ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ», 2023, т. 12, № 5, с. 276–288

УДК 517.9

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ И РЕДУКЦИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ТИПА МОНЖА – АМПЕРА

А.Д. Полянин
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия
e-mail: polyanin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию: 11.10.2023
После доработки: 11.10.2023
Принята к публикации: 24.10.2023

Исследуются нелинейные нестационарные уравнения математической физики с тремя независимыми переменными, которые содержат первую производную по времени и квадратичную комбинацию вторых производных по пространственным переменным типа Монжа – Ампера. Отдельные уравнения такого типа встречаются, например, в электронной магнитной гидродинамике и дифференциальной геометрии. В данной работе описано одиннадцатипараметрическое преобразование, сохраняющее вид исследуемого класса нелинейных уравнений. Рассмотрены двумерные и одномерные редукции, приводящие к более простым уравнениям в частных производных с двумя независимыми переменными или обыкновенным дифференциальным уравнениям. Получены автомодельные и другие инвариантные решения. Методами обобщенного разделения переменных построен ряд новых точных решений, многие из которых выражаются через элементарные функции.

Ключевые слова: нелинейные уравнения математической физики, нестационарные уравнения типа Монжа – Ампера, магнитная гидродинамика, автомодельные и инвариантные решения, решения с обобщенным разделением переменных, решения в элементарных функциях, одномерные и двумерные редукции.

DOI: 10.26583/vestnik.2023.299

ВВЕДЕНИЕ

1. В плазменной электронной магнитной гидродинамике встречается нелинейное нестационарное уравнение математической физики типа Монжа – Ампера [1–3]:

$$u_t = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2. \qquad (1)$$

В [4] были получены точные решения уравнения (1) в виде произведения функций разных аргументов: $u = X(x)Y(y)T(t)$. В [5] описано многопараметрическое преобразование, сохраняющее вид уравнения (1), а также двумерные и одномерные редукции, приводящие его к более простым уравнениям в частных производных с двумя независимыми переменными (в том числе к стационарным уравнениям типа Монжа – Ампера, нестационарным уравнениям теплопроводности и уравнениям нелинейной теории фильтрации) или обыкновенным дифференциальным уравнениям. Кроме того, методами обобщенного разделения переменных в [5] были построены точные решения, многие из которых допускают представление в элементарных функциях. В стационарном случае уравнение (1) вырождается в однородное уравнение Монжа – Ампера, общее решение которого можно представить в параметрической форме [6]. Преобразования и точные решения этого и родственных стационарных уравнений типа Монжа – Ампера, которые возникают в газовой динамике (см., например, [7–9]), можно найти [9–11].

2. В данной работе будет анализироваться обобщенное уравнение магнитной гидродинамики с нелинейностью типа Монжа – Ампера

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = \sigma(u_t)^m, \qquad (2)$$

где m и σ – некоторые постоянные. Уравнение (2) в частном случае $m=\sigma=1$ переходит в уравнение электронной магнитной гидродинамики (1).

При $m=-1$ нестационарное уравнение типа Монжа – Ампера (2) и его обобщение на случай многих переменных, когда левая часть заменяется на $\det[u_{x_i x_j}]$, рассматривались во многих работах (см., например, [12–17]), в которых исследовались вопросы существования и единственности решений для различных внутренних и внешних начально-краевых задач. К нелинейным уравнениям вида (2) сводятся также некоторые имеющие геометрические приложения параболические уравнения Монжа – Ампера [18–21].

3. Методы построения решений дифференциальных уравнений, основанные на упрощении уравнений, обычно называются редукциями. Наиболее важными для нелинейных уравнений математической физики являются одномерные редукции, используя которые, удается представить их решения в терминах решений гораздо более простых обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). В данной работе под точными решениями нелинейных уравнений математической физики понимаются решения, которые выражаются:

(i) через элементарные функции;

(ii) в квадратурах (с помощью элементарных функций и неопределенных интегралов);

(iii) через решения ОДУ или систем ОДУ.

Отметим, что на практике точные решения нелинейных уравнений математической физики с частными производными используются для формулировки тестовых задач, предназначенных для оценки точности и верификации численных и приближенных аналитических методов.

Редукции и точные решения нелинейных уравнений с частными производными чаще всего строятся с использованием методов группового анализа [10, 22, 23], методов обобщенного и функционального разделения переменных [11, 24–26], метода дифференциальных связей [11, 25–27] и некоторых других аналитических методов [11, 26, 28–30].

В данной работе для поиска точных решений обобщенного уравнения магнитной гидродинамики (2) в основном использованы различные модификации метода обобщенного разделения переменных [11, 24–26] и приведенные в [11] точные решения более простых, чем исходное, промежуточных редуцированных уравнений с меньшим числом независимых переменных. Особое внимание уделяется построению простых точных решений, которые выражаются через элементарные функции. Отметим, что наличие нелинейности в правой части (2) существенно усложняет анализ этого уравнения.

НЕКОТОРЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1. При $m \neq 2$ преобразование

$$\bar{x} = a_1 x + b_1 y + c_1, \quad \bar{y} = a_2 x + b_2 y + c_2,$$
$$\bar{t} = pt + q, \quad \bar{u} = ku + a_3 x + b_3 y + c_3,$$
$$k = |a_1 b_2 - a_2 b_1|^{\frac{2}{2-m}} p^{-\frac{m}{2-m}}, \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0, \tag{3}$$

где a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, p, q – произвольные постоянные, приводит исходное уравнение (2) к уравнению точно такого же вида.

Одиннадцатипараметрическое инвариантное преобразование (3) позволяет с помощью более простых частных решений уравнения (2) строить его более сложные точные решения. А именно, если $u = \Phi(x, y, t)$ – решение уравнения (2), то функция

$$u = \frac{1}{k}\Phi(a_1 x + b_1 y + c_1,\ a_2 x + b_2 y + c_2,\ pt + q) +$$
$$+ a_4 x + b_4 y + c_4,$$
$$k = |a_1 b_2 - a_2 b_1|^{\frac{2}{2-m}} p^{-\frac{m}{2-m}}, \quad k \neq 2,$$

где $a_4 = -a_3/k$, $b_4 = -b_3/k$, $c_4 = -c_3/k$ – новые произвольные постоянные, также является решением этого уравнения.

2. При $m = 2$ преобразование

$$\bar{x} = a_1 x + b_1 y + c_1, \quad \bar{y} = a_2 x + b_2 y + c_2,$$
$$\bar{t} = pt + q, \quad \bar{u} = ku + a_3 x + b_3 y + c_3, \tag{4}$$
$$p = |a_1 b_2 - a_2 b_1|, \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0,$$

где a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, k, q – произвольные постоянные, приводит исходное уравнение (2) к уравнению точно такого же вида.

