

УДК 517.9

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С ТРЕМЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

В.А. Медведев*, Н.А. Кудряшов**

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

*e-mail: viktormedvedev12115551@gmail.com

**e-mail: nakudr@gmail.com

Поступила в редакцию: 11.02.2024

После доработки: 01.04.2024

Принята к публикации: 02.04.2024

Рассматривается задача распространения оптических импульсов, описываемая обобщенным уравнением Шрёдингера с нелинейными членами третьего, пятого и седьмого порядков. Методами неявных функций и простейших уравнений получено аналитическое решение в виде уединенной волны, и определены условия его существования. Представлена модификация метода Фурье для численного решения задачи распространения оптических импульсов при периодических граничных условиях. Численно исследован процесс распространения построенного оптического солитона. Дано сравнение аналитического решения с результатами численных расчетов. Изучен процесс распространения оптического солитона исследуемого уравнения при возмущении начальных данных. Выполнены расчеты распространения импульса в среде со случайным шумом. Показано, что полученное аналитическое решение устойчиво. Проанализировано влияние нелинейных членов пятой и седьмой степеней на распространение уединенных волн нелинейного уравнения Шрёдингера. Изучены процессы столкновения солитонов нелинейного уравнения Шрёдингера при влиянии нелинейных членов пятой и седьмой степеней. Показано, что столкновения носят неупругий характер.

Ключевые слова: обобщенное нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ), псевдоспектральный метод Фурье, оптический солитон, численное моделирование, нелинейная оптика, нелинейные уравнения в частных производных.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.310

EDN PVZUYF

ВВЕДЕНИЕ

В нелинейной оптике известен целый ряд моделей для описания процессов распространения импульсов в оптических средах, некоторые из которых основаны на обобщениях классического интегрируемого нелинейного уравнения Шрёдингера [1, 2]:

$$iu_t + au_{xx} + b_1|u|^2u = 0, \quad (1)$$

где $u(x, t)$ – комплексная функция; $i^2 = -1$ и a – параметры модели.

Но, несмотря на разнообразие предложенных математических моделей [3–7], вопрос о наиболее подходящей остается открытым. В работе исследовано одно из обобщенных уравнений – нелинейное уравнение Шрёдингера с нелинейностями третьего, пятого и седьмого порядков, впервые представленное в работе [8]:

$$iu_t + au_{xx} + b_1|u|^2u + b_2|u|^4u + b_3|u|^6u = 0, \quad (2)$$

где $u(x, t)$ – комплекснозначная функция, a , b_1 , b_2 и b_3 – параметры модели.

Для случая $b_3 = 0$ исследование уравнения (2) представлено в книге [9].

Целями настоящей работы являются:

- 1) аналитическое нахождение точного решения представленного уравнения;
- 2) исследование факта устойчивости аналитического решения с помощью численного моделирования процессов распространения оптических импульсов;
- 3) изучение влияния нелинейных членов высших степеней в исследуемой математической модели.

1. АНАЛИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1.1. Аналитическое решение для уравнения Шрёдингера с тремя нелинейностями

С целью упростить уравнение (2) используем переход к безразмерным величинам в следующем виде:

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С ТРЕМЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

$$\begin{cases} u(x, t) = c_u u'(x, t), \\ t = c_t t', \\ x = c_x x'. \end{cases} \quad (3)$$

При этом уравнение (2) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} & i \frac{c_u}{c_t} u'_{t'} + \frac{ac_u}{c_x^2} u'_{x'x'} + b_1 c_u^3 |u'|^2 u' \times \\ & \times \left(1 + c_u^2 \frac{b_2}{b_1} |u'|^2 + c_u^4 \frac{b_3}{b_1} |u'|^4 \right) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

Принимая

$$\begin{cases} c_u = b_1^{-1/3}, \\ c_t = b_1^{-1/3}, \\ c_x = \sqrt{ab_1}^{-1/6}, \end{cases} \quad (5)$$

для уравнения (4) получим:

$$iu'_{t'} + u'_{x'x'} + |u'|^2 u' \cdot \left(1 + \varepsilon_2 |u'|^2 + \varepsilon_3 |u'|^4 \right) = 0, \quad (6)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_2 = b_1^{-4/3} b_2, \\ \varepsilon_3 = b_1^{-7/3} b_3. \end{cases} \quad (7)$$

Будем искать решения уравнения (6) в виде:

$$\begin{aligned} u'(x', t') &= y(z) e^{i(kx' - \omega t' - \theta_0)}, \\ z &= x' - c_0 t', \quad k, \omega, c_0, \theta_0 \in R, \end{aligned} \quad (8)$$

где $y(z)$ – действительнoзначная функция. Подставляя (8) в уравнение (6), получим переопределенную систему уравнений для $y(z)$ в виде

$$y_{zz} + \varepsilon_3 y^7 + \varepsilon_2 y^5 + y^3 + (\omega - k^2)y = 0, \quad (9)$$

$$(2k - c_0) \cdot y_z = 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) выполняется тождественно при $c_0 = 2k$. Уравнение (9) имеет первый интеграл:

$$y_z^2 + \frac{\varepsilon_3 y^8}{4} + \frac{\varepsilon_2 y^6}{3} + \frac{y^4}{2} + (\omega - k^2) y^2 = c_1. \quad (11)$$

Переходя к новой переменной $y(z) = \sqrt{V(z)}$, перепишем уравнение (11):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} V_z^2 + \frac{\varepsilon_3}{4} V^5 + \frac{\varepsilon_2}{3} V^4 + \frac{1}{2} V^3 + \\ & + (\omega - k^2) \cdot V^2 - c_1 V = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Используя метод неявных функций, будем искать решения уравнения (12) в виде $V(z) = F(\xi)$, $\xi = \psi(z)$, полагая $c_1 = 0$ и

$$\xi_z = \pm F(\xi), \quad (13)$$

что приводит к следующему уравнению:

$$F_\xi^2 + \varepsilon_3 F^3 + \frac{4}{3} \varepsilon_2 F^2 + 2F + 4(\omega - k^2) = 0. \quad (14)$$

Уравнение (14) может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d}{d\xi} \left(F + \frac{4\varepsilon_2}{9\varepsilon_3} \right) \right]^2 + \varepsilon_3 \left(F + \frac{4\varepsilon_2}{9\varepsilon_3} \right)^3 + \\ & + \frac{2(27\varepsilon_3 - 8\varepsilon_2^2)}{27\varepsilon_3} \left(F + \frac{4\varepsilon_2}{9\varepsilon_3} \right) + \\ & + \frac{128\varepsilon_2^3}{729\varepsilon_3^2} - \frac{8\varepsilon_2}{9\varepsilon_3} - 4k^2 + 4\omega = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Вводя следующие обозначения для постоянных величин:

$$\begin{aligned} g_2 &= \frac{64\varepsilon_2^2}{27\varepsilon_3^2} - \frac{8}{\varepsilon_3}, \\ g_3 &= \frac{512\varepsilon_2^3}{729\varepsilon_3^3} - \frac{32\varepsilon_2}{9\varepsilon_3^2} - \frac{16k^2}{\varepsilon_3} + \frac{16\omega}{\varepsilon_3}, \\ \Psi &= -F - \frac{4\varepsilon_2}{9\varepsilon_3}, \end{aligned} \quad (16)$$

перепишем уравнение (15) в виде:

$$\left(\left(2\varepsilon_3^{-1/2} \right) \Phi_\xi \right)^2 = 4\Psi^3 - g_2\Psi - \Psi_3. \quad (17)$$

Общее решение уравнения (17) может быть выражено через эллиптическую функцию Вейерштрасса, что позволяет записать:

$$\begin{aligned} F(\xi) &= -\wp \left(\left[\frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon_3} (\xi - \xi_0) \right]; g_2; g_3 \right) - \\ & - \frac{4\varepsilon_2}{9\varepsilon_3}. \end{aligned} \quad (18)$$

Учитывая условие (13), возможно выразить $\xi(z)$ в квадратурах:

$$\begin{aligned} z - z_0 &= \pm \int \frac{d\xi}{F(\xi)} = \\ & = \mp \int \frac{d\xi}{\wp \left(\left[\frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon_3} (\xi - \xi_0) \right]; g_2; g_3 \right) + \frac{4\varepsilon_2}{9\varepsilon_3}}, \end{aligned} \quad (19)$$

однако в общем случае такой интеграл не может быть посчитан аналитически.

