

АВТОМАТИЗАЦИЯ ПОСТРОЕНИЯ МНОГОУГОЛЬНИКОВ НЬЮТОНА, СООТВЕТСТВУЮЩИХ ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ВИДА

© 2019 г. Н. А. Кудряшов^{1,*}, А. А. Кутуков^{1,**}

¹ Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, 115409, Россия

*e-mail: nakudr@gmail.com

**e-mail: alexkutuk@gmail.com

Поступила в редакцию 13.03.2019 г.

После доработки 13.03.2019 г.

Принята к публикации 09.04.2019 г.

В работе представлено описание программы ACNP (automatic construction of Newton polygons), предназначенной для автоматического построения многоугольников Ньютона, соответствующих дифференциальным уравнениям полиномиального вида. Многоугольник Ньютона обыкновенного дифференциального уравнения представляет собой выпуклый многоугольник, вершинами которого являются внешние точки носителя дифференциального уравнения (носителем называется множество точек на плоскости, соответствующих по определенному правилу мономам дифференциального уравнения). Многоугольники Ньютона для обыкновенных дифференциальных уравнений полиномиального вида полезны при исследовании свойства интегрируемости нелинейных уравнений при помощи алгоритма Ковалевской, при построении асимптотических решений и при нахождении точных решений нелинейных дифференциальных уравнений. Автоматизация процесса построения многоугольников Ньютона позволяет в ряде случаев находить порядок полюса решения уравнения, выделять ведущие члены уравнения, ускорять процесс нахождения степенных асимптотик решений дифференциальных уравнений и упростить выбор простейшего уравнения при нахождении точных решений нелинейных дифференциальных уравнений. Программа ACNP написана в среде компьютерной алгебры Maple. В работе приведен алгоритм работы программы и примеры ее применения.

Ключевые слова: многоугольники Ньютона, точные решения дифференциальных уравнений, тест на свойство Пенлеве, степенные асимптотики

DOI: 10.1134/S23044487X19030088

1. ВВЕДЕНИЕ

Использование ломаных, соответствующих алгебраическим уравнениям вида $f(x, y) = \sum_{m,n} a_{m,n} x^m y^n = 0$ для нахождения решений в виде ряда в окрестности нуля было впервые использовано Ньютоном [1]. Согласно его подходу, однокленам уравнения $f(x, y) = 0$, для которых $a_{m,n} \neq 0$, ставятся в соответствие точки на плоскости m, n с координатами (m, n) . Выпуклая граница множества таких точек называется ломаной Ньютона, соответствующей алгебраическому уравнению. Ньютон в своей работе рассматривал одно ребро ломаной. Целиком выпуклая ломаная была впервые рассмотрена Пуизе [2]. Для анализа решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности особых точек графическая иллюстрация, схожая с ломаными Ньютона, была использована Брюно [3]. В даль-

нейшем графический подход для анализа решений обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных применялся в работах [4–7].

Если рассматривать обыкновенное дифференциальное уравнение полиномиального вида

$$M_n[y(z), y_z(z), y_{zz}(z), \dots, z] = 0, \quad (1)$$

то каждому члену (моному) дифференциального уравнения (1) можно поставить в соответствие точку на плоскости по правилу

$$C_1 z^{q_1} y^{q_2} \mapsto (q_1, q_2), \quad C_2 \frac{d^k y}{dz^k} \mapsto (-k, 1). \quad (2)$$

При умножении мономов координаты точек складываются. Множество точек на плоскости, соответствующее дифференциальному уравнению (1), называется носителем [7]. Выпуклая граница носителя уравнения называется много-

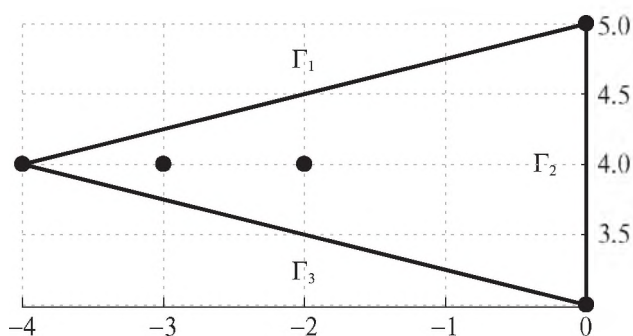


Рис. 1. Многоугольник Ньютона, соответствующий уравнению (4).