3. В полярных координатах r, φ, где $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, исходное уравнение (2) принимает вид

$$r^{-2} u_{rr}(u_{\varphi\varphi} + r u_r) - \left[(r^{-1} u_\varphi)_r\right]^2 = \sigma (u_t)^m. \tag{5}$$

Это уравнение будет использовано далее для построения точных решений рассматриваемого уравнения.

4. В эллиптических координатах r, φ, где $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$ (a и b – положительные константы), уравнение (2) записывается так:

$$r^{-2} u_{rr}(u_{\varphi\varphi} + r u_r) - \left[(r^{-1} u_\varphi)_r\right]^2 = (ab)^2 \sigma (u_t)^m. \tag{6}$$

Видно, что уравнение (6) отличается от уравнения (5) только переобозначением коэффициента σ.

ДВУМЕРНЫЕ И ОДНОМЕРНЫЕ РЕДУКЦИИ, ОСНОВАННЫЕ НА ИНВАРИАНТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ

1. Переходя в (2) к переменным типа бегущей волны

$$u = U(\xi, \eta), \quad \xi = x + a_1 t, \quad \eta = y + a_2 t, \qquad (7)$$

где a_1 и a_2 – произвольные постоянные, приходим к двумерному уравнению типа Монжа – Ампера

$$U_{\xi\xi}U_{\eta\eta} - U_{\xi\eta}^2 = \sigma(a_1 U_\xi + a_2 U_\eta)^m, \qquad (8)$$

которое не зависит явно от новых переменных ξ и η.

2. При $m \neq 2$, переходя в (2) к переменным автомодельного типа

$$u = t^{\frac{2\alpha+2\beta+m}{m-2}} U(\xi,\eta), \quad \xi = xt^\alpha, \quad \eta = yt^\beta, \qquad (9)$$

где α и β – произвольные постоянные, получим двумерное уравнение типа Монжа – Ампера с переменными коэффициентами при младших производных:

$$U_{\xi\xi}U_{\eta\eta} - U_{\xi\eta}^2 = \sigma\left(\alpha\xi U_\xi + \beta\eta U_\eta + \frac{2\alpha+2\beta+m}{m-2}U\right)^m. \qquad (10)$$

Эквивалентную форму представления решения можно получить из (9), взяв вместо второго аргумента комбинацию обоих аргументов $\zeta = \xi^{-\beta}\eta^\alpha = x^{-\beta}y^\alpha$, что приводит к двумерному решению вида

$$u = t^{\frac{2\alpha+2\beta+m}{m-2}} U(\xi,\zeta), \quad \xi = xt^\alpha, \quad \zeta = y^\alpha x^{-\beta}. \qquad (11)$$

Замечание 1. Подставляя $\alpha = \beta = 0$ в (9), приходим к двумерному решению с мультипликативным разделением переменных:

$$u = t^{\frac{m}{m-2}} U(x, y).$$

3. При $m \neq 2$, переходя в (2) к переменным предельного автомодельного типа

$$u = \exp\left[\frac{2(\alpha+\beta)}{m-2}t\right]U(\xi,\eta), \quad \xi = x\exp(\alpha t), \quad \eta = y\exp(\beta t), \qquad (12)$$

где α и β – произвольные постоянные, получим другое двумерное уравнение типа Монжа – Ампера с переменными коэффициентами при младших производных:

$$U_{\xi\xi}U_{\eta\eta} - U_{\xi\eta}^2 = \sigma\left(\alpha\xi U_\xi + \beta\eta U_\eta + \frac{2(\alpha+\beta)}{m-2}U\right)^m. \qquad (13)$$

Эквивалентную форму представления решения можно получить из (12), взяв вместо второго аргумента комбинацию обоих аргументов $\zeta = \xi^{-\beta}\eta^\alpha = x^{-\beta}y^\alpha$, что приводит к двумерному решению вида

$$u = \exp\left[\frac{2(\alpha+\beta)}{m-2}t\right]U(\xi,\zeta), \quad \xi = x\exp(\alpha t), \quad \zeta = y^\alpha x^{-\beta}. \qquad (14)$$

4. При $m \neq 2$, переходя в (2) к инвариантным переменным

$$u = t^{\frac{m}{m-2}}U(\xi,\eta), \quad \xi = x + \lambda_1 \ln t, \quad \eta = y + \lambda_2 \ln t, \qquad (15)$$

где λ_1 и λ_2 – произвольные постоянные, получим еще одно двумерное уравнение типа Монжа – Ампера с постоянными коэффициентами:

$$U_{\xi\xi}U_{\eta\eta} - U_{\xi\eta}^2 = \sigma\left(\lambda_1 U_\xi + \lambda_2 U_\eta + \frac{m}{m-2}U\right)^m. \qquad (16)$$

5. Уравнение (2) при $m \neq 2$ с использованием инвариантных переменных

$$u = x^{\frac{2}{2-m}}U(\xi,\eta), \quad \xi = t + \alpha\ln x, \quad \eta = y + \beta\ln x, \qquad (17)$$

где α и β – произвольные постоянные, редуцируется к двумерному уравнению, которое здесь опускается. Значениям $\alpha = \beta = 0$ соответствует решение с мультипликативным разделением переменных.

6. Уравнение (2) при $m \neq 2$ с использованием инвариантных переменных

$$u = \exp\left(\frac{\alpha m - 2\beta}{2-m}x\right)U(\xi,\eta), \quad \xi = t\exp(\alpha x), \quad \eta = y\exp(\beta x), \qquad (18)$$

редуцируется к двумерному уравнению, которое здесь опускается.

7. Уравнение (2) при $m \neq 2$ с использованием инвариантных переменных разного типа

$$u = \exp\left(\frac{2\alpha}{m-2}x\right)U(\xi,\eta),$$
$$\xi = t+\beta x, \quad \eta = y\exp(\alpha x), \tag{19}$$

редуцируется к двумерному уравнению, которое здесь опускается.

8. При $m = 2$ имеются решения с мультипликативным разделением переменных вида

$$u = e^{\lambda t}U(x, y), \tag{20}$$

где λ – произвольная постоянная, а функция $U = U(x, y)$ описывается двумерным уравнением

$$U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2 = \sigma\lambda^2 U^2.$$

9. При $m = 2$ имеются другие решения с мультипликативным разделением переменных

$$u = e^{\gamma x}U(y, t). \tag{21}$$

где γ – произвольная постоянная, а функция $U = U(y, t)$ описывается двумерным уравнением

$$UU_{yy} - U_y^2 = \sigma\gamma^{-2}U_t^2.$$

Замечание 2. Более сложные двумерные редукции уравнения (2) можно получить, заменив в (7), (9), (12), (15), (17)–(21) пространственные переменные их произвольными линейными комбинациями по правилу $x \Rightarrow a_1x + b_1y$ и $y \Rightarrow a_2x + b_2y$.