Стоит заметить, что для специального вида функции $F(\xi)$ интеграл (19) может быть посчитан. Используя метод простейших уравнений [10], найдем решения (14) в виде

$$F(\xi) = M_0 + M_1 Q(\xi) + M_2 Q^2(\xi), \quad (20)$$

где $Q(\xi)$ – решение уравнения Риккати:

$$Q_\xi = \mu(Q^2 - Q), \quad (21)$$

имеющее следующий вид

$$Q(\xi) = \frac{1}{1 + \exp(\mu(\xi - \xi_0))}. \quad (22)$$

Используя (21), и подставляя выражение (20) в уравнение (14), получим полином относительно $Q(\xi)$, равный нулю:

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_3 M_2^3 + 4\mu^2 M_2^2) Q(\xi)^6 + (4\mu^2 M_1 M_2 - 8\mu^2 M_2^2 + \\ & + 3\varepsilon_3 M_1 M_2^2) Q(\xi)^5 + \left(\frac{4}{3} \varepsilon_2 M_2^2 - 8\mu^2 M_1 M_2 + \right. \\ & \left. + \mu^2 M_1 + 4\mu^2 M_2^2 + 3\varepsilon_3 M_0 M_2^2 + 3\varepsilon_3 M_1^2 M_2^2 \right) \times \\ & \times Q(\xi)^4 + \left(4\mu^2 M_1 M_2 + \varepsilon_3 M_1^3 - 2\mu^2 M_1^2 + \right. \\ & \left. + \frac{8}{3} \varepsilon_2 M_1 M_2 + 6\varepsilon_3 M_0 M_1 M_2 \right) Q(\xi)^3 + \quad (23) \\ & + \left(2M_2 + \frac{4}{3} \varepsilon_2 M_1^2 + \mu^2 M_1^2 + 3\varepsilon_3 M_0^2 M_2 + \right. \\ & \left. + 3\varepsilon_3 M_0 M_1^2 + \frac{8}{3} \varepsilon_2 M_0 M_2 \right) Q(\xi)^2 + \\ & + \left(2M_1 + 3\varepsilon_3 M_0^2 M_1 + \frac{8}{3} \varepsilon_2 M_0 M_1 \right) Q(\xi) + \\ & + \left(\frac{4}{3} \varepsilon_2 M_0^2 + 2M_0 + \varepsilon_3 M_0^3 - 4k^2 + 4\omega \right) = 0. \end{aligned}$$

Так как $Q(\xi) = 0$, коэффициенты полинома должны быть тождественно равны нулю. Это приводит к следующим ограничениям на параметры модели:

$$\begin{cases} \omega - k^2 = -\frac{1}{12} \frac{M_0 M_1}{M_1 + 6M_0} - \frac{1}{6} M_0, \\ \mu = \pm \sqrt{\frac{M_1}{M_0(M_1 + 6M_0)}}, \\ M_2 = -M_1, \\ \varepsilon_2 = \frac{3}{4M_0} \left(\frac{M_1}{M_1 + 6M_0} - 2 \right), \\ \varepsilon_3 = \frac{4}{M_0(M_1 + 6M_0)}, \end{cases} \quad (24)$$

где M_0 и M_1 – произвольные константы. Уравнение (20) теперь записывается в виде

$$F(\xi) = M_0 + \frac{M_1}{1 + \exp(\mu(\xi - \xi_0))} - \frac{M_1}{(1 + \exp(\mu(\xi - \xi_0)))^2}. \quad (25)$$

Для представленного вида $F(\xi)$ следующее выражение может быть проинтегрировано:

$$\frac{d\xi}{F(\xi)} = dz, \quad (26)$$

тогда зависимость ξ и z описывается следующим образом:

$$\begin{aligned} z = z_0 + \frac{\xi}{M_0} + \frac{2M_1}{\mu M_0 \sqrt{4M_0 M_1 + M_1^2}} \times \\ \times \operatorname{arctanh} \left(\frac{2e^{\mu(\xi - \xi_0)} M_0 + 2M_0 + M_1}{\sqrt{4M_0 M_1 + M_1^2}} \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Теперь решение уравнения (11) при $c_1 = 0$ запишется в виде

$$y(\xi) = \left[M_0 + \frac{M_1}{1 + \exp(\mu(\xi - \xi_0))} - \frac{M_1}{(1 + \exp(\mu(\xi - \xi_0)))^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (28)$$

где $\xi(z)$ определяется неявно из (27), и выполнены ограничения на параметры модели (24).

Таким образом, решение уравнения (6) имеет вид:

$$\begin{aligned} u'(x', t') = y(z) e^{i(kx' - \omega t' - \theta_0)}, \\ z = x' - 2kt', \end{aligned} \quad (29)$$

где k и θ_0 – произвольные постоянные.

Принимая во внимание, что $z, \xi(z), y(\xi) \in R$ из выражений (27) и (28) следуют дополнительные ограничения на параметры M_0 и M_1 для существования найденного решения:

$$\left| \frac{2e^{\mu(\xi - \xi_0)} M_0 + 2M_0 + M_1}{\sqrt{4M_0 M_1 + M_1^2}} \right| < 1, \quad (30)$$

$$M_0 + \frac{M_1}{1 + e^{\mu(\xi - \xi_0)}} - \frac{M_1}{(1 + e^{\mu(\xi - \xi_0)})^2} \geq 0. \quad (31)$$

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С ТРЕМЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Данные ограничения удовлетворяются на ограниченном промежутке по переменной ξ из-за присутствия экспоненты в (30), что накладывает дополнительные ограничения при построении решения.

Условия (30) и (31) с ограничениями (20) удовлетворяются в следующей области параметров M_1 и M_0 (рис. 1):

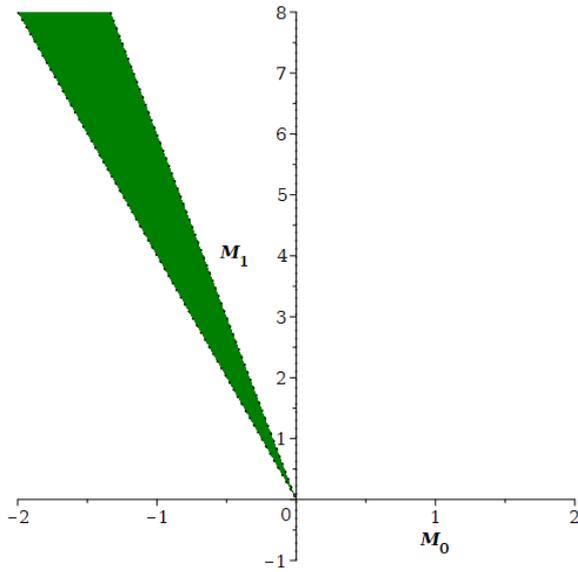


Рис. 1. Допустимые значения M_1 и M_0

1.2. Модификация метода Фурье для моделирования процессов, описываемых уравнением Шрёдингера с тремя нелинейностями

Семейство обобщенных уравнений Шрёдингера может быть записано в виде

$$u_t = iL[u] + iN[u]u. \quad (33)$$

К примеру, при $L[u] \equiv au_{xx}$, $N[u] \equiv b_1|u|^2$ уравнение (33) представляет из себя нелинейное уравнение Шрёдингера (1).

Для применения метода Фурье объявим периодические граничные условия следующим образом:

$$\begin{cases} u\left(-\frac{L}{2}, t\right) = u\left(\frac{L}{2}, t\right), \\ \frac{\partial u}{\partial x}\left(-\frac{L}{2}, t\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{L}{2}, t\right). \end{cases} \quad (34)$$

$$\begin{cases} M_0 < 0, \\ -4M_0 < M_1 < -6M_0. \end{cases} \quad (32)$$

Волновой профиль $y(z)$ при $k = 1.6$, $M_0 = -1.48$, $M_1 = 6.16$ изображен на рис. 2.