угольником Ньютона. Правило (2) позволяет поставить в соответствие каждому уравнению (1) многоугольник Ньютона на плоскости.

Для анализа дифференциальных уравнений, состоящих из большого количества мономов, представляется удобным автоматизировать процесс построения многоугольников Ньютона. В данной работе представлен алгоритм автоматизации построения многоугольников Ньютона, соответствующих дифференциальным уравнениям полиномиального вида (1), а также примеры применения программы.

2. АЛГОРИТМ ПРОГРАММЫ ПОСТРОЕНИЯ МНОГУГОЛЬНИКОВ НЬЮТОНА

Программа ACSNP написана в системе компьютерной алгебры Maple. Входные данные представляют собой обыкновенное дифференциальное уравнение *ode* полиномиального вида (1). Алгоритм программы состоит из следующих шагов:

1. С помощью функции *op* выделяются мономы дифференциального уравнения *ode* и записываются в векторную переменную *monoms*.

2. В каждом мономе *monoms* дифференциального уравнения *ode* осуществляется замена

$$y(z) = w \ln z, \quad (3)$$

а затем подстановка $\ln z = 1$, в результате чего дифференциальные мономы *monoms* переходят в алгебраические.

3. При помощи функции *degree* определяются степени *w* и *z* каждого из мономов *monoms* и записываются в вектор *monoms2* в виде пар $[m, n]$. Таким образом, получен носитель дифференциального уравнения *ode*.

4. При помощи функции *convexhull* пакета *geometry* находятся точки, соответствующие выпуклой границе носителя *monoms2*, что и представляет собой многоугольник Ньютона. Отдельно рассматриваются случаи, когда многоугольник Ньютона вырождается в прямую и точку.

5. При помощи команды *polygon* (пакет *plot-tools*) для точек, соответствующих вершинам многоугольника Ньютона формируется объект *pic1* типа *plot data*. Построение многоугольника Ньютона *pic1* и носителя *monoms2* уравнения *ode* на одной системе координат осуществляется при помощи команд *draw* и *display* (пакеты *geometry* и *plots* соответственно). Результат работы программы в виде графического представления многоугольника Ньютона и его носителя сохраняется в файл "NewtonPolygon.png".

3. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ПРОГРАММЫ ACSNP

3.1. Построение многоугольников Ньютона при анализе уравнений на свойство Пенлеве

Многоугольники Ньютона бывают полезны при анализе свойства интегрируемости дифференциальных уравнений, в частности, при использовании алгоритма Ковалевской, теста на свойство Пенлеве для обыкновенного дифференциального уравнения [8]. Первый шаг теста заключается в выделении ведущих членов уравнения и нахождении порядка полюса решения. На втором шаге вычисляются индексы Фукса, при помощи которых можно определить отсутствие критических подвижных алгебраических особых точек решения уравнения. Третий шаг заключается в нахождении коэффициентов разложения уравнения в ряд Лорана. Если число произвольных постоянных в разложении решения равно порядку уравнения, то уравнение проходит тест на свойство Пенлеве. Многоугольники Ньютона в ряде случаев позволяют оценить порядок полюса решения и определить ведущие члены уравнения. Продемонстрируем использование программы для автоматического построения многоугольников Ньютона при анализе на свойство Пенлеве нелинейного уравнения четвертого порядка в переменных бегущей волны для описания динамики дислокаций в кристалле [9]

$$\begin{aligned} & -i\alpha v^2 v_z v_{zz} + i\alpha v v_z^3 + \frac{1}{2} \delta v^5 + C_0 v^3 v_{zz} - C_0 v^2 v_z^2 - \\ & - \gamma v^3 v_{zzzz} + 4\gamma v^2 v_z v_{zzz} + 3\gamma v^2 v_{zz}^2 + 3\beta v v_z^2 v_{zz} - \\ & - 12\gamma v v_z^2 v_{zz} - 3\beta v_z^4 + 6\gamma v_z^4 - \frac{1}{2} \delta v^3 = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

С помощью программы ACSNP строится многоугольник Ньютона и носитель, соответствующие уравнению (4) (рис. 1).