10. Одномерные редукции и точные решения можно получить, например, используя двумерные редукции. Проиллюстрируем сказанное на нескольких конкретных примерах.

В представлении (11) будем считать, что функция V зависит только от второго аргумента. В результате приходим к одномерному инвариантному решению

$$u = t^{\frac{2\alpha+2\beta+m}{m-2}}V(\zeta), \quad \zeta = y^\alpha x^{-\beta}. \tag{22}$$

Параметры α и β выбираются так, чтобы после подстановки выражения (22) в исходное уравнение (2) получилось ОДУ для функции $V = V(\zeta)$.

В представлении (14) будем считать, что функция V зависит только от второго аргумента. В результате приходим к одномерному инвариантному решению

$$u = \exp\left[\frac{2(\alpha+\beta)}{m-2}t\right]V(\zeta), \quad \zeta = y^\alpha x^{-\beta}. \tag{23}$$

Параметры α и β выбираются так, чтобы после подстановки выражения (23) в исходное уравнение (2) получилось ОДУ для функции $V = V(\zeta)$.

При $m = 2$ имеется решение вида

$$u = \exp(a_1x + b_1y + c_1t)U(\xi), \quad \xi = a_2x + b_2y + c_2t,$$

где a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 – произвольные постоянные, а функция $U = U(\xi)$ удовлетворяет автономному ОДУ

$$UU''_{\xi\xi} - (U'_\xi)^2 =$$
$$= \sigma\left(a_1b_2 - a_2b_1\right)^{-2}\left(c_1U + c_2U'_\xi\right)^2. \tag{24}$$

Уравнение (24) при $c_1 = 0$ легко интегрируется и имеет простое решение:

$$U = (A\xi + B)^{-k}, \quad k = \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)^2}{\sigma c_2^2},$$

где A, B – произвольные постоянные.

При $c_2 = 0$ общее решение уравнения (24) дается формулой

$$U = A\exp(\lambda\xi^2 + B\xi), \quad \lambda = \frac{1}{2}\sigma c_1^2\left(a_1b_2 - a_2b_1\right)^{-2},$$

где A, B – произвольные постоянные.

РЕДУКЦИИ С АДДИТИВНЫМ РАЗДЕЛЕНИЕМ ПЕРЕМЕННЫХ, ВЕДУЩИЕ К СТАЦИОНАРНЫМ УРАВНЕНИЯМ МОНЖА – АМПЕРА

1. Уравнение (2) имеет решения с аддитивным разделением переменных вида

$$u = At + w(x, y), \tag{25}$$

где A – произвольная постоянная, а функция w описывается неоднородным уравнением Монжа – Ампера с постоянной правой частью:

$$w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2 = \sigma A^m. \tag{26}$$

2. Нетрудно проверить, что уравнение (2) допускает точное решение с аддитивным разделением переменных вида (25), которое выражается в элементарных функциях:

$$u = C_1x^2 + C_2xy + \frac{1}{4C_1}\left(\sigma A^m + C_2^2\right)y^2 +$$
$$+ C_4x + C_5y + At + C_6, \tag{27}$$

где A, C_1, ..., C_5 $(C_1 \neq 0)$ – произвольные постоянные.

3. Используя результаты [11], можно получить, например, следующие точные решения вида (25) уравнения (2):

$$u = At \pm \frac{\sqrt{-\sigma A^m}}{C_2} x\left(C_1 x + C_2 y\right) + \\ +\varphi\left(C_1 x + C_2 y\right) + C_3 x + C_4 y + C_5,$$

$$u = At + \frac{1}{x + C_1}\left(C_2 y^2 + C_3 y + \frac{C_3^2}{4C_2}\right) + \\ + \frac{\sigma A^m}{12 C_2}\left(x^3 + 3C_1 x^2\right) + C_4 y + C_5 x + C_6,$$

$$u = At \pm \frac{2\sqrt{-\sigma A^m}}{3C_1 C_2}\left(C_1 x - C_2^2 y^2 + C_3\right)^{3/2} + \\ + C_4 x + C_5 y + C_6,$$

где C_1, ..., C_6 – произвольные постоянные, $\varphi = \varphi(z)$ – произвольная функция.

Замечание 3. При $\sigma A^m < 0$ общее решение неоднородного уравнения Монжа – Ампера (26) можно представить в параметрическом виде [6, 11].

4. Уравнение (2) допускает более сложные, чем (25), решения с обобщенным разделением переменных вида

$$u = (ax + by + c)t + w(x, y), \qquad (28)$$

где a, b, c – произвольные постоянные, а функция w описывается неоднородным уравнением Монжа – Ампера с переменной правой частью:

$$w_{xx} w_{yy} - w_{xy}^2 = \sigma (ax + by + c)^m. \qquad (29)$$

При $a = 1$, $b = c = 0$ уравнение (29) имеет, например, следующие точные решения с обобщенным разделением переменных:

$$w = \pm \frac{2\sqrt{-\sigma}}{m+2} x^{\frac{m+2}{2}} y + C_1 y + \varphi(x),$$

$$w = C_1 y^2 + C_2 xy + \frac{C_2^2}{4C_1} x^2 + \\ + \frac{\sigma}{2C_1(m+1)(m+2)} x^{m+2} + C_3 x + C_4 y + C_5,$$

$$w = \frac{1}{x}\left(C_1 y^2 + C_2 y + \frac{C_2^2}{4C_1}\right) + \\ + \frac{\sigma}{2C_1(m+2)(m+3)} x^{m+3} + C_3 x + C_4 y + C_5,$$

где $\varphi(x)$ – произвольная функция; C_1, ..., C_5 – произвольные постоянные.

РЕДУКЦИИ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ РАЗДЕЛЕНИЕМ ПЕРЕМЕННЫХ, ВЕДУЩИЕ К СТАЦИОНАРНЫМ УРАВНЕНИЯМ МОНЖА – АМПЕРА

1. Уравнение (2) при $m \neq 2$ имеет решения с мультипликативным разделением переменных:

$$u = (t + A)^{\frac{m}{m-2}} U(x, y), \qquad (30)$$

где A – произвольная постоянная, а функция $U = U(x, y)$ описывается стационарным уравнением Монжа – Ампера

$$U_{xx} U_{yy} - U_{xy}^2 = \sigma\left(\frac{m}{m-2}\right)^m U^m. \qquad (31)$$

Уравнение (31), в свою очередь, допускает решение с мультипликативным разделением переменных

$$U = x^{\frac{2}{2-m}} \theta(y),$$

где $\theta = \theta(y)$ удовлетворяет автономному ОДУ:

$$2m\theta\theta''_{yy} - 4(\theta'_y)^2 = \sigma(m-2)^2\left(\frac{m}{m-2}\right)^m \theta^m.$$

Подстановка $Z(\theta) = (\theta'_y)^2$ приводит это уравнение к линейному ОДУ первого порядка:

$$m\theta Z'_\theta - 4Z = \sigma(m-2)^2\left(\frac{m}{m-2}\right)^m \theta^m,$$

которое легко интегрируется.

