ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ», 2023, т. 12, № 6, с. 321–325

УДК 517.91

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РЕШЕНИЯМИ В ВИДЕ УЕДИНЁННЫХ ВОЛН

Н.А. Кудряшов[1,*], Н.В. Ермолаева[1,2]

[1]*Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва, 115409, Россия*

[2]*Волгодонский инженерно-технический институт НИЯУ МИФИ, Волгодонск, Ростовская обл., 347360, Россия*

**e-mail: nakudryashov@mephi.ru*

Поступила в редакцию: 08.11.2023
После доработки: 19.11.2023
Принята к публикации: 21.11.2023

Рассматривается специальный класс нелинейных дифференциальных уравнений, имеющих решения в виде уединенных волн. Основная особенность этих дифференциальных уравнений состоит в том, что они имеют решение на комплексной плоскости с произвольным порядком полюса. Показано, что использование модификации метода простейших уравнений позволяет найти точные решения в виде уединенных волн. Приведенный метод используется для получения стационарных уединенных волн для описания процессов в жидкости с пузырьками газа. Также указанный метод применяется для нахождения стационарных уединенных волн концентрации бактерий при учете фототаксиса.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение; метод простейших уравнений; уединенная волна; жидкость с пузырьками газа.

DOI: 10.26583/vestnik.2023.304

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что одной из важнейших задач математической физики является построение аналитического решения нелинейной математической модели. В настоящее время разработке методов построения решений посвящено большое количество работ (см., например, [1–18]). К наиболее популярным методам построения решений в настоящее время относятся метод гиперболического тангенса, метод G'/G-разложения и метод простейших уравнений. Все эти методы, как и многие другие, по своей сути основаны на использовании усеченного разложения общих решений нелинейных дифференциальных уравнений. Однако при описании некоторых физических процессов встречаются нелинейные уравнения в частных производных с произвольным полюсом общего решения на комплексной плоскости. В частности, для описания нелинейных волновых процессов в жидкости с газовыми пузырьками предложено следующее уравнение [19, 20, 21]

$$u_t + \alpha u u_x + \beta u_{xxx} = a u u_{xxx} + b u_x u_{xx}, \qquad (1)$$

где $u(x,\, t)$ – плотность жидкости с пузырьками газа; α, β, a – параметры математической модели.

В данной работе также рассматривается математическая модель для описания бактериальных колоний [22, 23, 24]

$$v_t + v_{xx} + v_{xxxx} - \delta \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v_x v_{xx}}{v}\right) = 0, \qquad (2)$$

где $v(x,\, t)$ – концентрация бактерий; δ – параметр модели.

Задача Коши для уравнений (1) и (2) методом обратного преобразования рассеяния не находится, поэтому будем искать точные решения этих уравнений, используя редукцию к бегущей волне. Заменив

$$u(x,\, t) = y(z),\; v(x,\, t) = w(z),\; z = x - C_0 t, \qquad (3)$$

после интегрирования получаем следующие нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения

$$a y y_{zz} + \frac{1}{2}(b-a) y_z^2 - \beta y_{zz} - \frac{\alpha}{2} y^2 + C_0 y - C_1 = 0, \qquad (4)$$

и

$$w w_{zzz} - \delta w_z w_{zz} + w w_z - C_0 w^2 + C_2 w = 0, \qquad (5)$$

где C_1 и C_2 – произвольные константы.

В данной работе решения уравнений (4) и (5) находятся с учетом двух простых обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение уравнения (4) ищем по формуле

$$y(z) = w(z) = AP(z)Q(z)^p, \qquad (6)$$

где A – произвольная константа; p_i – полюс общего решения; $P(z)$ и $Q(z)$ – функции, являющиеся общими решениями двух уравнений

$$P(z) = \lambda P, \qquad (7)$$

и

$$Q_z = k\,(Q^2 - Q). \qquad (8)$$

Решения уравнений (7) и (8) хорошо известны и имеют вид

$$P(z) = \exp\,(\lambda\,(z - z_0)) \qquad (9)$$

и

$$Q(z) = [1 + \exp\{k\,(z - z_1)\}]^{-1}. \qquad (10)$$

Покажем, что существуют стационарные решения уравнений (4) и (5), выражаемые формулой (6).

СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ (4)

Рассмотрим уравнение (4) при $C_1 = C_0 = \beta = 0$. В этом случае уравнение (4) принимает вид

$$ayy_{zz} + \frac{(b-a)}{2}y_z^2 - \frac{\alpha}{2}y^2 = 0, \qquad (11)$$

Отметим, что функции $P(z)$ и $Q(z)$ также являются решениями уравнений

$$P_{zz} = \lambda^2 P, \quad P_{zzz} = \lambda^3 P; \qquad (12)$$

$$\begin{gathered} Q_{zz} = k^2 Q(Q-1)(2Q-1), \\ Q_{zz} = k^3 Q(6Q^3 - 12Q^2 + 7Q - 1). \end{gathered} \qquad (13)$$

Подставляя (6) в уравнение (11) и принимая во внимание (7), (8), (12) и (13), получим алгебраические уравнения вида

$$\begin{gathered} (a+b)p + 2a = 0, \\ kp - 2\lambda = 0, \quad 2a\lambda^2 + \alpha p = 0. \end{gathered} \qquad (14)$$

Из (14) получим следующие ограничения на параметры b, k и a

$$a = -\frac{\alpha p}{2\lambda^2}, \quad b = \frac{\alpha(p+2)}{2\lambda^2}, \quad k = \frac{2\lambda}{p}. \qquad (15)$$

В случае выполнения условий (15) получаем решение уравнения (11) в виде

$$y(z) = \frac{Ae^{\lambda z}}{\left(1 + e^{\frac{2\lambda z}{p}}\right)^p}. \qquad (16)$$

Решение (16) является стационарной уединенной волной, поскольку

$$C_0 = 0 \text{ и } z = x.$$

СТАЦИОНАРНЫЕ УЕДИНЁННЫЕ ВОЛНЫ УРАВНЕНИЯ (5)

Рассмотрим уравнение (5) при $C_2 = 0$. Уравнение (5) можно записать в виде

$$ww_{zzz} - \delta w_z w_{zz} + ww_z - C_0 w^2 = 0. \qquad (17)$$

Используя тот же алгоритм, что и ранее, находим следующие ограничения на параметры уравнения (17)

$$\delta = 1 + \frac{2}{p}, \quad k = \pm\sqrt{\frac{2}{p}}, \quad \lambda = \pm\sqrt{\frac{p}{2}}, \quad C_0 = 0. \qquad (18)$$

Решение уравнения (17) выражается формулой

$$y(z) = \frac{Ae^{\pm\sqrt{\frac{p}{2}}(z-z_0)}}{\left(1 + e^{\pm\sqrt{\frac{2}{p}}(z-z_1)}\right)^p}. \qquad (19)$$

Решение (19) представляет собой стационарную уединенную волну уравнения (17) при $C_0 = 0$ и $z = x$.

Класс уравнений, к которым применим представленный в статье метод, имеет специальный набор одночленов. Важная особенность этого класса уравнений – наличие в уравнении выражений вида

$$\begin{gathered} E_1 = yy_{m,z} + ay_z y_{m-1,z} + by_{zz} y_{m-2,z}, \\ y_{n,z} = \frac{d^n y}{dz^n}, \end{gathered} \qquad (20)$$

где m и n – целые числа. Наличие таких одночленов в дифференциальном уравнении приводит к решению с произвольным полюсным порядком дифференциального уравнения, которое находится с помощью представленного выше алгоритма.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлен метод построения решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод демонстрируется на примере двух нелинейных дифференциальных уравнений (4) и (5). Для уравнений (1) и (2) получены стационарные уединенные волны.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект государственного задания № FSWU-2023-0031).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kudryashov N.A.* Method for finding highly dispersive optical solitons of nonlinear differential equations // Optik, 2019. V. 206. 163550.

2. *Kudryashov N.A.* Highly dispersive optical solitons of the generalized nonlinear eight-order Scr¨odinger equation // Optik, 2020. V. 206. 164335.

3. *Kudryashov N.A.* Exact solutions of the generalized Kuramoto-Sivashinsky equation // Physics Letters A, 1990. V. 147. P. 287–291.

4. *Parkes E.J., Duffy B.R.* An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to non-linear evolution equations // Computer Physics Communications, 1996. V. 98. P. 288–300.

5. *Malfliet W., Hereman W.* The Tanh method: I Exact solutions of nonlinear evolution and wave equations // Physica Scripta, 1996. V. 54. P. 563–568.

6. Fan E. Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations // Physics Letters A, 2000. V. 227 (4–5). P. 212–218.

7. *Fu Z.T., Liu S.K., Liu S.D. et al.* New Jacobi elliptic function expansion and new periodic solutions of nonlinear wave equations // Physics Letters A, 2001. V. 290 (1–2). P. 72–76.