Из рис. 1 определяется порядок полюса решения как величина, обратная коэффициенту угла наклона грани Γ_1 . В данном случае порядок полюса решения $p = 4$. Уравнение, состоящее из ведущих членов уравнения (4), строится из моно-

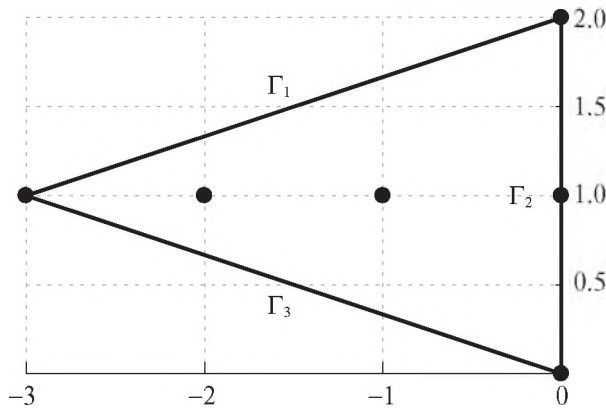


Рис. 2. Многоугольник Ньютона, соответствующий уравнению (6).

мов, для которых соответствующие координаты лежат на грани Γ_1 :

$$\frac{1}{2}\delta v^5 - \gamma v^3 v_{zzzz} + 4\gamma v^2 v_z v_{zzz} + 3\gamma v^2 v_{zz}^2 + 3\beta v v_z^2 v_{zz} - 12\gamma v v_z^2 v_{zz} - 3\beta v_z^4 + 6\gamma v_z^4 = 0. \quad (5)$$

Следующие шаги теста на свойство Пенлеве для уравнения (4) приводятся в работе [9].

3.2. Применение многоугольников Ньютона при нахождении точных решений дифференциальных уравнений методом простейших уравнений

Метод простейших уравнений заключается в поиске точных решений дифференциального уравнения с использованием общего решения дифференциального уравнения меньшего порядка [10].

Уравнение Курамото–Сивашинского в переменных бегущей волны имеет вид [8, 11, 12]

$$y_{zzz} + \sigma y_{zz} + y_z + \frac{1}{2}y^2 + C_0 y - C_1 = 0. \quad (6)$$

Многоугольник Ньютона для уравнения (6) представлен на рис. 2, из которого видно, что порядок полюса решения $p = 3$. В качестве простейшего уравнения можно взять уравнение для функции Вейерштрасса, общее решение которого имеет второй порядок полюса

$$R_z^2 = -4R^3 + aR^2 + 2bR + c. \quad (7)$$

Поскольку порядки полюсов решений должны быть равны, решение уравнения (6) можно искать в виде

$$y(z) = A_0 + A_1 R + A_2 R_z. \quad (8)$$

После подстановки (8) получается уравнение, порядок полюса решения которого $p = 2$ (рис. 3).

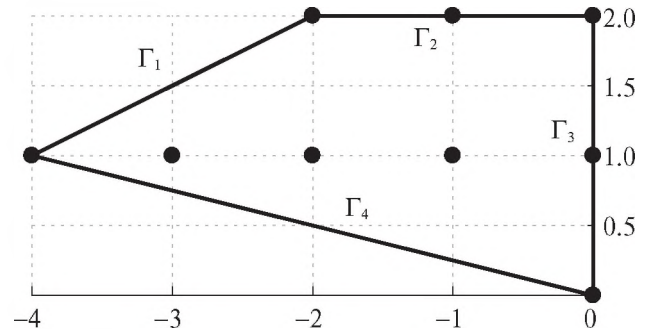


Рис. 3. Многоугольник Ньютона, соответствующий уравнению (6) при подстановке (8).

