaniya [Construction of exact solutions of nonlinear equations of mathematical physics with delay using solutions of simpler equations without delay]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2020. Vol. 9. No. 2. Pp. 115–128 (in Russian).

15. *Polyanin A.D.* Construction of functional separable solutions in implicit form for non-linear Klein–Gordon type equations with variable coefficients. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2019. Vol. 114. Pp. 29–40.

16. *Zhurov A.I., Polyanin A.D.* Symmetry reductions and new functional separable solutions of nonlinear Klein–Gordon and telegraph type equations. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 2020. Vol. 27. No. 2. Pp. 227–242.

17. *Sorokin V.G.* Chislennoe integrirovanie nelinejnyh uravnenij tipa Klejna – Gordona s zapazdyvaniem metodom pryamyh. [Numerical integration of nonlinear Klein–Gordon type equations with delay by the method of lines]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2019. Vol. 8. No. 3. Pp. 232–247 (in Russian).

18. *Ockendon J.R., Tayler A.B.* The dynamics of a current collection system for an electric locomotive. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 1971. Vol. 332. Pp. 447–468.

19. *Dehghan M., Shakeri F.* The use of the decomposition procedure of Adomian for solving a delay differential equation arising in electrodynamics. *Physica Scripta*, 2008. Vol. 78. Pp. 065004.

20. *Ajello W.G., Freedman H.I., Wu J.* Analysis of a model representing stage-structured population growth with state-dependent time delay. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1992. Vol. 52. Pp. 855–869.

21. *Mahler K.* On a special functional equation. *Journal of the London Mathematical Society*, 1940. Vol. 1. Pp. 115–123.

22. *Ferguson T.S.* Lose a dollar or double your fortune. *Proceedings of the 6th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. Vol. 3. Berkeley: University California Press, 1972. Pp. 657–666.

23. *Robinson R.W.* Counting Labeled Acyclic Digraphs. *New Directions in the Theory of Graphs*. New York: Academic Press, 1973. Pp. 239–273.

24. *Gaver D.P.* An absorption probability problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1964. Vol. 9. Pp. 384–393.

25. *Zhang F., Zhang Y.* State estimation of neural networks with both time-varying delays and norm-bounded parameter uncertainties via a delay decomposition approach. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2013. Vol. 18. Pp. 3517–3529.

26. *Yang X., Song Q., Cao J., Lu J.* Synchronization of coupled Markovian reaction-diffusion neural networks with proportional delays via quantized control. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2019. Vol. 30. Pp. 951–958.

27. *Wan P., Sun D., Chen D., Zhao M., Zheng L.* Exponential synchronization of inertial reaction-diffusion coupled neural networks with proportional delay via periodically intermittent control. *Neurocomputing*, 2019. Vol. 356. Pp. 195–205.

28. *Hall A.J., Wake G.C.* A functional differential equation arising in the modeling of cell growth. *The Journal of the Australian Mathematical Society. Series B, Applied mathematics, Computer & control abstracts*, 1989. Vol. 30. Pp. 424–435.

29. *Hall A.J., Wake G.C., Gandar P.W.* Steady size distributions for cells in one dimensional plant tissues. *Journal of Mathematical Biology*, 1991. Vol. 30. Pp. 101–123.

30. *Derfel G., van Brunt B., Wake G.C.* A cell growth model revisited. *Functional Differential Equations*, 2012. Vol. 19. Pp. 71–81.

31. *Ambartsumyan V.A.* K teorii fluktuacij yarkosti v Mlechnom puti. [On the theory of brightness fluctuations in the Milky Way]. *Doklady Akademii nauk SSSR*, 1944. Vol. 44. Pp. 244–247 (in Russian).

32. *Efendiev M., van Brunt B., Wake G.C., Zaidi A.A.* A functional partial differential equation arising in a cell growth model with dispersion. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2018. Vol. 41. Pp. 1541–1553.

33. *Liu C.-S.* Basic theory of a class of linear functional differential equations with multiplication delay. *arXiv*. 2018. Available at: <https://arxiv.org/pdf/1605.06734> (accessed 10.09.2023).

34. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Nonlinear pantograph-type diffusion PDEs: Exact solutions and the principle of analogy. *Mathematics*, 2021. Vol. 9. Pp. 511.

35. *Aksenov A.V., Polyanin A.D.* Methods for constructing complex solutions of nonlinear PDEs using simpler solutions. *Mathematics*, 2021. Vol. 9. Pp. 345.

36. *Aksenov A.V., Polyanin A.D.* Review of methods for constructing exact solutions of equations of mathematical physics based on simpler solutions. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2022. Vol. 211. Pp. 567–594.

37. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Reductions and exact solutions of nonlinear wave- type PDEs with proportional and more complex delays. *Mathematics*, 2023. Vol. 11. P. 516.

38. *Abazari R., Ganji M.* Extended two-dimensional DTM and its application on nonlinear PDEs with proportional delay. *International Journal of Computer Mathematics*, 2011. Vol. 88. Pp. 1749–1762.

39. *Grover D., Sharma D., Singh P.* Accelerated HPSTM: An efficient semi-analytical technique for the solution of nonlinear PDE's. *Nonlinear Engineering*, 2020. Vol. 9. Pp. 329–337.

40. *Sakar M.G., Uludag F., Erdogan F.* Numerical solution of time-fractional nonlinear PDEs with proportional delays by homotopy perturbation method. *Applied Mathematical Modelling*, 2016. Vol. 40. Pp. 6639–6649.

41. *Bekela A.S., Belachew M.T., Wole G.A.* A numerical method using Laplace-like transform and variational theory for solving time-fractional nonlinear partial differential equations with proportional delay. *Advances in Difference Equations*, 2020. Vol. 2020. Pp. 586.

42. *Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E.* Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists, 2nd ed. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2016.

43. *Tikhonov A.N., Samarsky A.A.* *Uraveniya matematicheskoy fiziki*. [Equations of mathematical physics]. Moscow: Nauka Publ., 1972.

44. *Rodríguez F., Roales M., Martín J.A.* Exact solutions and numerical approximations of mixed problems for the wave equation with delay. *Applied Mathematics and Computation*, 2012. Vol. 219. No. 6. Pp. 3178–3186.

45. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Ob ustojchivosti i neustojchivosti reshenij reakcionno-diffuzionnykh i bolee slozhnykh uravnenij s zapazdyvaniem [On the stability and instability of solutions of reaction–diffusion and more complex nonlinear equations with delay]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2018. Vol. 7. No. 5. Pp. 389–404 (in Russian).

46. *Polyanin A.D., Sorokin V.G., Zhurov A.I.* *Delay Ordinary and Partial Differential Equations*. Boca Raton, London: CRC Press, 2024.