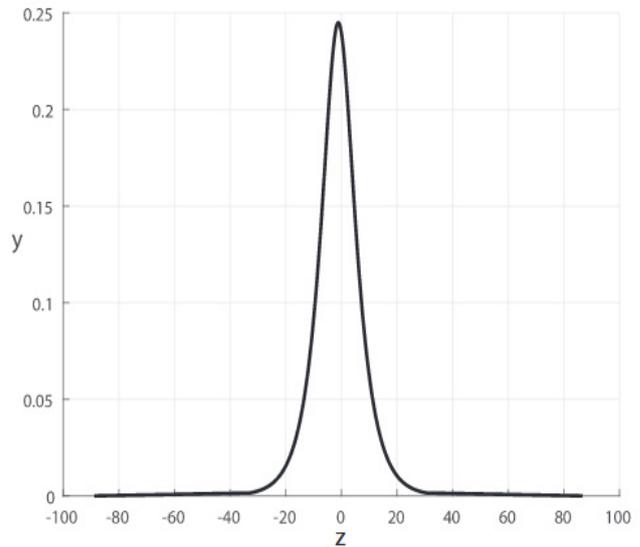


Рис. 2. Профиль уединённой волны при $k = 1.6$, $M_0 = -1.48$, $M_1 = 6.16$

Предполагая $x \in \left[-\frac{1}{2}L, \frac{1}{2}L\right]$, $t \in [0, T]$, разделим интервал по переменной x на N одинаковых частей с шагом

$$h = \frac{L}{N}. \quad (35)$$

Узлы координатной сетки определяются, как

$$x_j = jh, \quad j = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}. \quad (36)$$

Пусть U^m – сеточная аппроксимация решения на m -м временном слое; V^m – промежуточное решение. В таком случае начальные условия задаются в U^0 . В общем виде схема расщепления может быть записана следующим образом [11]:

$$U^{m+1} = \exp(i\tau L) \cdot V^m, \quad (37)$$

где

$$V^m = \exp(i\tau N[U^m]) \cdot U^m. \quad (38)$$

Применяя метод Фурье, используем дискретное преобразование Фурье для сеточной функции V^m для определения решения на следующем временном слое:

$$\hat{V}^m = \frac{h}{L} \exp(-i\mu x^T) \cdot V^m, \quad (39)$$

где \hat{V}^m – вектор коэффициентов Фурье;

$\mu = \left(\mu_{\frac{N}{2}}, \dots, \mu_{\frac{N-1}{2}} \right)^T$ – вектор частот преобразования

$\mu_n = \frac{2\pi n}{L}$; $x = \left(x_{\frac{N}{2}}, \dots, x_{\frac{N-1}{2}} \right)^T$ – координаты точек сетки.

Далее воспользуемся соотношением между \hat{U}^{m+1} и \hat{V}^m :

$$\hat{U}^{m+1} = \exp(-i(\mu \circ \mu)\tau) \circ \hat{V}^m, \quad (40)$$

которое вытекает из уравнения (37) после подстановки в него вместо U^{m+1} и V^m соответствующих рядов Фурье. Под $x \circ y$ понимается произведение по Адамару.

Решение на следующем временном слое восстанавливается с помощью обратного преобразования Фурье, используя (40):

$$U^{m+1} = \exp(-i\mu x^T) \cdot \hat{U}^{m+1}. \quad (41)$$

Модифицируя метод применительно к уравнению (6), запишем операторы $L[u]$ и $N[u]$ в виде:

$$\begin{cases} L[u] \equiv u_{xx}, \\ N[u] = |u|^2 + \varepsilon_2 |u|^4 + \varepsilon_3 |u|^6. \end{cases} \quad (42)$$

Упрощенная блок-схема программного кода для численного решения проблемы распространения оптических импульсов при периодических граничных условиях представлена на рис. 3.

2. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

2.1. Применение метода Фурье для моделирования процесса распространения уединенной волны, описываемой уравнением Шрёдингера с тремя нелинейностями

Рассмотрим процесс распространения уединенной волны (29) уравнения (6). Произведем расчет при помощи схемы, описанной в

разд. 1.2 для определенных параметров M_0 и M_1 , удовлетворяющих условиям (32). Параметры ε_1 , ε_2 , ω и μ определяются формулами (24). Результат моделирования представлен на рис. 4. Аналитический и численно полученный профили в момент $t = 16$ изображены на рис. 4, б.

Относительная погрешность расчета при заданных параметрах не превышает 0.08%. Зависимость относительной погрешности от времени проиллюстрирована на рис. 5, а.

Сеточная сходимость достигнута (рис. 5, б), аналитическое решение совпало с численным. Следовательно, численная схема реализована корректно и аналитическое решение, построенное в разд. 1.1, обладает солитонными свойствами.

2.2. Взаимодействие солитона с возмущением в начальных условиях

Проведем моделирование распространения импульса при возмущении в начальных условиях. Внесем в начальное условие, соответствующее решению (29) уравнения (6) возмущение следующим образом:

$$u(x, 0) = y(\xi(x)) \cdot e^{i(kx - \theta_0)} + A e^{-v(x-x_0)^2}. \quad (43)$$

Соответствующие численные результаты изображены на рис. 6.

Проведенное моделирование позволяет сделать вывод, что солитон, заданный рассмотренными параметрами $M_0 = -3$, $M_1 = 12.34$, взаимодействует с заданным возмущением, не распадаясь и не теряя способности к распространению. Профиль импульса восстанавливается после взаимодействия.

Также установлено, что солитон (6) устойчив при распространении в среде со случайным шумом следующего вида:

$$u(x, 0) = y(\xi(x)) \cdot e^{i(kx - \theta_0)} + A \cdot \text{rand}(x). \quad (44)$$

Результаты моделирования проиллюстрированы на рис. 7.

Моделирования, представленные в данном разделе, подтверждают стабильность солитонов, полученных в разд. 1.1.

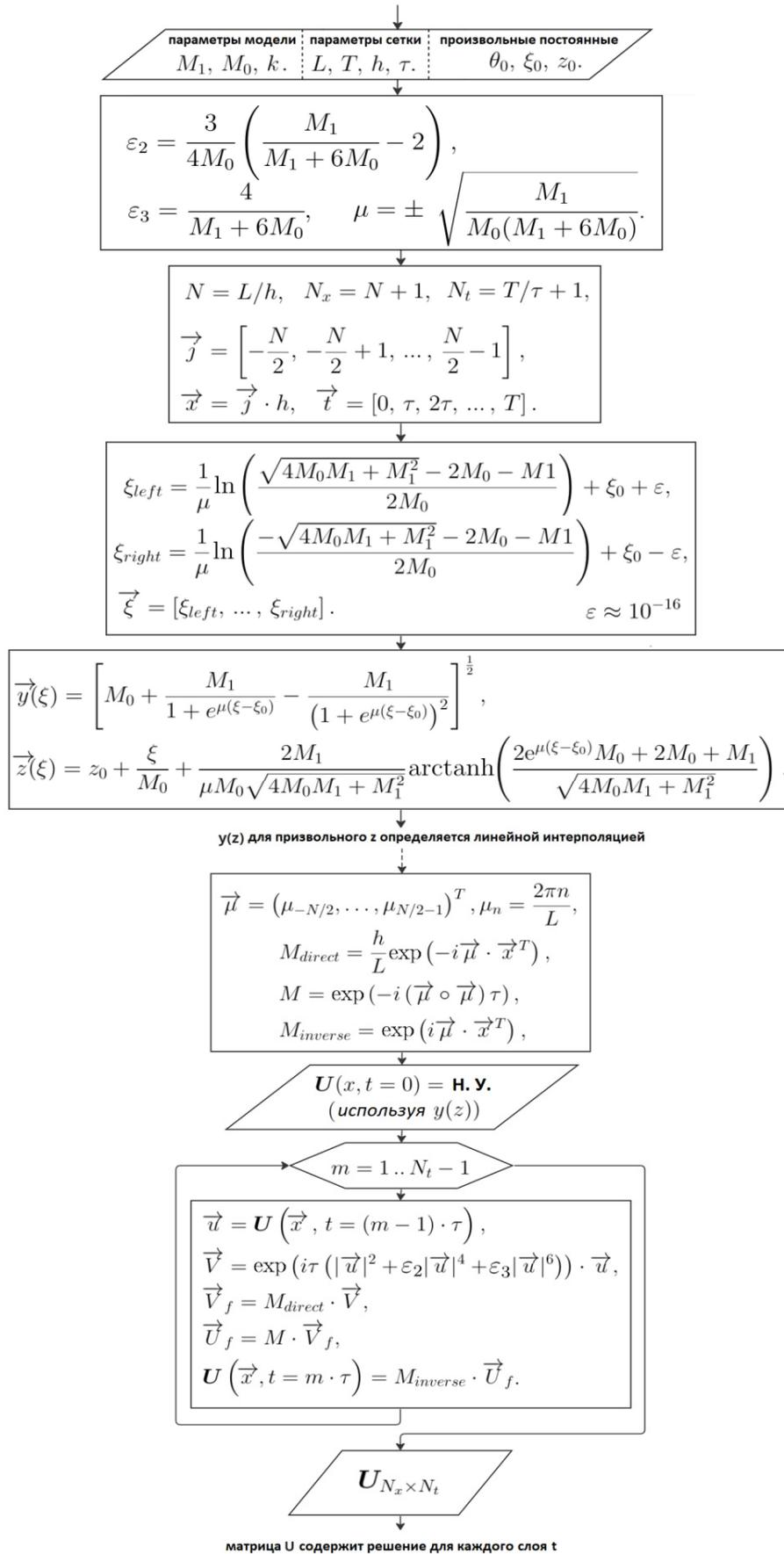


Рис. 3. Блок-схема программы, моделирующей процессы распространения импульсов с помощью метода Фурье