Если в качестве простейшего уравнения выбрать уравнение Риккати

$$Y_z = -Y^2 + b, \quad (9)$$

решение которого имеет первый порядок полюса, то для соответствия порядков полюсов необходимо воспользоваться разложением

$$y(z) = A_0 + A_1 Y + A_2 Y^2 + A_3 Y^3. \quad (10)$$

В результате подстановки (10) в (6) получается уравнение, порядок полюса решения которого $p = 1$ (рис. 4).

Таким образом, для избранного простейшего уравнения следует подставлять в исходное уравнение такое разложение, чтобы грани многоугольников полученного уравнения и простейшего уравнения, соответствующие ведущим членам уравнений, были параллельны.

3.3. Применение многоугольников Ньютона при нахождении асимптотик нелинейных дифференциальных уравнений

Многоугольники Ньютона используются при построении степенных асимптотик обыкновенных дифференциальных уравнений полиномиального вида [7]. Каждой грани и каждой вершине многоугольника Ньютона соответствует укороченное уравнение. Степенные решения укороченных уравнений представляют собой асимптотики исходного уравнения в нуле или бесконечности. В работе [6] рассматривается уравнение, представляющее собой обобщение второго и третьего уравнений Пенлеве:

$$\begin{aligned} & y^3 y_{zzzz} - 4y^2 y_z y_{zzz} + \frac{21}{2} y y_z^2 y_{zz} - 3y^2 y_{zz}^2 - \\ & - \frac{9}{2} y_z^4 + 72\gamma y^5 - 72\mu y^3 + \\ & + \frac{1}{2} z y^3 y_{zz} - \frac{1}{2} z y^2 y_z^2 + \frac{1}{2} y^3 y_z = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

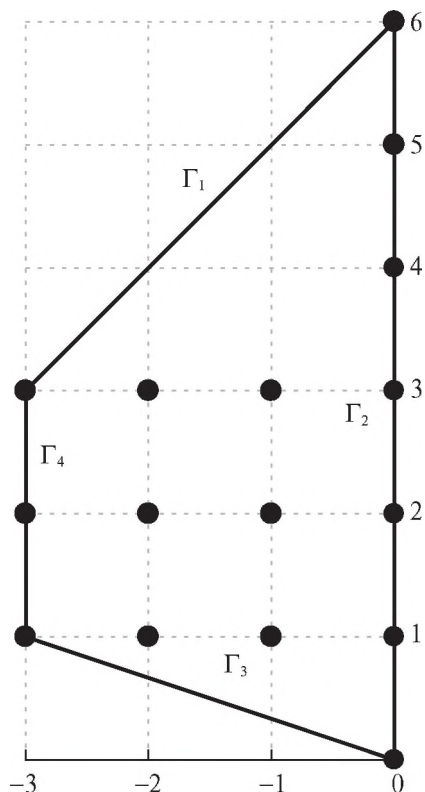


Рис. 4. Многоугольник Ньютона, соответствующий уравнению (6) при подстановке (10).

Многоугольник Ньютона, соответствующий уравнению (11), изображен на рис. 5.

Граниям Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 соответствуют уравнения

$$\begin{aligned} y_{zzzz} - \frac{4}{y} y_z y_{zz} + \frac{21}{2y^2} y_z^2 y_{zz} - \\ - \frac{3}{y} y_{zz}^2 - \frac{9}{2y^3} y_z^4 + 72\gamma y^2 = 0, \\ 72\gamma y^2 - 72\mu = 0, \\ y_{zzzz} - \frac{4}{y} y_z y_{zz} + \frac{21}{2y^2} y_z^2 y_{zz} - \\ - \frac{3}{y} y_{zz}^2 - \frac{9}{2y^3} y_z^4 - 72\mu = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Вершине Q_1 соответствует уравнение

$$y_{zzzz} - \frac{4}{y} y_z y_{zz} + \frac{21}{2y^2} y_z^2 y_{zz} - \frac{3}{y} y_{zz}^2 - \frac{9}{2y^3} y_z^4 = 0. \quad (13)$$

Вершинам Q_2 , Q_3 соответствуют укороченные уравнения, имеющие тривиальные решения. Степенные асимптотики уравнения (11) представлены в работе [6].

