

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517

**ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ, ИНТЕГРАЛЬНЫХ,
ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ И ДРУГИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

А.В. Аксенов

Механико-математический факультет, Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова, Москва, 119991, Россия
e-mail: aksenov@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию: 19.09.2023

После доработки: 19.09.2023

Принята к публикации: 26.09.2023

Рассматриваются точные решения различных математических уравнений (алгебраических, тригонометрических, обыкновенных дифференциальных, с частными производными первого порядка, математической физики, интегральных, функциональных, дифференциальных с запаздыванием, функционально-дифференциальных и др.). Особое внимание уделяется уравнениям, которые встречаются в различных областях естественных и инженерных наук (в теории тепло- и массопереноса, теории волн, гидродинамике, газовой динамике, теории горения, теории упругости, общей механике, теоретической физике, нелинейной оптике, биологии, химической технологии, и др.), и уравнениям достаточно общего вида, которые зависят от нескольких свободных параметров или произвольных функций. Рассматриваются также уравнения, которые изучаются в университетах и технических вузах.

Ключевые слова: алгебраические уравнения; обыкновенные дифференциальные уравнения; уравнения с частными производными; уравнения математической физики; интегральные уравнения; функциональные уравнения; точные решения.

DOI: 10.26583/vestnik.2023.300

В 2023 г. в издательстве Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН вышла в свет книга А.Д. Полянина «Точные решения дифференциальных, интегральных, функциональных и других математических уравнений» [1].

Линейные и нелинейные математические уравнения встречаются практически во всех областях естественных и технических наук, а также в некоторых областях экономических и гуманитарных наук. Данная книга посвящена краткому описанию точных решений математических уравнений различных типов, она содержит также некоторые преобразования и редукции, приводящие к более простым уравнениям.

Напомним, что решение называется *точным*, если оно при подстановке в рассматриваемое математическое уравнение превращает его в тождество. При этом не допускаются какие-либо приближения или упрощения уравнения, и не используются никакие априорные допущения. Важно отметить, что для различных типов математических уравнений понятие точного

решения допускает различные уточнения и модификации.

Точные решения математических уравнений всегда играли и продолжают играть огромную роль для формирования правильного понимания качественных особенностей многих явлений и процессов в различных областях естествознания. В частности, точные решения нелинейных уравнений математической физики наглядно демонстрируют и позволяют лучше понять механизмы таких сложных нелинейных эффектов, как пространственная локализация процессов переноса, множественность или отсутствие стационарных состояний при определенных условиях, существование режимов с обострением, возможная негладкость или разрывность искомым величин и др. Простые решения линейных и нелинейных дифференциальных уравнений широко используются для иллюстрации теоретического материала и некоторых приложений в учебных курсах университетов и технических вузов (по прикладной и вычислительной математике, асимптотическим методам, теоретической физике, теории тепло- и массопереноса,

гидродинамике, газовой динамике, теории волн, нелинейной оптике и др.).

Точные решения уравнений играют важную роль стандартных *математических эталонов*, которые могут быть использованы для проверки корректности и оценки точности различных численных, асимптотических и приближенных аналитических методов. Точные решения необходимы также для разработки и совершенствования соответствующих разделов компьютерных программ, предназначенных для аналитических вычислений (системы компьютерной алгебры Mathematica, Maple, Maxima и др.)

В данной книге рассматриваются следующие типы математических уравнений:

- алгебраические уравнения;
- тригонометрические, гиперболические и другие трансцендентные уравнения;
- обыкновенные дифференциальные уравнения;
- системы обыкновенных дифференциальных уравнений;
- уравнения с частными производными первого порядка;
- линейные уравнения математической физики;
- нелинейные уравнения математической физики;
- системы уравнений математической физики;
- линейные и нелинейные интегральные уравнения;
- разностные, возвратные и другие функциональные уравнения;
- обыкновенные дифференциальные уравнения с запаздыванием;
- обыкновенные функционально-дифференциальные уравнения;
- уравнения математической физики с запаздыванием;
- функционально-дифференциальные уравнения с частными производными.

Важно отметить, что решения математических уравнений разных типов часто явно или неявно связаны между собой. Например, решение линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами сводится к решению алгебраических уравнений, а решения алгебраических уравнений старших порядков строятся с помощью соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений и выражаются в терминах специальных функций. Решение уравнений с частными производными первого порядка сводится к инте-

грированию систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Решения многих линейных и нелинейных уравнений математической физики обычно ищутся методами разделения переменных (включая методы обобщенного и функционального разделения переменных) и методами группового анализа и выражаются через решения обыкновенных дифференциальных уравнений (так называемые одномерные редукции) или систем таких уравнений. Решения некоторых нелинейных уравнений математической физики сводятся к функциональным или функционально-дифференциальным уравнениям, а решения различных типов функциональных уравнений выражаются через решения обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений с частными производными. Решения некоторых классов интегральных уравнений строятся с помощью анализа соответствующих классов дифференциальных уравнений и наоборот. Решения уравнений математической физики с постоянным и пропорциональным запаздыванием часто выражаются через решения обыкновенных дифференциальных уравнений или обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием и т.д.

Тесные связи между решениями математических уравнений разных типов и послужили одной из основных мотивацией написания данной книги, в которой рассматриваются наиболее распространенные и некоторые другие точные решения различных уравнений.