8. *Fu Z.T., Liu S.K., Liu S.D. et al.* Jacobi elliptic function expansion method and periodic wave solutions of nonlinear wave equations // Physics Letters A, 2001. V. 289 (1–2). P. 69–74.

9. *Biswas A.* 1-soliton solution of the generalized Radhakrishnan–Kundu–Laksmanan equation // Physics Letters A, 2009. V. 373. P. 2546–2548.

10 *Vitanov N.K.* Application of simplest equations of Bernoulli and Riccati kind for obtaining exact traveling-wave solutions for a class of PDEs with polynomial nonlinearity // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2010. V. 15. № 8. P. 2050–2060.

11. *Vitanov N.K.* Modified method of simplest equation: Powerful tool for obtaining exact and approximate traveling-wave solutions of nonlinear PDEs // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2011. V. 16. № 3. P. 1176–1185.

12. *Vitanov N.K., Dimitrova Z.I., Kantz H.* Modified method of simplest equation and its application to nonlinear PDEs // Applied Mathematics and Computation, 2010. V. 216. № 9. P. 2587–2595.

13. *Kudryashov N.A.* One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2012. V. 17. P. 2248–2253.

14. *Kudryashov N.A.* Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations // Chaos Soliton Fractals, 2005. V. 24. P. 1217–1231.

15. *Kudryashov N.A.* Exact solitary waves of the Fisher equations // Physics Letters A., 2005. V. 342. P. 99–106.

16. *Kudryashov N.A.* Solitary and Periodic Solutions of the Generalized Kuramoto – Sivashinsky Equation // Regular and Chaotic Dynamics, 2008. V. 13 (3). P. 234–238.

17. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems/ CRC Press, Boca-Raton London, 2018.

18. *Kudryashov N.A.* Exact solutions of equation for surface waves in a convecting fluid // Applied Mathematics and Computation, 2019. V. 344–345. P. 97–106.

19. *Kudryashov N.A., Sinelshchikov D.I.* Nonlinear waves in bubbly liquids with consideration for viscosity and heat transfer // Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics, 2010. V. 374 (19–20). P. 2011–2016.

20. *Kudryashov N.A., Sinelshchikov D.I.* Equation for the three-dimensional nonlinear waves in liquid with gas bubbles // Physica Scripta, 2012. V. 85 (2). P. 025402.

21. *Kudryashov N.A.* On nonlinear differential equation with exact solutions having various poleorders // Chaos, Solitons and Fractals, 2015. V. 75. P. 173–177.

22. *Chavy-Waddy P.-C., Kolokolnikov T.* A local PDE model of aggregation formationin bacterial colonies // Nonlinearity, 2016. V. 29. P. 3174–3185.

23. *Alejandro Leon-Ram´ırez, Oswaldo Gonzalez-Gaxiola, Guillermo Chacon-Acosta*. Analytical solutions to the Chavy-Waddy-Kolokolnikov model of bacterial aggregates in phototaxis by three integration schemes // Mathematics, 2023. V. 11. P. 2352.

24. *Kudryashov N.A., Lavrova S.F.* Painlev´e test, phase plane analysis and analytical solutions of the Cgavy-Waddy-Kolokolnikov model for the description of bacterial colonies // Mathematics, 2023. V. 11. P. 3203.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
С РЕШЕНИЯМИ В ВИДЕ УЕДИНЁННЫХ ВОЛН

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta «MIFI», 2023, vol. 12, no. 6, pp. 321–325

ABOUT ONE CLASS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SOLUTIONS IN THE FORM OF SOLITATED WAVES

N.A. Kudryashov [1,*], ***N.V. Ermolaeva*** [1, 2]

[1] *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409, Russia*
[2] *Volgodonsk Engineering Technical Institute the branch of National Research Nuclear University MEPhI, Volgodonsk, Rostov region, 347360, Russia*
**e-mail: nakudryashov@mephi.ru*

Received November 08, 2023; revised November 19, 2023; accepted November 21, 2023

A special class of nonlinear differential equations with solutions in the form of solitary waves is considered. The main feature of these differential equations is that they have a solution in the complex plane with an arbitrary pole order. It is shown that using a modification of the method of simple equations allows one to find exact solutions in the form of solitary waves. The presented method is used to obtain stationary solitary waves to describe processes in a liquid with gas bubbles. Also, this method is used to find stationary solitary waves of bacterial concentration when taking phototaxis into account.

Keywords: nonlinear differential equation; method of simplest equations; solitary wave; liquid with gas bubbles.

REFERENSES

1. *Kudryashov N.A.* Method for finding highly dispersive optical solitons of nonlinear differential equations. Optik, 2019. Vol. 206. 163550.