Таким образом, автоматическое построение многоугольника Ньютона позволяет ускорить процесс построения укороченных уравнений, ис-

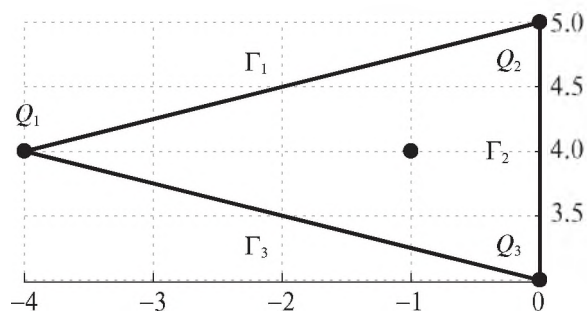


Рис. 5. Многоугольник Ньютона, соответствующий уравнению (11).

пользуемых при нахождении степенных асимптотик дифференциальных уравнений.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Автоматизация процесса построения многоугольников Ньютона позволяет упростить выполнение теста на свойство Пенлеве. Представленная программа может использоваться при нахождении точных решений нелинейных дифференциальных уравнений методом простейших уравнений в качестве наглядного пособия для выбора простейшего уравнения. Программа позволяет ускорить процесс построения степенных асимптотик обыкновенных дифференциальных уравнений.

БЛАГОДАРНОСТИ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00209).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ньютон И. Метод флюксий и бесконечных рядов с приложением его к геометрии кривых // Математические работы. М.-Л.: ОНТИ, 1937. С. 33–44.
2. Puiseux V. Recherches sur les fonctions algebriques // J. de math. pures et appl. 1850. P. 365–480.
3. Брюно А.Д. Асимптотика решений нелинейных систем дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1962. Т. 143. Вып. 4. С. 763–766.
4. Дёмина М.В., Кудряшов Н.А., Синельщиков Д.И. Метод многоугольников для построения точных решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений для описания волн на воде // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 12. С. 2151–2162.
5. Kudryashov N.A., Demina M.V. Polygons of differential equations for finding exact solutions // Chaos, Solitons & Fractals. 2007. V. 33. I. 5. P. 1480–1496.
6. Кудряшов Н.А., Синельщиков Д.И. Степенные и нестепенные асимптотики решений обобщения второго и третьего уравнений Пенлеве // Вестник НИЯУ «МИФИ». 2013. Т. 2. № 2. С. 152–160.

7. Брюно А.Д. Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // Успехи мат. Наук. 2004. Т. 59. Вып. 3. С. 31–80.
8. Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики // Издательский дом “Интеллект”, 2010. 368 с.
9. Кудряшов Н.А., Кутуков А.А. Применение теста Пенлеве для нелинейного уравнения четвертого порядка при описании дислокаций // Вестник НИЯУ “МИФИ”. 2018. Т. 7. № 3. С. 249–252.
10. Kudryashov N.A. Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations // Chaos, Solitons & Fractals. 2005. V. 24. I. 5. P. 1217–1231.
11. Kuramoto Y., Tsuzuki T. Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium // Prog. Theor. Phys. 1976. V. 55. № 2. P. 356–369.
12. Sivashinsky G.I. Instabilities, pattern formation, and turbulence in flames // Annu. Rev. Fluid Mech. 1983. V. 15. № 1. P. 179–199.