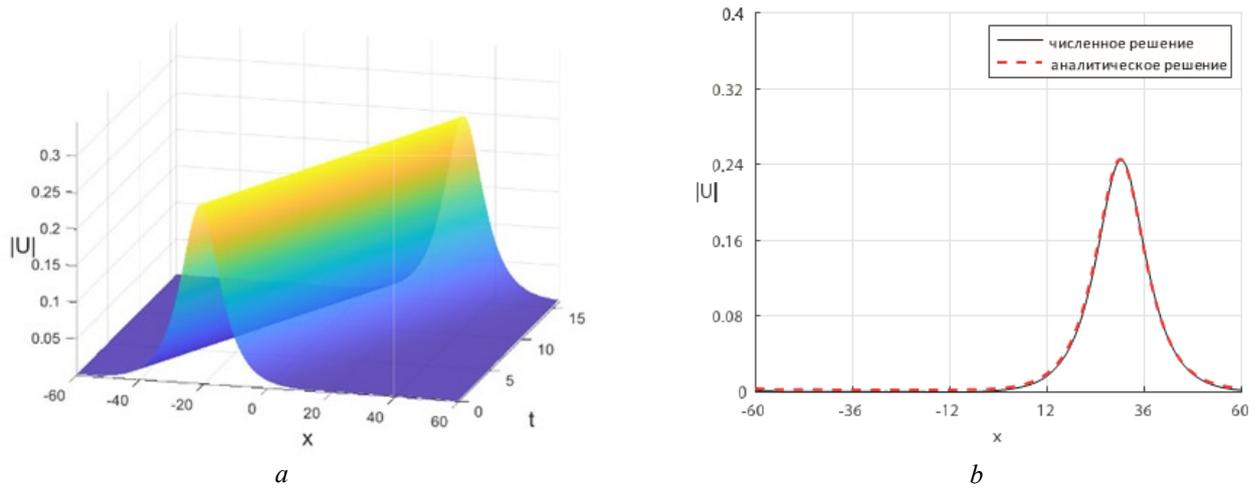


Рис. 4. Распространение уединённой волны (29) при параметрах $L = 120$, $T = 16$, $h = 0.2$, $\tau = 0.04$, $z_0 = -20$, $k = 1.6$, $M_0 = -1.48$, $M_1 = 6.16$: a – модуль численного решения; b – модули решений при $t = 16$

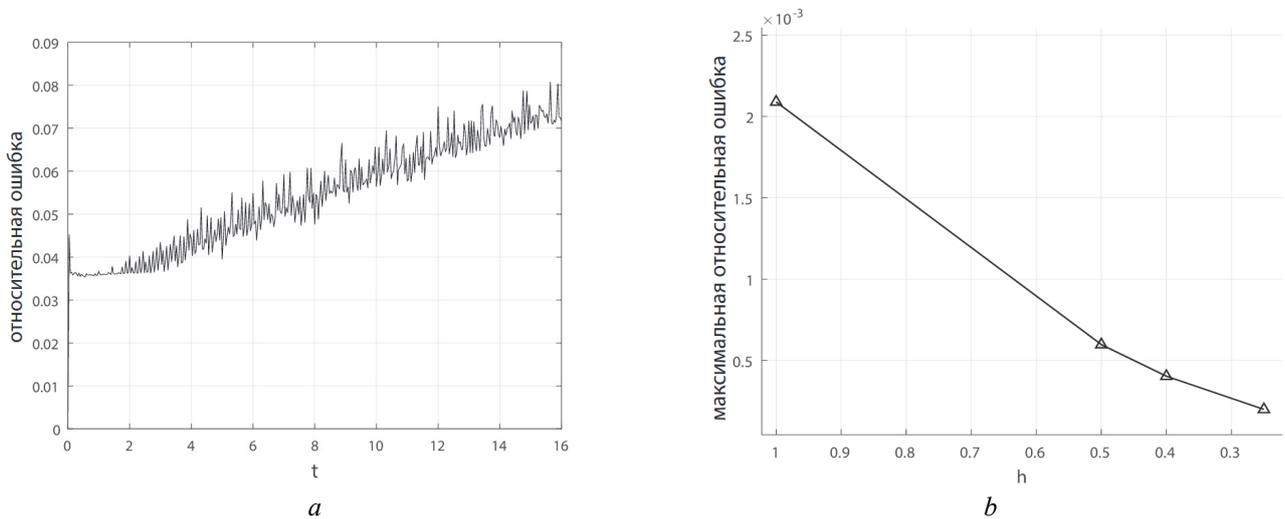


Рис. 5. Численные результаты при параметрах $L = 120$, $T = 16$, $h = 0.2$, $\tau = 0.04$, $z_0 = -20$, $k = 1.6$, $M_0 = -1.48$, $M_1 = 6.16$: a – относительная ошибка в зависимости от времени при $h = 0.2$, $\tau = 0.04$; b – максимальная относительная ошибка в зависимости от шага сетки h

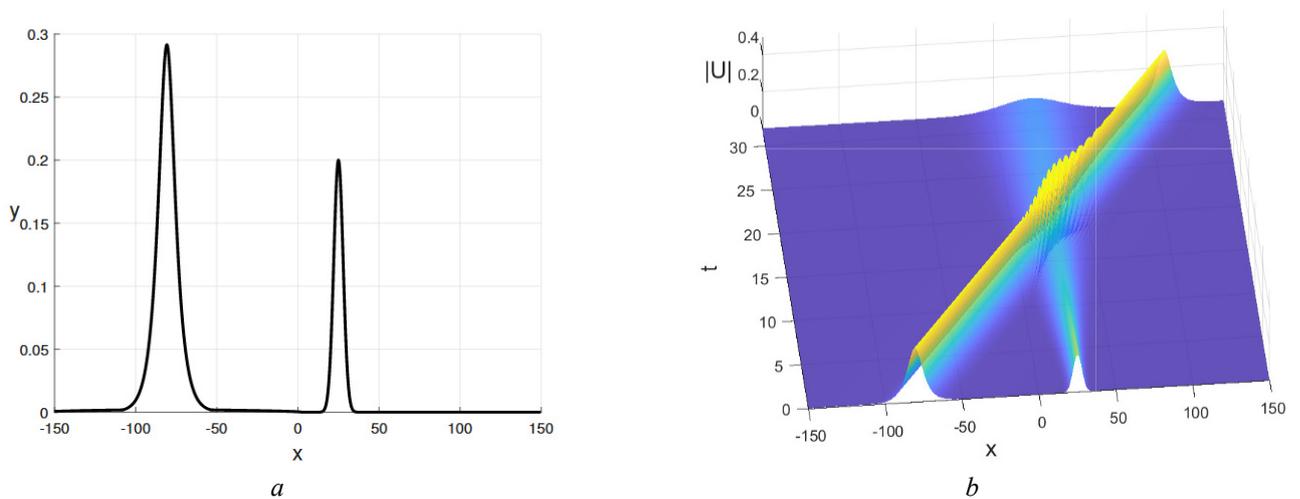


Рис. 6. Численные результаты при параметрах $M_0 = -3$, $M_1 = 12.34$, $k = 3$, $\xi_0 = 0$, $z_0 = -80$, $\theta_0 = 0$, $L = 300$, $T = 32$, $h = 0.25$, $\tau = 0.625$, $A = 0.2$, $\nu = 0.06$, $x_0 = 25$: a – модуль начального условия (43); b – модуль численного решения