2. Уравнение (2) при $m = 2$ допускает решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = e^{\lambda t} U(x, y), \qquad (32)$$

где λ – произвольная постоянная, а функция $U = U(x, y)$ описывается стационарным уравнением Монжа – Ампера

$$U_{xx} U_{yy} - U_{xy}^2 = \sigma \lambda^2 U^2. \qquad (33)$$

Уравнение (33) допускает решение с мультипликативным разделением переменных:

$$U = C_1 e^{\beta x}\theta(y), \quad \theta = \exp\left[\frac{1}{2}\sigma\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^2 y^2 + C_2 y\right],$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

РЕДУКЦИЯ С ОБОБЩЕННЫМ РАЗДЕЛЕНИЕМ ПЕРЕМЕННЫХ, ПРИВОДЯЩАЯ К ДВУМЕРНОМУ НЕСТАЦИОНАРНОМУ УРАВНЕНИЮ

1. Уравнение (2) допускает решения с обобщенным разделением переменных вида

$$u = \frac{1}{2}y^2 + axy + \frac{1}{2}a^2x^2 + by + U(x,t), \qquad (34)$$

где a, b – произвольные постоянные, а функция $U = U(x,t)$ описывается сравнительно простым нелинейным уравнением

$$U_{xx} = \sigma U_t^m. \qquad (35)$$

Для уравнения магнитной гидродинамики (1), что соответствует $m = \sigma = 1$, редуцированное уравнение (35) является линейным уравнением теплопроводности.

Некоторые точные решения уравнения (35) описаны ниже.

2. Уравнение (35) имеет простое решение с аддитивным разделением переменных:

$$U = At + \frac{1}{2}\sigma A^m x^2 + Bx + C,$$

где A, B, C – произвольные постоянные.

3. Уравнение (35) имеет точное решение в виде произведения функций разных аргументов $U = T(t)X(x)$, в том числе простое решение:

$$U = A(t + C_1)^{\frac{m}{m-1}}(x + C_2)^{\frac{2}{1-m}},$$

$$A = \left[\frac{2(m+1)(m-1)^{m-2}}{\sigma m^m}\right]^{\frac{1}{m-1}},$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

4. Уравнение (35) имеет решение типа бегущей волны:

$$U = U(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где λ – произвольная постоянная, а функция $U(z)$ описывается простым автономным ОДУ

$$U''_{zz} = \sigma\lambda^m (U'_z)^m,$$

общее решение которого при $m \neq 1, 2$ определяется формулой

$$U = \frac{1}{(2-m)\sigma\lambda^m}\left[(1-m)\sigma\lambda^m z + C_1\right]^{\frac{2-m}{1-m}} + C_2,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Уравнение (35) имеет также более общее решение вида

$$u = ax^2 + bx + ct + U(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где a, b, c, λ – произвольные постоянные, а функция $U(z)$ описывается автономным ОДУ

$$U''_{zz} = \sigma(\lambda U'_z + c)^m - 2a.$$

5. Уравнение (35) допускает автомодельное решение

$$U = t^{\frac{m+2\beta}{m-1}} V(\zeta), \quad \zeta = xt^{\beta},$$

где функция $V(\zeta)$ описывается неавтономным ОДУ

$$V''_{\zeta\zeta} = \sigma\left(\frac{m+2\beta}{m-1}V + \beta\zeta V'_{\zeta}\right)^m.$$

6. Уравнение (35) имеет инвариантное решение вида

$$U = t^{\frac{m}{m-1}}\theta(z), \quad z = x + \beta\ln t, \qquad (36)$$

где β – произвольная постоянная, а функция $\theta = \theta(z)$ описывается автономным ОДУ

$$\theta''_{zz} = \sigma\left(\frac{m}{m-1}\theta + \beta\theta'_z\right)^m.$$

Общее решение этого уравнения при $\beta = 0$, что соответствует решению с мультипликативным разделением переменных (36), можно представить в неявной форме.

7. Уравнение (35) имеет другое инвариантное решение вида

$$U = \exp\left(\frac{2\beta}{m-1}t\right)W(\xi), \quad \xi = x\exp(\beta t), \qquad (37)$$

где β – произвольная постоянная, а функция $W = W(\xi)$ описывается неавтономным ОДУ

$$W''_{\xi\xi} = \sigma\left(\frac{2\beta}{m-1}W + \beta\xi W'_{\xi}\right)^m.$$

8. Уравнение (35) при $m = -1$ с помощью преобразования Эйлера [11]

$$U(x,t)+w(\xi,\tau)=x\xi,\quad x=w_\xi,\quad t=-\tau/\sigma,$$

приводится к линейному уравнению теплопроводности

$$w_\tau=w_{\xi\xi}.$$

РЕДУКЦИЯ К СТАЦИОНАРНОМУ УРАВНЕНИЮ МОНЖА – АМПЕРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПЕРЕМЕННЫХ ТИПА БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

1. Уравнение (2) допускает решения с обобщенным разделением переменных комбинированного типа

$$\begin{gathered} u=C_1x^2+C_2xy+C_3y^2+\\ +C_4x+C_5y+C_6t+U(\xi,\eta), \qquad (38)\\ \xi=a_1x+b_1y+\lambda_1t,\quad \eta=a_2x+b_2y+\lambda_2t, \end{gathered}$$

где C_i, a_j, b_i, λ_j (i = 1, ..., 6; j = 1, 2) – произвольные постоянные; ξ и η – новые переменные типа бегущей волны, а функция $U=U(\xi,\eta)$ описывается стационарным уравнением типа Монжа – Ампера

$$\begin{gathered} (a_1b_2-b_1a_2)^2(U_{\xi\xi}U_{\eta\eta}-U_{\xi\eta}^2)+\\ +2(a_1^2C_3+b_1^2C_1-a_1b_1C_2)U_{\xi\xi}+\\ +2(a_2^2C_3+b_2^2C_1-a_2b_2C_2)U_{\eta\eta}+ \qquad (39)\\ +2[2a_1a_2C_3+2b_1b_2C_1-(a_1b_2+a_2b_1)C_2]U_{\xi\eta}+\\ +4C_1C_3-C_2^2=\sigma(C_6+\lambda_1U_\xi+\lambda_2U_\eta)^m. \end{gathered}$$