При отборе материала автор отдавал наибольшее предпочтение следующим важным классам математических уравнений:

1) уравнениям, которые встречаются в различных областях естественных и инженерных наук (в теории тепло- и массопереноса, теории волн, гидродинамике, газовой динамике, теории горения, теории упругости, общей механике, теоретической физике, нелинейной оптике, химической технологии, биологии, экологии и др.);

2) уравнениям достаточно общего вида, которые зависят от свободных параметров или произвольных функций (точные решения таких уравнений представляют наибольший интерес для тестирования численных и приближенных аналитических методов);

3) уравнениям, которые изучаются в университетах и технических вузах.

Данная книга не имеет аналогов в мировой литературе. По содержанию и форме представления результатов она является мультипликативным справочником, в котором представлена

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ, ИНТЕГРАЛЬНЫХ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ И ДРУГИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

обширная коллекция точных решений различных математических уравнений. При составлении книги использован материал наиболее полных справочников по отдельным видам математических уравнений (обыкновенным дифференциальным, с частными производными и интегральным, см. [2–5]); включены также некоторые решения, приведенные в [6, 7]. Кроме того, добавлено много других, в том числе новых, решений.

Для максимального расширения круга потенциальных читателей с разной математической подготовкой автор по возможности старался избегать использования специальной терминологии. Поэтому некоторые результаты описаны схематически и упрощенно, чего вполне достаточно для их практического применения. Изложение материала ведется по принципу *от простого к сложному*. Многие разделы можно читать независимо друг от друга, что облегчает работу с материалом. Подробное оглавление позволяет быстро находить необходимую информацию.

По нашему мнению, данная книга будет полезной для широкого круга научных работников, преподавателей вузов, аспирантов и студентов, специализирующихся в области прикладной математики, математической физики, вычислительной математики, механики, теории управления, биологии, биофизики, биохимии, медицины, химической технологии и экологии. Отдельные уравнения и их решения могут быть использованы в качестве иллюстративного материала на лекциях и семинарах по прикладной и вычислительной математике, дифференциальным уравнениям, уравнениям математической физики и интегральным уравнениям.

Заметим, что некоторые алгебраические, трансцендентные и функциональные уравнения могут быть полезны учителям математики физико-математических классов при проведении занятий, а также для составления контрольных работ и домашних заданий (путем фиксации в этих уравнениях свободных параметров).

Отметим, что электронная версия книги находится в свободном доступе в интернете (https://eqworld.ipmnet.ru/Arts_Polyanin/Book_Polyanin_Mathematical_Equations_2023.pdf).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полянин А.Д. Точные решения дифференциальных, интегральных, функциональных и других математических уравнений. М.: ИПМех РАН, 2023. 600 с.
2. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems. CRC Press, Boca Raton–London, 2018. 1427 p.
3. Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E. Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists, 2nd Edition. CRC Press, Boca Raton–London, 2016.
4. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton–London, 2012.
5. Polyanin A.D., Manzhirov A.V. Handbook of Integral Equations, 2nd Edition. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton–London. 2008.
6. Polyanin A.D., Manzhirov A.V. Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists. New York: Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton–London, 2007. 1544 p.
7. Polyanin A.D., Sorokin V.G., Zhurov A.I. Delay Ordinary and Partial Differential Equations. New York: CRC Press, Boca Raton, 2023. 434 p.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta «MIFI», 2023, vol. 12, no. 5, pp. 306–309

EXACT SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL, INTEGRAL, FUNCTIONAL AND OTHER MATHEMATICAL EQUATIONS

A.V. Aksenov

¹ Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University,
Moscow, 119991, Russia
e-mail: aksenov@mech.math.msu.su

Received September 19, 2023; revised September 19, 2023; accepted September 26, 2023

Exact solutions of various mathematical equations are considered (algebraic, trigonometric, ordinary differential, first order partial derivatives, mathematical physics, integral, functional, delay differential, functional differential, etc.). Particular attention is paid to equations that are found in various fields of natural and engineering sciences (in

the theory of heat and mass transfer, wave theory, hydrodynamics, gas dynamics, combustion theory, elasticity theory, general mechanics, theoretical physics, nonlinear optics, biology, chemical technology, etc.) and equations of a fairly general form, which depend on several free parameters or arbitrary functions. Equations that are studied in universities and technical colleges are also considered.

Keywords: algebraic equations; ordinary differential equations; partial differential equations; equations of mathematical physics; integral equations; functional equations; exact solutions.

REFERENCES

1. *Polyanin A.D.* Exact solutions of differential, integral, functional and other mathematical equations. Moscow, Institute of Mechanics and Mechanics RAS Publ., 2023. 600 p. [in Russian].
2. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems. CRC Press, Boca Raton–London, 2018. 1427 p.
3. *Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E.* Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists, 2nd Edition. CRC Press, Boca Raton–London, 2016.
4. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton–London, 2012.
5. *Polyanin A.D., Manzhirov A.V.* Handbook of Integral Equations, 2nd Edition. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton–London. 2008.
6. *Polyanin A.D., Manzhirov A.V.* Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists. New York, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton–London, 2007., 1544 p.
7. *Polyanin A.D., Sorokin V.G., Zhurov A.I.* Delay Ordinary and Partial Differential Equations. New York: CRC Press, Boca Raton, 2023. 434 p.