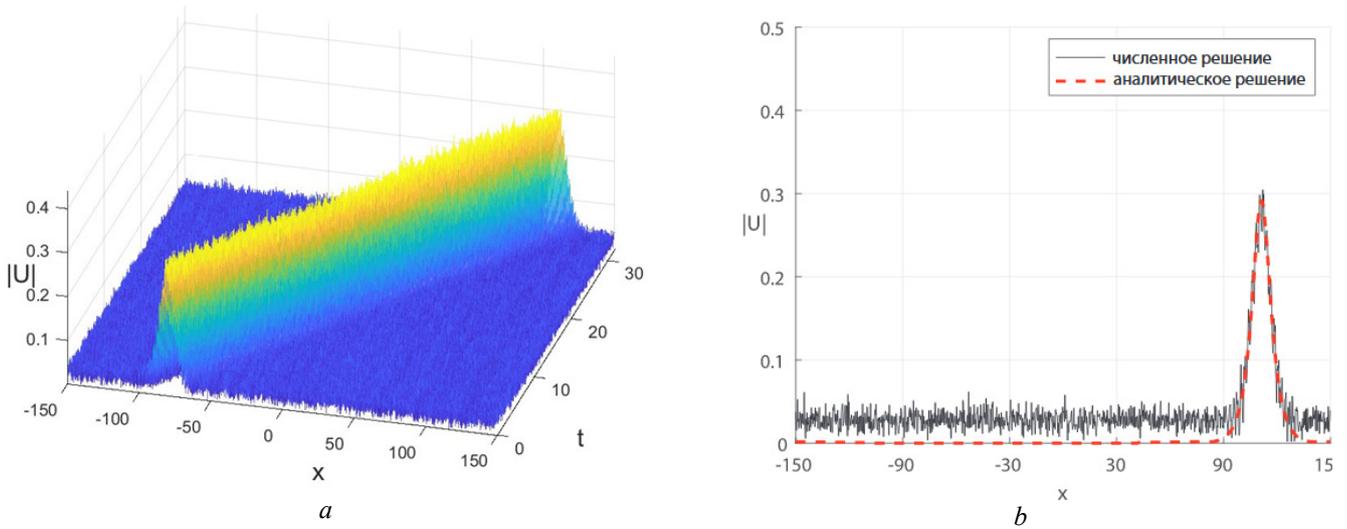


Рис. 7. Численные результаты при параметрах $M_0 = -3$, $M_1 = 12.34$, $k = 3$, $\xi_0 = 0$, $z_0 = -80$, $\theta_0 = 0$, $L = 300$, $T = 32$, $h = 0.25$, $\tau = 0.0625$, $A = 0.05$: a – модуль численного решения; b – профили решений при $t = 32$

2.3. Анализ влияния высших степеней нелинейности на распространение уединенной волны

При решении физических задач классическое НУШ обобщается путем добавления в уравнение некоторых выражений, учитывающих определенные физические факторы. Поскольку реальные физические процессы могут протекать по более сложным законам, не всегда возможно заранее предугадать и учесть все необходимые

уточняющие члены. В этом разделе мы исследуем влияние дополнительных нелинейных членов на решения НУШ. При $\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_3 = 0$, уравнение (6) является НУШ:

$$iu_t + u_{xx} + |u|^2 u = 0. \quad (45)$$

Задача Коши для уравнения (45) решается методом обратной задачи рассеяния. Его решение в виде уединенной волны представлено в работе [8] и имеет вид

$$u(x, t) = \frac{4(\omega - k^2)}{2(\omega - k^2)e^{-(x - c_0 t - z_0)}\sqrt{(\omega - k^2)} + e^{(x - c_0 t - z_0)}\sqrt{(\omega - k^2)}} e^{i(kx - \omega t - \theta_0)}, \quad (46)$$

где $c_0 = 2k$ и k , ω , z_0 , θ_0 – произвольные константы. Начальное условие, относящееся к решению (46) имеет вид

$$u(x, 0) = \frac{4(\omega - k^2)}{2(\omega - k^2)e^{-(x - z_0)}\sqrt{(\omega - k^2)} + e^{(x - z_0)}\sqrt{(\omega - k^2)}} \times e^{i(kx - \theta_0)}. \quad (47)$$

При $\varepsilon_3 = 0$ решение уравнения (6) было также найдено в следующем виде

$$u(x, t) = \left(\frac{4\mu e^{\sqrt{\mu}(x - 2kt - z_0)}}{1 + 4e^{\sqrt{\mu}(x - 2kt - z_0)} + (4 + 4\mu\nu)e^{2\sqrt{\mu}(x - 2kt - z_0)}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i(kx - \omega t - \theta_0)}, \quad (48)$$

где $\mu = 4(\omega - k^2)$, $\nu = 4\varepsilon_2/3$ и k , ω , z_0 , θ_0 – произвольные константы. Заметим, что при $\varepsilon_2 = 0$ решение (48) совпадает с решением (46).

Исследуем влияние нелинейных выражений на распространение уединенной волны (47) в рамках модели, описываемой уравнением (6).

При $\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_3 = 0$ уединенная волна (46) является точным решением уравнения (6). Числен-

ное решение для начального условия (47) совпадает с аналитическим.

В случае введения нелинейного члена при $\varepsilon_2 \neq 0$ импульс претерпевает изменения в процессе распространения. Поскольку начальное условие (47) не удовлетворяет уравнению модели (6), солитонные свойства импульса перестают выполняться, и его форма постепенно изме-

няется. Излучение энергии при граничных периодических условиях нарушает изначальное предположение об уединенности импульса. Для восстановления справедливости данного предположения в процесс расчета введена процедура фильтрации излучения в численном решении.

Обнаружено, что форма импульса (47) постепенно становится устойчивой. Установлено, что для установившегося импульса существует солитон вида (48), совпадающий по форме.

Данное наблюдение позволяет заключить, что исходный импульс под влиянием нелинейных выражений в модели преобразуется в импульс, совпадающий с аналитическим решением (48) уравнения (6) при $\epsilon_3 = 0$. Результаты моделирования проиллюстрированы на рис. 8 и 9.

Относительная ошибка между аналитическим решением (48) и полученным численным решением от времени представлена на рис. 9,а.

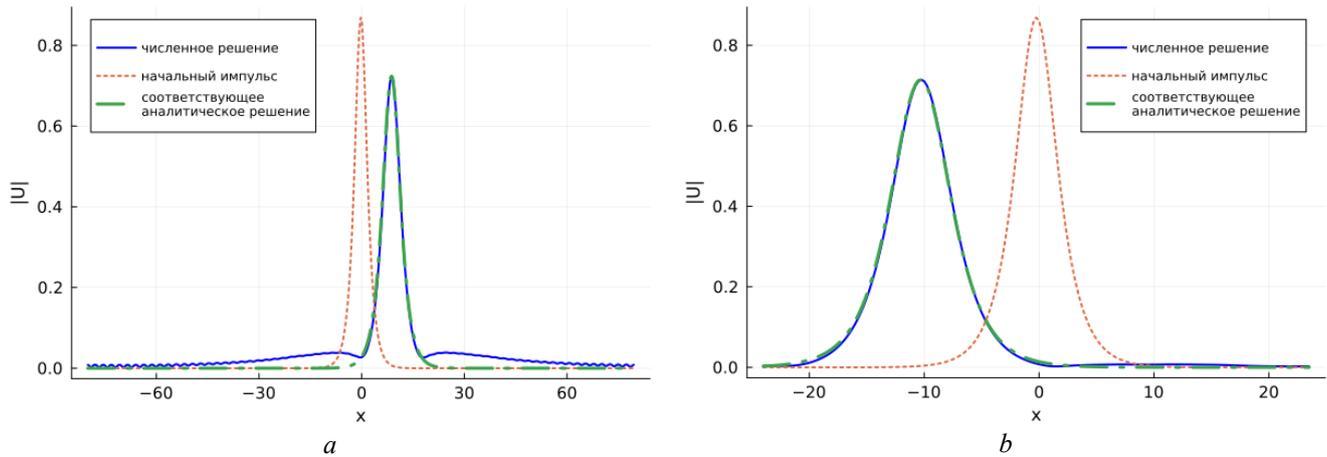


Рис. 8. Численные результаты распространения импульса (47) при $L = 160$, $T = 500$, $h = 0.25$, $\tau = 0.0625$, $\epsilon_2 = -0.5$, $\epsilon_3 = 0$, $\omega = 0.4$, $k = 0.15$. Профиль решения: а – при $t = 30$; б – при $t = 500$