2. Рассмотрим специальный случай (38)–(39), положив

$$a_1=a,\ b_1=b,\ \lambda_1=\lambda,\ a_2=b_2=0,\ \lambda_2=1,\ \eta=t,$$

что соответствует решению вида

$$\begin{gathered} u=C_1x^2+C_2xy+C_3y^2+\\ +C_4x+C_5y+C_6t+U(\xi,t), \qquad (40)\\ \xi=ax+by+\lambda t, \end{gathered}$$

где C_i, a, b, λ (i = 1, ..., 6) – произвольные постоянные. В этом случае функция $U=U(\xi,t)$ описывается нелинейным уравнением

$$\begin{gathered} 2(a^2C_3+b^2C_1-abC_2)U_{\xi\xi}=\\ =\sigma(C_6+U_t+\lambda U_\xi)^m-4C_1C_3+C_2^2. \end{gathered} \qquad (41)$$

3. В частности, взяв в (40)–(41) функцию U с одним аргументом ξ, приходим к нелинейному ОДУ автономного вида

$$\begin{gathered} 2\left(a^2C_3+b^2C_1-abC_2\right)U''_{\xi\xi}=\\ =\sigma\left(C_6+\lambda U'_\xi\right)^m-4C_1C_3+C_2^2. \end{gathered} \qquad (42)$$

Подстановка $W(\xi)=U'_\xi$ приводит его к ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными. При выполнении условий $4C_1C_3-C_2^2=0$, $m\neq 1,\ 2$, общее решение уравнения (42) записывается так:

$$U=\frac{1}{A(2-m)}\left[A(1-m)\xi+B_1\right]^{\frac{2-m}{1-m}}-\frac{C_6}{\lambda}\xi+B_2,$$

$$A=\frac{\sigma\lambda^m}{2\left(a^2C_3+b^2C_1-abC_2\right)},$$

где B_1 и B_2 – произвольные постоянные.

РЕДУКЦИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НОВОЙ ПЕРЕМЕННОЙ, ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ КООРДИНАТАМ

1. В переменных, одна из которых время, а другая задается параболической функцией по пространственным переменным

$$u=U(z,t),\quad z=y+ax^2, \qquad (43)$$

где a – произвольная постоянная, уравнение (2) редуцируется к двумерному уравнению

$$2aU_zU_{zz}=\sigma(U_t)^m. \qquad (44)$$

Некоторые точные решения уравнения (44) описаны ниже.

2. Редуцированное уравнение (44) допускает решения с аддитивным разделением переменных

$$U=C_1t\pm\frac{2}{3}\frac{\sqrt{\sigma C_1^m}}{a}(z+C_2)^{3/2}+C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

3. Уравнение (35) при $m\neq 2$ имеет простое решение в виде произведения степенных функций разных аргументов

$$U=A(t+C_1)^{\frac{m}{m-2}}(z+C_2)^{\frac{3}{2-m}},$$

$$A=\left[-\frac{18a(m+1)(m-2)^{m-3}}{\sigma m^m}\right]^{\frac{1}{m-2}},$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

4. Уравнение (44) имеет решения типа бегущей волны:

$$U = U(\xi), \quad \xi = z + \lambda t \equiv y + ax^2 + \lambda t, \qquad (45)$$

где λ – произвольная постоянная, а функция $U(z)$ описывается автономным ОДУ

$$2aU''_{\xi\xi} = \sigma\lambda^m (U'_\xi)^{m-1},$$

общее решение которого при $m \neq 2, 3$ определяется формулой

$$U = \frac{1}{\kappa(3-m)}\left[\kappa(2-m)\xi + C_1\right]^{\frac{3-m}{2-m}} + C_2, \quad \kappa = \frac{\sigma\lambda^m}{2a},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Замечание 4. Более общее, чем (45), решение уравнения (44) можно получить, если искать решение в виде

$$U = Ct + W(\xi), \quad \xi = z + \lambda t \equiv y + ax^2 + \lambda t.$$

5. Уравнение (44) при $m \neq 2$ допускает автомодельные решения:

$$U = t^{\frac{m+3\beta}{m-2}} V(\zeta), \quad \zeta = zt^\beta,$$

где β – произвольная постоянная, а функция $V = V(\xi)$ описывается неавтономным ОДУ

$$2aV'_\zeta V''_{\zeta\zeta} = \sigma\left(\frac{m+3\beta}{m-2}V + \beta\zeta V'_\zeta\right)^m.$$

6. Уравнение (44) при $m \neq 2$ имеет инвариантные решения вида

$$U = t^{\frac{m}{m-2}} f(\eta), \quad \eta = z + \lambda t,$$

где λ – произвольная постоянная, а функция $f = f(\eta)$ описывается автономным ОДУ

$$2af'_\eta f''_{\eta\eta} = \sigma\left(\frac{m}{m-2}f + \lambda f'_\eta\right)^m.$$

7. Уравнение (44) при $m \neq 2$ допускает также другие инвариантные решения:

$$U = \exp\left(\frac{3\beta}{m-2}t\right) g(\tau), \quad \tau = \exp(\beta t) z,$$

где β – произвольная постоянная, а функция $g = g(\tau)$ описывается неавтономным ОДУ

$$2ag'_\tau g''_{\tau\tau} = \sigma\left(\frac{3\beta}{m-2}g + \beta\tau g'_\tau\right)^m.$$

8. Уравнение (44) при $m = 2$ имеет простые решения экспоненциального вида

$$U = A\exp\left[kz \pm (2ak^3/\sigma)^{1/2} t\right],$$

где A, k – произвольные постоянные. Имеются также более сложные решения вида $U = e^{\lambda t}\varphi(z)$, где функция $\varphi = \varphi(z)$ описывается автономным ОДУ, общее решение которого можно представить в неявном виде.

РЕДУКЦИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НОВОЙ ПЕРЕМЕННОЙ КВАДРАТИЧНОГО ВИДА ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ КООРДИНАТАМ

1. В переменных, одна из которых время, а другая квадратична относительно пространственных переменных,

$$u = U(z,t), \quad z = ax^2 + bxy + cy^2 + kx + sy, \qquad (46)$$

где a, b, c, k, s – произвольные постоянные, уравнение (2) редуцируется к двумерному нестационарному уравнению

$$\begin{aligned} &2(Az+B)U_z U_{zz} + AU_z^2 = \sigma(U_t)^m; \\ &A = 4ac - b^2, \quad B = as^2 + ck^2 - bks. \end{aligned} \qquad (47)$$

Отметим, что в зависимости от коэффициентов квадратичных слагаемых a, b, c в (46), кривая $z = \text{const}$ может быть эллипсом (при $A = 4ac - b^2 > 0$), гиперболой (при $A < 0$) или параболой (при $A = 0$).