2. *Kudryashov N.A.* Highly dispersive optical solitons of the generalized nonlinear eight-order Scr¨odinger equation. Optik, 2020. Vol. 206. 164335.

3. *Kudryashov N.A.* Exact solutions of the generalized Kuramoto-Sivashinsky equation. Physics Letters A, 1990. Vol. 147. Pp. 287–291.

4. *Parkes E.J., Duffy B.R.* An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to non-linear evolution equations. Computer Physics Communications, 1996. Vol. 98. Pp. 288–300.

5. *Malfliet W., Hereman W.* The Tanh method: I Exact solutions of nonlinear evolution and wave equations. Physica Scripta, 1996. Vol. 54. Pp. 563–568.

6. *Fan E.* Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations // Physics Letters A, 2000. Vol. 227 (4–5). Pp. 212–218.

7. *Fu Z.T., Liu S.K., Liu S.D. et al.* New Jacobi elliptic function expansion and new periodic solutions of nonlinear wave equations. Physics Letters A, 2001. Vol. 290 (1–2). Pp. 72–76.

8. *Fu Z.T., Liu S.K., Liu S.D. et al.* Jacobi elliptic function expansion method and periodic wave solutions of nonlinear wave equations. Physics Letters A, 2001. Vol. 289 (1–2). Pp. 69–74.

9. *Biswas A.* 1-soliton solution of the generalized Radhakrishnan–Kundu–Laksmanan equation. Physics Letters A, 2009. Vol. 373. Pp. 2546–2548.

10 *Vitanov N.K.* Application of simplest equations of Bernoulli and Riccati kind for obtaining exact traveling-wave solutions for a class of PDEs with polynomial nonlinearity. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2010. Vol. 15. No. 8. Pp. 2050–2060.

11. *Vitanov N.K.* Modified method of simplest equation: Powerful tool for obtaining exact and approximate traveling-wave solutions of nonlinear PDEs. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2011. Vol. 16. No. 3. Pp. 1176–1185.

12. *Vitanov N.K., Dimitrova Z.I., Kantz H.* Modified method of simplest equation and its application tononlinear PDEs. Applied Mathematics and Computation, 2010. Vol. 216. No. 9. Pp. 2587–2595.

13. *Kudryashov N.A.* One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2012. Vol. 17. Pp. 2248–2253.

14. *Kudryashov N.A.* Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations. Chaos Soliton Fractals, 2005. Vol. 24. Pp. 1217–1231.

15. *Kudryashov N.A.* Exact solitary waves of the Fisher equations. Physics Letters A, 2005. Vol. 342. Pp. 99–106.

16. *Kudryashov N.A.* Solitary and Periodic Solutions of the Generalized Kuramoto – Sivashinsky Equation. Regular and Chaotic Dynamics, 2008. Vol. 13 (3). Pp. 234–238.

17. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems / CRC Press, Boca-Raton London, 2018.

18. *Kudryashov N.A.* Exact solutions of equation for surface waves in a convecting fluid. Applied Mathematics and Computation, 2019. Vol. 344–345. Pp. 97–106.

19. *Kudryashov N.A., Sinelshchikov D.I.* Nonlinear waves in bubbly liquids with consideration for viscosity

and heat transfer. Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics, 2010. Vol. 374 (19–20), Pp. 2011–2016.

20. *Kudryashov N.A., Sinelshchikov D.I.* Equation for the three-dimensional nonlinear waves in liquid with gas bubbles. Physica Scripta, 2012. Vol. 85 (2). Pp. 025402.

21. *Kudryashov N.A.* On nonlinear differential equation with exact solutions having various poleorders. Chaos, Solitons and Fractals, 2015. Vol. 75. Pp. 173–177.

22. *Chavy-Waddy P.-C., Kolokolnikov T.* A local PDE model of aggregation formation in bacterial colonies. Nonlinearity, 2016. Vol. 29. Pp. 3174–3185.

23. *Alejandro Leon-Ram ́ırez, Oswaldo Gonzalez-Gaxiola, Guillermo Chacon-Acosta*. Analytical solutions to the Chavy-Waddy-Kolokolnikov model of bacterial aggregates in phototaxis by three integration schemes. Mathematics, 2023. Vol. 11. P. 2352.

24. *Kudryashov N.A., Lavrova S.F.* Painlev ́e test, phase plane analysis and analytical solutions of the Cgavy-Waddy-Kolokolnikov model for the description of bacterial colonies. Mathematics, 2023. Vol. 11. P. 3203.