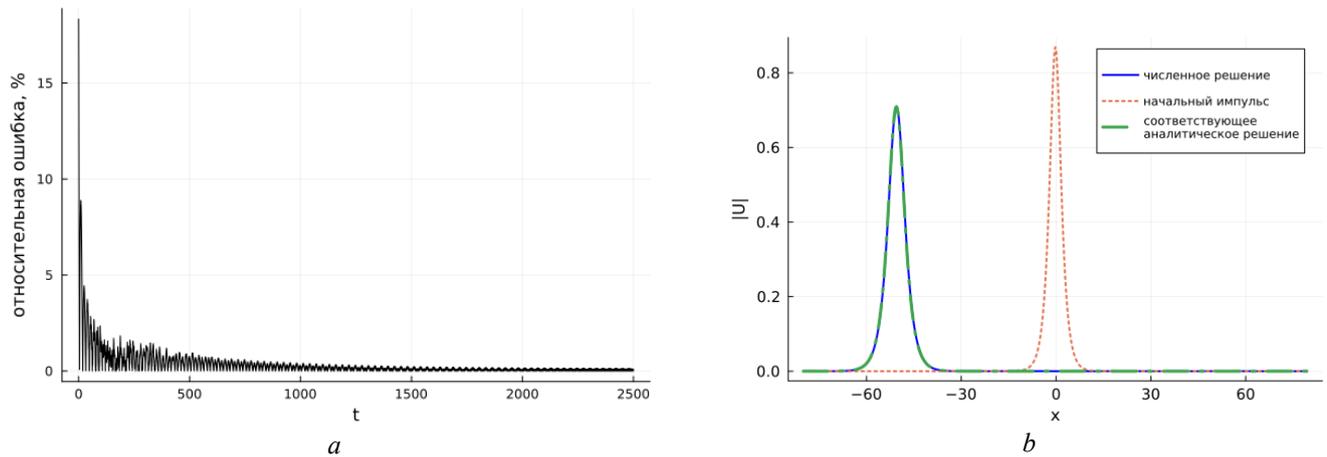


Рис. 9. Численные результаты распространения импульса (47) при $L = 160$, $T = 500$, $h = 0.25$, $\tau = 0.0625$, $\epsilon_2 = -0.5$, $\epsilon_3 = 0$, $\omega = 0.4$, $k = 0.15$: а – относительная ошибка в зависимости от времени; б – профиль решения при $t = 2500$

Рассмотрим добавление в модель нелинейного члена седьмой степени при $\epsilon_3 \neq 0$. При этом форма импульса также изменяется. Установлено влияние знака ϵ_3 на затухание колебаний. При $\epsilon_3 < 0$ амплитуда результирующего импульса уменьшается относительно исходного. При $\epsilon_3 > 0$ амплитуда полученного импульса возрас-

тает. Колебания устанавливаются тем раньше по времени моделирования, чем меньше значение ϵ_3 . Зависимости амплитуды импульса от времени в зависимости от параметров возмущений проиллюстрированы на рис. 10, где δ – относительная амплитуда колебаний в конце временного промежутка моделирования.

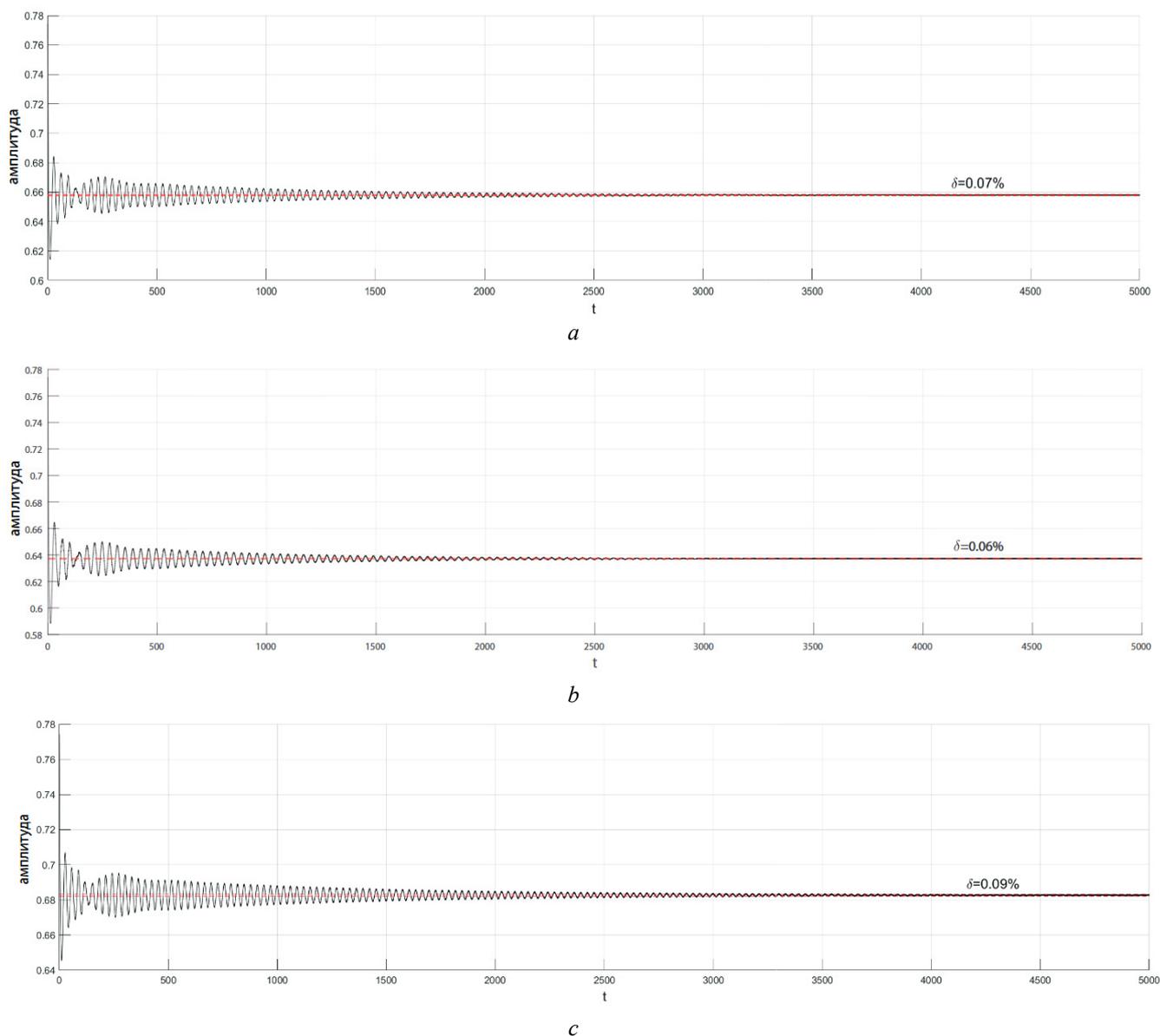


Рис. 10. Зависимость амплитуды импульса (47) при распространении, где $L = 200$, $T = 5000$, $h = 0.25$, $\tau = 0.0625$, $\omega = 0.2$, $k = 0.707$: а) $\epsilon_2 = -0.5$, $\epsilon_3 = 0$; б) $\epsilon_2 = -0.5$, $\epsilon_3 = -0.25$; в) $\epsilon_2 = -0.5$, $\epsilon_3 = 0.25$

Результаты, представленные в данном разделе, позволяют сделать вывод, что уединенные волны НУШ при распространении в среде с высшими нелинейными членами при определенных параметрах преобразуются в устойчивые солитоны обобщенной неинтегрируемой модели. Этот переход сопровождается излучением энергии. Обнаружено, что добавление нелинейного члена седьмой степени влияет на скорость преобразования исходного импульса в устойчивый, и на форму итогового импульса. Данное влияние определяется величиной и знаком параметра ϵ_3 .

2.4. Столкновения солитонов в присутствии высших степеней нелинейности

Известно, что решения интегрируемого нелинейного уравнения Шрёдингера взаимодействуют упруго, т.е. без обмена импульсом и энергией. При нарушении интегрируемости системы внешними возмущениями солитонные столкновения становятся неупругими. В этом разделе мы исследуем столкновения солитонов НУШ в среде, описываемой возмущенным уравнением (6).