Рассмотрим некоторые классы точных решений, которые допускает уравнение (47).

2. Редуцированное уравнение (47) допускает решения с аддитивным разделением переменных

$$U = Ct + \zeta(z),$$

где C – произвольная постоянная, а функция $\zeta = \zeta(z)$ описывается нелинейным ОДУ

$$2(Az+B)\zeta'_z\zeta''_{zz} + A(\zeta'_z)^2 = \sigma C^m,$$

которое легко интегрируется, поскольку допускает понижение порядка и одновременно линеаризуется с помощью подстановки $w(z) = (\zeta' z)^2$. В результате получим

$$\zeta = \pm\int\left(\frac{C_1}{Az+B}+\frac{\sigma C^m}{A}\right)^{1/2} dz + C_2,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные (отметим, что интеграл правой части можно выразить через элементарные функции).

3. При $4ac-b^2\neq 0$, $m\neq 2$, редуцированное уравнение (47) допускает решения в виде произведения функций разных аргументов:

$$U = t^{\frac{m}{m-2}} f(z),$$

где функция $f = f(z)$ описывается неавтономным ОДУ

$$2(Az+B)\, f'_z f''_{zz} + A(f'_z)^2 = \sigma\left(\frac{m}{m-2}\right)^m f^m,$$

которое имеет простое частное решение:

$$f = k(Az+B)^{\frac{2}{2-m}},$$

$$k = \left[\frac{4A^3(m+2)}{\sigma(2-m)^3}\left(\frac{m-2}{m}\right)^m\right]^{\frac{1}{m-2}}.$$

4. При $4ac-b^2\neq 0$, $m\neq 2$, редуцированное уравнение (47) допускает решения квазиавтомодельного вида

$$U = t^{\frac{m+2\beta}{m-2}} V(\eta), \quad \eta = (Az+B)t^\beta, \qquad (48)$$

где β – произвольная постоянная, а функция $V = V(\eta)$ удовлетворяет нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$2\eta V'_\eta V''_{\eta\eta} + (V'_\eta)^2 = \sigma A^{-3}\left(\frac{m+2\beta}{m-2}V + \beta\eta V'_\eta\right)^m. \qquad (49)$$

5. При $4ac-b^2\neq 0$ преобразование

$$t = t, \quad z = \frac{\sqrt{|A|}}{2}\rho^2 - \frac{B}{A}, \quad U = W(\rho, t),$$

приводит уравнение (47) к каноническому виду

$$\operatorname{sign} A\rho^{-1}W_\rho W_{\rho\rho} = \sigma(W_t)^m. \qquad (50)$$

РЕДУКЦИИ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

1. Уравнение (5), записанное в полярных координатах $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, допускает не зависящие от угловой переменной радиально-симметричные решения, которые описываются двумерным уравнением

$$r^{-1}u_r u_{rr} = \sigma(u_t)^m, \qquad (51)$$

которое с точностью до переобозначения независимой переменной совпадает с уравнением (50) при $A > 0$. Три точных решения уравнения (51) получим, используя результаты, приведенные в пп. 2–4 предыдущего раздела.

2. Уравнение (51) имеет точное решение с аддитивным разделением переменных

$$u = \left(C_1C_2^2\right)^{\frac{1}{m}} t + C_2\int\sqrt{\sigma C_1 r^2 + C_3}\,dr + C_4,$$

где $C_1, \ldots, C_4$ – произвольные постоянные (при различных знаках произведения σC_1 интеграл в правой части выражается через разные элементарные функции).

3. Уравнение (51) при $m \neq 2$ допускает автомодельное решение

$$u = t^{\frac{m+4\gamma}{m-2}} F(z), \quad z = rt^\gamma,$$

где γ – произвольная постоянная, а функция $F = F(z)$ описывается ОДУ

$$z^{-1}F'_z F''_{zz} = \sigma\left(\frac{m+4\gamma}{m-2}F + \gamma z F'_z\right)^m. \qquad (52)$$

4. Уравнение (5) при $m \neq 2$ имеет также точные решения с разделением переменных вида

$$u = r^{\frac{4}{2-m}}\upsilon(\varphi, t), \qquad (53)$$

где функция $\upsilon = \upsilon(\varphi, t)$ описывается двумерным уравнением

$$\frac{4(2+m)}{(2-m)^2}\upsilon\left(\upsilon_{\varphi\varphi} + \frac{4}{2-m}\upsilon\right) - \left(\frac{2+m}{2-m}\right)^2\upsilon_\varphi^2 = \sigma\upsilon_t^m. \qquad (54)$$

5. Поскольку уравнение (54) не зависит явно от независимых переменных, то оно имеет решение типа бегущей волны:

$$\upsilon = \upsilon(Z), \quad Z = \varphi + \lambda t,$$

где λ – произвольная постоянная, а функция $\upsilon = \upsilon(Z)$ описывается автономным ОДУ

$$\frac{4(2+m)}{(2-m)^2}\upsilon\left(\upsilon''_{ZZ}+\frac{4}{2-m}\upsilon\right)-$$
$$-\left(\frac{2+m}{2-m}\right)^2(\upsilon'_Z)^2=\sigma\lambda^m(\upsilon'_Z)^m.$$

6. Уравнение (54) допускает решение с мультипликативным разделением переменных вида

$$\upsilon=(t+C)^{\frac{m}{m-2}}V(\varphi),$$

где C – произвольная постоянная, а функция $V = V(\varphi)$ описывается автономным ОДУ

$$\frac{4(2+m)}{(2-m)^2}V\left(V''_{\varphi\varphi}+\frac{4}{2-m}V\right)-\left(\frac{2+m}{2-m}\right)^2(V'_\varphi)^2=$$
$$=\sigma\left(\frac{m}{m-2}\right)^m V^m.$$

Имеется также более общее решение вида

$$\upsilon=(t+C_1)^{\frac{m}{m-2}}V(\zeta),\ \text{где}\quad \zeta=\varphi+C_2\ln(t+C_1).$$

КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Исследуется обобщенное уравнение электронной магнитной гидродинамики с нелинейностью типа Монжа – Ампера

$$u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2=\sigma(u_t)^m,$$

которое встречается также в дифференциальной геометрии. Рассматриваются двумерные и одномерные редукции, приводящие его к более простым уравнениям с частными производными с двумя независимыми переменными (в том числе к стационарным уравнениям типа Монжа – Ампера) или обыкновенным дифференциальным уравнениям. Описаны некоторые автомодельные и другие инвариантные решения. Построен ряд решений с обобщенным разделением переменных, которые выражаются в элементарных функциях. Полученные результаты могут быть использованы для оценки точности и анализа адекватности численных методов решения сильно нелинейных задач математической физики.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена по теме государственного задания (регистр. № 123021700057-0).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Smirnov V.V., Chukbar K.V.* «Phonons» in two-dimensional vortex lattices // Journal of Experimental and Theoretical Physics, 2001. V. 93. № 1. P. 126–135.
2. *Zaburdaev V.Yu., Smirnov V.V., Chukbar K.V.* Nonlinear dynamics of electron vortex lattices //Plasma Physics Reports, 2014. V. 30. № 3. P. 214–217.
3. *Ohkitani K., Sultu F. Al.* Singularity formation in the Smirnov–Chukbar–Zaburdaev equation for the deformation of vortex lattices // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2013. V. 46. № 20.
4. *Dubinov A.E., Kitayev I.N.* New exact solutions of the equation of non-linear dynamics of a lattice of electronic vortices in plasma in the framework of electron magnetohydrodynamics // Magnetohydrodynamics, 2020. V. 56. № 4. P. 369–375.
5. *Полянин А.Д.* Преобразования, редукции и точные решения одного сильно нелинейного уравнения электронной магнитной гидродинамики // Вестник НИЯУ МИФИ, 2023. Т. 12. № 4. С. 201–210.
6. *Гурса Э.* Курс математического анализа. Т. 3, Ч. 1. М.: Гостехиздат, 1933.
7. *Martin M.N.* The propagation of a plane shock into a quiet atmosphere // Canadian Journal of Mathematics, 1953. V. 3. P. 165–187.
8. *Rozhdestvenskii B.L., Yanenko N.N.* Systems of Quasilinear Equations and Their Applications to Gas Dynamics. Providence: American Mathematical Society, 1983, 676 p.
9. *Хабиров С.В.* Неизэнтропические одномерные движения газа, построенные с помощью контактной группы неоднородного уравнения Монжа – Ампера // Математический сборник, 1990. V. 181. № 12. P. 1607–1622.
10. *Ibragimov N.H. (ed.).* CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Vol. 1. Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws. Boca Raton: CRC Press, 1994.
11. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.
12. *Крылов Н.В.* Последовательности выпуклых функций и оценки максимума решения параболического уравнения // Сибирский математический журнал, 1976. Т. 17. № 2. С. 226–236.
13. *Spiliotis J.* Certain results on a parabolic type Monge – Ampere equation // Journal *of* Mathematical Analysis and Applications. 1992. V. 163. № 2. P. 484–511.
14. *Chen L., Wang G., Lian S.* Convex-monotone functions and generalized solution of parabolic Monge – Ampere equation // Journal of Differential Equations, 2002. V. 186. № 2. P. 558–571.
15. *Tang L.* Regularity results on the parabolic Monge – Ampere equation with VMO type data // Journal of Differential Equations, 2013. V. 255. № 7. P. 1646–1656.

16. *Dai L.* Exterior problems of parabolic Monge – Ampere equations for n = 2 // Computational & Applied Mathematics, 2014. V. 67. № 8. P. 1497–1506.

17. *Dai L., Cheng H.* The first initial-boundary value problem of parabolic Monge – Ampere equations outside a bowl-shaped domain // Boundary Value Problems, 2021. № 29. Режим доступа: https://doi.org/10.1186/s13661-021-01505-w

18. *Ивочкина Н.М., Ладыженская О.А.* О параболических уравнениях, порождаемых симметрическими функциями собственных значений гессиана или главными кривизнами искомой поверхности. Ч. I: Параболические уравнения Монжа – Ампера // Алгебра и анализ. 1994. Т. 6. № 3. С. 141–160.

19. *Wang J., Yang J., Liu X.* The initial and Neumann boundary value problem for a class parabolic Monge – Ampere equation // Abstract and Applied Analysis. V. 2013. № 535629. Режим доступа: http://dx.doi.org/10.1155/2013/ 535629.

20. *Tang L.* Boundary regularity on the parabolic Monge – Ampere equation // Journal of Differential Equations, 2015. V. 259. P. 6399–6431.

21. *Loftin J., Tsui M.P.* Ancient solutions of the affine normal flow // Journal of Differential Geometry, 2008. V. 78. P. 113–162.

22. *Ovsiannikov L.V.* Group Analysis of Differential Equations. New York: Academic Press, 1982.

23. *Olver P.J.* Application of Lie Groups to Differential Equations, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2000.

24. *Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R.* Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2007.

25. *Полянин А.Д., Журов А.И.* Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики. М.: ИПМех РАН, 2020.

26. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear PDEs. Boca Raton–London: CRC Press, 2022.

27. *Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н.* Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984.

28. *Кудряшов Н.А.* Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Изд. Дом «Интеллект», 2010.

29. *Aksenov A.V., Polyanin A.D.* Methods for constructing complex solutions of nonlinear PDEs using simpler solutions // Mathematics, 2021. V. 9. № 4. 345.

30. *Аксенов А.В., Полянин А.Д.* Обзор методов построения точных решений уравнений математической физики, основанных на использовании более простых решений // Теоретическая и математическая физика, 2022. V. 211. № 2. P. 567–594.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta «MIFI», 2023, vol. 12, no. 5, pp. 276–288

EXACT SOLUTIONS AND REDUCTIONS OF UNSTEADY EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS OF THE MONGE – AMPERE TYPE

A.D. Polyanin
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526, Russia
e-mail: polyanin@ipmnet.ru

Received October 11, 2023; revised October 11, 2023; accepted October 24, 2023

Nonlinear unsteady equations of mathematical physics with three independent variables containing the first derivative in time and a quadratic combination of the second derivatives in spatial variables of the Monge – Ampere type are investigated. Separate equations of this type are found, for example, in electron magnetohydrodynamics and differential geometry. In this paper, an eleven-parameter transformation preserving the form of the class of nonlinear equations under study is described. Two-dimensional and one-dimensional reductions leading to simpler partial differential equations with two independent variables or ordinary differential equations are considered. Self-similar and other invariant solutions are obtained. By methods of generalized separation of variables, a number of exact solutions are constructed, many of which are expressed in terms of elementary functions.

Keywords: nonlinear equations of mathematical physics, unsteady equations of the Monge – Ampere type, magnetohydrodynamics, exact solutions, self-similar and invariant solutions, generalized separable solutions, solutions in elementary functions, one-dimensional and two-dimensional reductions.