Vestnik Nacional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta “MIFI”, 2019, vol. 8, no. 3, pp. 283–288

Automatic Construction of Newton Polygons Corresponding to Polynomial Ordinary Differential Equations

N. A. Kudryashov^{a,#} and A. A. Kutukov^{a,#}

^a National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[#]e-mail: nakudr@gmail.com

^{##}e-mail: alexkutuk@gmail.com

Received March 13, 2019; revised March 13, 2019; accepted April 9, 2019

Abstract—The ACNP (automatic construction of Newton polygons) program designed to automatically construct Newton polygons corresponding to polynomial differential equations has been described. A Newton polygon of an ordinary differential equation is a convex polygon whose vertices are the outer points of the carrier of this equation (the carrier is the set of points on the plane corresponding to the monomials of the differential equation according to a certain rule). Newton polygons for polynomial ordinary differential equations are useful for studying the integrability of nonlinear equations using the Kovalevskaya algorithm, for constructing asymptotic solutions, and for finding exact solutions of nonlinear differential equations. Automatic construction of Newton polygons in some cases allows finding the order of the pole of the equation, select the leading terms of the equation, speed up the process of finding the power asymptotic behavior of solutions of differential equations, and simplify the choice of the simplest equation when finding exact solutions of nonlinear differential equations. The ACNP program is written in the Maple computer algebra environment. The algorithm of the program and examples of its application have been presented.

Keywords: Newton polygons, exact solutions of differential equations, Painlevé property test, power-law asymptotic behavior

DOI: 10.1134/S2304487X19030088

REFERENCES

1. Newton I., Metod flyuksij i beskonechnyh ryadov s prilozheniem ego k geometrii krivyh (Fluxions and infinite series method with its application to the geometry of curves), *Matematicheskie raboty M.-L.: ONTI*, 1937, pp. 33–44 (in Russian).
2. Puiseux V., Recherches sur les fonctions algebriques, *J. de math. pures et appl.*, 1850, pp. 365–480.
3. Bruno A.D., Asimptotika reshenij nelinejnyh sistem differencialnyh uravnenij (Asymptotics of solutions of nonlinear systems of differential equations), *DAN USSR*, 1962, vol. 143, no. 4. pp. 763–766 (in Russian).
4. Demina M.V., Kudryashov N.A., Sinelshchikov D.I., Metod mnogougolnikov dlya postroeniya tochnyh reshenij nekotoryh nelinejnyh differencialnyh uravnenij dlya opisaniya voln na vode (Polygon method for constructing exact solutions of some nonlinear differential equations for describing waves on water), *Zhurn. vychisl. matem. i matem. fiz.*, 2008, vol. 48, no. 12, pp. 2151–2162 (in Russian).
5. Kudryashov N.A., Demina M.V., Polygons of differential equations for finding exact solutions, *Chaos, Solitons & Fractals*, 2007, vol. 33, issue 5, pp. 1480–1496.
6. Kudryashov N.A., Sinelshchikov D.I., Steppennye i nestepennye asimptotiki reshenij obobshcheniya vtorogo i tret'ego uravnenij Penleve (Power and non-power asymptotics of solutions of the generalization of the second and third Painleve equations), *Vestnik NIYaU MIFI*, 2013, vol. 2, no. 2, pp. 152–160 (in Russian).

7. Bruno A.D., Asimptotiki i razlozheniya reshenij obyknovennogo differencialnogo uravneniya (Asymptotics and expansions of solutions of an ordinary differential equation), *Uspekhi mat. nauk*, 2004, vol. 59, no. 3, pp. 31–80 (in Russian).
8. Kudryashov N.A., *Metody nelinejnoj matematicheskoj fiziki* (Methods of nonlinear mathematical physics), Izdatelskij dom Intellekt, 2010, 368 p.
9. Kudryashov N.A., Kutukov A.A., *Primenenie testa Penleve dlya nelinejnogo uravneniya chetvertogo poryadka pri opisanii dislokacij* (Application of the Painleve test for a fourth-order nonlinear equation in the description of dislocations), *Vestnik NIYaU MIFI*, 2018, vol. 7, no. 3, pp. 249–252 (in Russian).
10. Kudryashov N.A., Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, 2005, vol. 24, issue 5, pp. 1217–1231.
11. Kuramoto Y., Tsuzuki T., Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium, *Prog. Theor. Phys.*, 1976, vol. 55, no. 2, pp. 356–369.
12. Sivashinsky G.I., Instabilities, pattern formation, and turbulence in flames, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1983, vol. 15, no. 1, pp. 179–199.