Рассмотрим столкновения двух солитонов вида (47) с заданными параметрами k_1 , k_2 , ω_1 ,

$\omega_2, z_{0,1}, z_{0,2}, \theta_{0,1}, \theta_{0,2}$. Значения параметров ε_2 и ε_3 в данном случае влияют на интенсивность обмена импульсом и энергией. Обнаружено, что итоговый характер взаимодействия солитонов зависит также от разности фаз в момент столк-

новения $\Delta\theta = \theta_{0,1} - \theta_{0,2}$. Результаты моделирования для $k_1 = -k_2, \omega_1 = \omega_2, z_{0,1} = -z_{0,2}, \theta_{0,1} = \theta_{0,2} + \Delta\theta$ представлены на рис. 11 и 12.

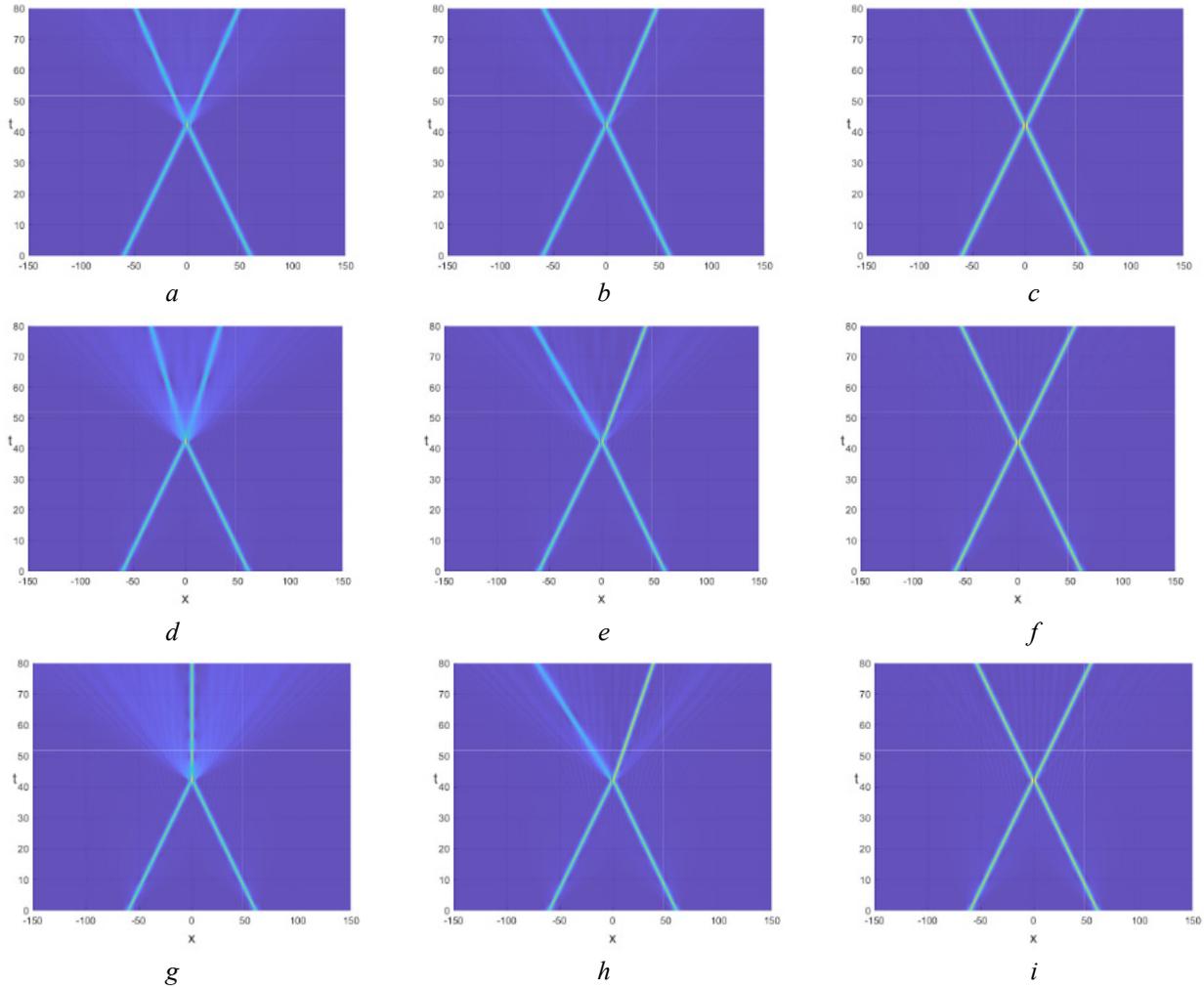


Рис. 11. Модуль численного решения при моделировании солитонных столкновений для $k_1 = -k_2 = 0.7, \omega_1 = \omega_2 = 0$: а) $\Delta\theta = 0, \varepsilon_2 = 0.2, \varepsilon_3 = -0.1$; б) $\Delta\theta = \pi/2, \varepsilon_2 = 0.2, \varepsilon_3 = -0.1$; в) $\Delta\theta = \pi, \varepsilon_2 = 0.2, \varepsilon_3 = -0.1$; д) $\Delta\theta = 0, \varepsilon_2 = 0.4, \varepsilon_3 = -0.2$; е) $\Delta\theta = \pi/2, \varepsilon_2 = 0.4, \varepsilon_3 = -0.2$; ф) $\Delta\theta = \pi, \varepsilon_2 = 0.4, \varepsilon_3 = -0.2$; г) $\Delta\theta = 0, \varepsilon_2 = 0.6, \varepsilon_3 = -0.3$; х) $\Delta\theta = \pi/2, \varepsilon_2 = 0.6, \varepsilon_3 = -0.3$; и) $\Delta\theta = \pi, \varepsilon_2 = 0.6, \varepsilon_3 = -0.3$

Результаты моделирования позволяют заключить, что столкновения солитонов НУШ в рамках математической модели, включающей нелинейные члены высшего порядка в зависимости от разности фаз в момент столкновения, могут быть существенно неупругими. Вблизи $\Delta\theta = \pi$ солитоны взаимодействуют наименее интенсивно. Когда разность фаз находится в окрестности нуля, происходит значительное энерговыделение. В этом случае существуют критические параметры возмущения, при кото-

рых два солитона сливаются в один стационарный. При параметре $\Delta\theta \in (0, \pi)$ взаимодействие солитонов происходит с обменом энергией и импульсом. Помимо разности фаз, на определенный тип взаимодействия влияют значения параметров возмущения ε_2 и ε_3 . Чем больше модуль коэффициента при соответствующей степени нелинейности, тем более выражен неупругий характер взаимодействия.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С ТРЕМЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