REFERENCES

1. *Smirnov V.V., Chukbar K.V.* «Phonons» in two-dimensional vortex lattices. Journal of Experimental and Theoretical Physics, 2001. Vol. 93. No. 1. Pp. 126–135.

2. *Zaburdaev V.Yu., Smirnov V.V., Chukbar K.V.* Nonlinear dynamics of electron vortex lattices. Plasma Physics Reports, 2014. Vol. 30. No. 3. Pp. 214–217.

3. *Ohkitani K., Sultu F.* Al. Singularity formation in the Smirnov–Chukbar– Zaburdaev equation for the deformation of vortex lattices, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2013. Vol. 46. No. 20, 205501.

4. *Dubinov A.E., Kitayev I.N.* New exact solutions of the equation of non-linear dynamics of a lattice of electronic vortices in plasma in the framework of electron magnetohydrodynamics. Magnetohydrodynamics, 2020. Vol. 56. No. 4. Pp. 369–375.

5. *Polyanin A.D., Preobrazovaniya*. Redukcii i tochnye resheniya odnogo sil'no nelinejnogo uravneniya elektronnoj magnitnoj gidrodinamiki [Transformations, reductions and exact solutions of a highly nonlinear equation of electron magnetohydrodynamics], Vestnik Nacional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2023. Vol. 12. No. 4. Pp. 201–210 (in Russian).

6. *Goursat E.* Kurs matematicheskogo analiza. [A course of mathematical analysis]. Vol. 3, Part 1, Moscow, Gostekhizdat Publ., 1933 [in Russian].

7. *Martin M.N.* The propagation of a plane shock into a quiet atmosphere. Canadian Journal of Mathematics, 1953. Vol. 3. Pp. 165–187.

8. *Rozhdestvenskii B.L., Yanenko N.N.* Systems of Quasilinear Equations and Their Applications to Gas Dynamics. Providence, American Mathematical Society, 1983. 676 p.

9. *Khabirov S.V.* Neizentropicheskie odnomernye dvizheniya gaza, postroennye s pomoshch'yu kontaktnoj gruppy neodnorodnogo uravneniya Monzha–Ampera [Nonisentropic one-dimensional gas motions obtained with the help of the contact group of the nonhomogeneous Monge – Amp`ere equation]. Matematicheskij sbornik, 1990, Vol. 181. No. 12. Pp. 1607–1622 (in Russian).

10. *Ibragimov N.H. (ed.).* CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Vol. 1, Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws, CRC Press. Boca Raton. 1994.

11. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. 2nd ed. CRC Press, Boca Raton, 2012.

12. *Krylov N.V.* Posledovatel`nosti vy`pukly`kh funkczij i oczenki maksimuma resheniya parabolicheskogo uravneniya [Sequences of convex functions, and estimates of the maximum of the solution of a parabolic equation]. Sibirskij matematicheskij zhurnal, 1976. Vol. 17. No. 2. Pp. 226–236 (in Russian).

13. *Spiliotis J.* Certain results on a parabolic type Monge – Ampere equation. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1992. Vol. 163. No. 2. Pp. 484–511.

14. *Chen L., Wang G., Lian S.* Convex-monotone functions and generalized solution of parabolic Monge – Ampere equation. Journal of Differential Equations, 2002. Vol. 186. No. 2. Pp. 558–571.

15. *Tang L.* Regularity results on the parabolic Monge –Ampere equation with VMO type data. Journal of Differential Equations, 2013. Vol. 255. No. 7. Pp. 1646–1656.

16. *Dai L.* Exterior problems of parabolic Monge – Ampere equations for $n = 2$, Computational & Applied Mathematics, 2014. Vol. 67. No. 8. Pp. 1497–1506.

17. *Dai L., Cheng H.* The first initial-boundary value problem of parabolic Monge – Ampere equations outside a bowl-shaped domain.Boundary Value Problems, 2021. No. 29; https://doi.org/10.1186/s13661-021-01505-w

18. *Ivochkina N.M., Ladyzhenskaya O.A.* O parabolicheskih uravneniyah, porozhdaemyh simmetricheskimi funkciyami sobstvennyh znachenij Gessiana ili glavnymi kriviznami iskomoj poverhnosti. Chast' I: Parabolicheskie uravneniya Monzha – Ampera [On parabolic equations generated by symmetric functions of Hessian eigenvalues or the principal curvatures of the desired surface. Part I: Monge – Ampere parabolic equations], Algebra i analiz, 1994. Vol. 6. No. 3. Pp. 141–160 (in Russian).

19. *Wang J., Yang J., Liu X.* The initial and Neumann boundary value problem for a class parabolic Monge – Ampere equation. Abstract and Applied Analysis. Vol. 2013. No. 535629. http://dx.doi.org/10.1155/2013/535629.

20. *Tang L.* Boundary regularity on the parabolic Monge – Ampere equation. Journal of Differential Equations, 2015. Vol. 259. Pp. 6399–6431.

21. *Loftin J., Tsui M.P.* Ancient solutions of the affine normal flow. Journal of Differential Geometry, 2008. Vol. 78. Pp. 113–162.

22. *Ovsiannikov L.V.* Group Analysis of Differential Equations, Academic Press, New York, 1982.

23. *Olver P.J.* Application of Lie Groups to Differential Equations, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 2000.

24. *Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R.* Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2007.

25. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Metody razdeleniya peremennyh i tochnye resheniya nelinejnyh uravnenij matematicheskoj fiziki [Methods of Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear Equations of Mathematical Physics]. Moscow, IPMech RAS Publ., 2020 (in Russian).

26. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear PDEs. Boca Raton–London, CRC Press, 2022.

27. *Sidorov A.F., Shapeev V.P., Yanenko N.N.* Metod differencial'nyh svyazej i ego prilozheniya v

gazovoj dinamike [Method of Differential Constraints and its Applications in Gas Dynamics]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1984 (in Russian).

28. *Kudryashov N.A.* Metody nelinejnoj matematicheskoj fiziki [Methods of Nonlinear Mathematical Physics]. Dolgoprudnyi, Izd. Dom Intellekt Publ., 2010 (in Russian).

29. *Aksenov A.V., Polyanin A.D*. Methods for constructing complex solutions of nonlinear PDEs using simpler solutions, Mathematics, 2021. Vol. 9. No. 4. P. 345.

30. *Aksenov A.V., Polyanin A.D*. Obzor metodov postroeniya tochnyh reshenij uravnenij matematicheskoj fiziki, osnovannyh na ispol’zovanii bolee prostyh reshenij [Review of methods for constructing exact solutions of equations of mathematical physics based on simpler solutions]. Theoretical and Mathematical Physics, 2022. Vol. 211. No. 2. Pp. 567–594 (in Russian).