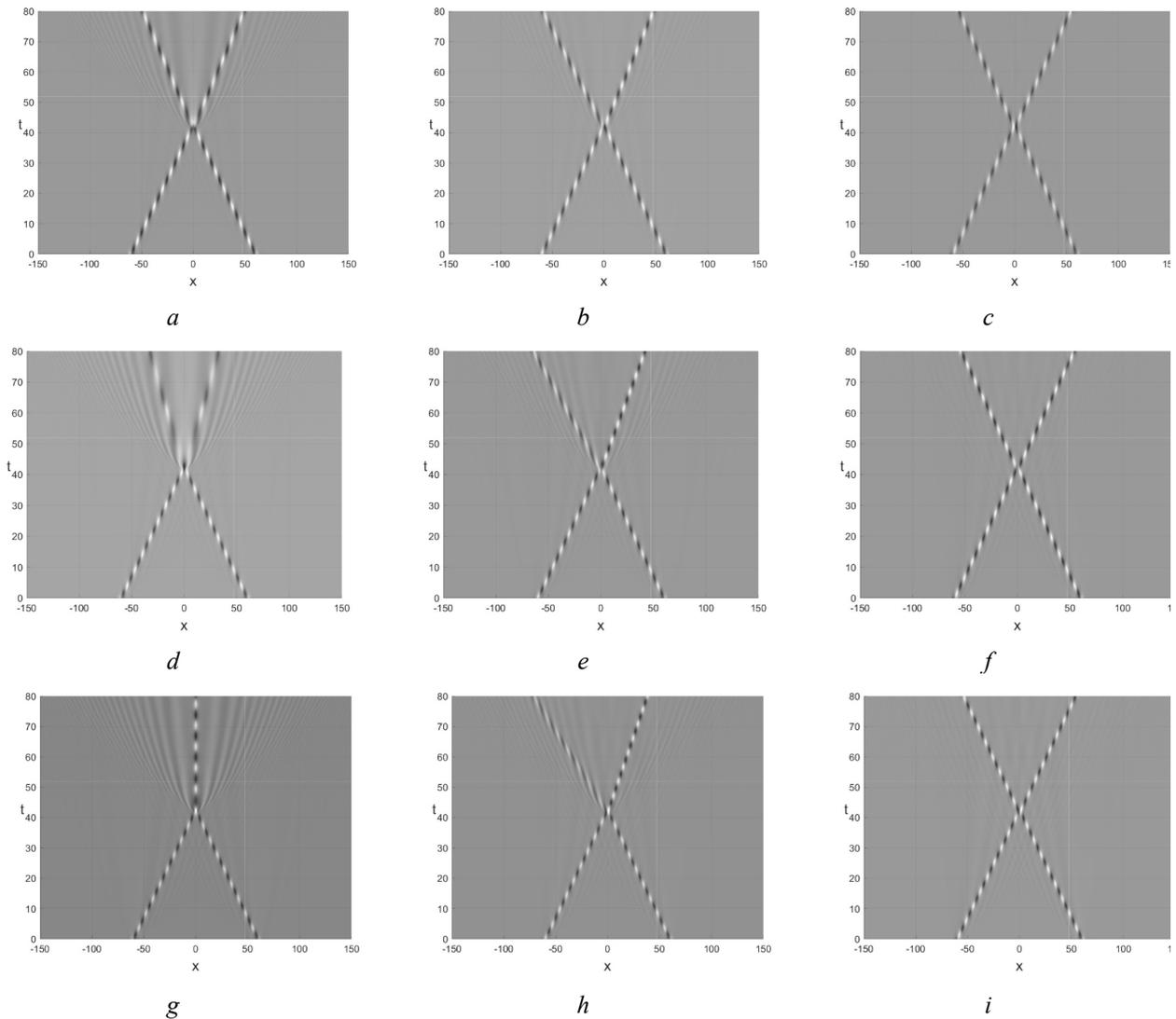


Рис. 12. Действительная часть численного решения при моделировании солитонных столкновений для для $k_1 = -k_2 = 0.7$, $\omega_1 = \omega_2 = 0$: *a)* $\Delta\theta = 0$, $\varepsilon_2 = 0.2$, $\varepsilon_3 = -0.1$; *b)* $\Delta\theta = \pi/2$, $\varepsilon_2 = 0.2$, $\varepsilon_3 = -0.1$; *c)* $\Delta\theta = \pi$, $\varepsilon_2 = 0.2$, $\varepsilon_3 = -0.1$; *d)* $\Delta\theta = 0$, $\varepsilon_2 = 0.4$, $\varepsilon_3 = -0.2$; *e)* $\Delta\theta = \pi/2$, $\varepsilon_2 = 0.4$, $\varepsilon_3 = -0.2$; *f)* $\Delta\theta = \pi$, $\varepsilon_2 = 0.4$, $\varepsilon_3 = -0.2$; *g)* $\Delta\theta = 0$, $\varepsilon_2 = 0.6$, $\varepsilon_3 = -0.3$; *h)* $\Delta\theta = \pi/2$, $\varepsilon_2 = 0.6$, $\varepsilon_3 = -0.3$; *i)* $\Delta\theta = \pi$, $\varepsilon_2 = 0.6$, $\varepsilon_3 = -0.3$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе проведено численное моделирование процессов распространения импульсов в нелинейной оптической среде с периодическими граничными условиями, описываемой обобщенным уравнением Шрёдингера (2) с нелинейными членами третьего, пятого и седьмого порядков. Получено аналитическое решение в виде уединенной волны (29) и условия ее существования. Представлена модификация метода Фурье для численного решения поставленной задачи. С численной точки зрения исследован процесс распространения аналитически полученного солитонного решения обобщенной модели. Проведено моделирование взаимодей-

ствия оптического солитона уравнения (2) с возмущением в начальных данных. Смоделировано распространение оптического импульса в среде со случайным шумом. Проанализировано влияние высших степеней нелинейности в математической модели на распространение уединенных волн нелинейного уравнения Шрёдингера. Проведено моделирование процессов столкновения солитонов в условиях наличия высших нелинейных членов.

Следующие результаты получены в результате исследования.

1. Уединенные волны уравнения Шрёдингера с нелинейными членами третьей, пятой и седьмой степеней распространяются устойчиво.

2. Оптические солитоны уравнения Шрёдингера с нелинейными членами третьей, пятой и седьмой степеней не распадаются при возмущении начальных условий или при распространении в условиях случайного шума.

3. При распространении в оптической среде, описываемой математической моделью с нелинейными членами более высокого порядка, солитоны НУШ преобразуются в солитоны, удовлетворяющие обобщенному уравнению.

4. В условиях наличия нелинейных членов высшего порядка столкновения солитонов НУШ происходят значительно не упруго. При определенных параметрах возможно образование стоячих волн.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-41-00070, <https://rscf.ru/project/23-41-00070/>

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lake B.M, Yuen H.C., Rungaldier H., Ferguson W.E.* Nonlinear deep-water waves: theory and experiment. Part 2. Evolution of a continuous wave train // *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, 1977. V. 83. № 1. Pp. 49–74.

2. *Yuen H.C., Ferguson W.E.* Relationship between Benjamin-Feir instability and recurrence in the nonlin-

ear Schrödinger equation. // *Physics of Fluids*, 1978. V. 21. № 8. Pp. 1275.

3. *Kudryashov N.A.* On traveling wave solutions of the Kundu-Eckhaus equation // *Optik*, 2020, V. 224. 165500.

4. *Kohl R.W., Biswas A., Ekici M., Zhou Q., Khan S., Alshomrani A.S., Belic M. R.* Highly dispersive optical soliton perturbation with cubic-quintic-septic refractive index by semi-inverse variational principle // *Optik*, 2019, V. 199. 163322.

5. *Kudryashov N.A.* Construction of nonlinear differential equations for description of propagation pulses in optical ber // *Optik*, 2019, V. 192. 162964.

6. *Kudryashov N.A.* Solitary and periodic waves of the hierarchy for propagation pulse in optical ber // *Optik*, 2019, V. 194. 163060.

7. *Biswas A., Ekici M., Sonmezoglu A., Belic M.R.* Highly dispersive optical solitons with non-local nonlinearity by exp- function // *Optik*, 2019, V. 186. Pp. 288–292.

8. *Kudryashov N.A.* Method for finding optical solitons of generalized nonlinear Schrödinger equations // *Optik*, 2022, V. 261. 169163.

9. *Kivshar Y., Agrawal G.* *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals.* Academic Press, 2003. Pp. 108.

10. *Kudryashov N.A.* Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations // *Chaos, Solitons & Fractals*, 2005, V. 24. №. 5. Pp. 1217–1231.

11. *Weideman A. C., Herbst B.M.* Split-Step Methods for the Solution of the Nonlinear Schrödinger Equation // *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1986, V. 23. №. 3. Pp. 485–507.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2024, vol. 13, no. 2, pp. 83–96

NUMERICAL STUDY OF SOLITON SOLUTIONS OF THE CUBIC-QUINTIC-SEPTIC NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION

V.A. Medvedev, N.A. Kudryashov

National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

*e-mail: viktormedvedev12115551@gmail.com

**e-mail: nakudr@gmail.com

Received February 11, 2024; revised April 01, 2024; accepted April 02, 2024

The problem of pulse propagation described by the nonlinear Schrödinger equation with non-Kerr nonlinearity of the third, fifth and seventh powers is considered. Optical solitons of the considered equation are found using simplest equations method and implicit functions method. The area of acceptable model parameters is illustrated. A modification of the split-step Fourier method is presented. Optical soliton propagation process is studied numerically. The validity of analytical calculations has been proven. The process of the interaction of a soliton pulse with a disturbance in the initial condition is analyzed. The process of the soliton pulse propagation in a medium with a random noise simulated. The stability of optical solitons of the cubic-quintic-septic nonlinear Schrodinger equation is proved. The influence of higher nonlinearity terms on the nonlinear Schrodinger equation solitary waves is studied.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С ТРЕМЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

The soliton collisions in the presence of higher nonlinear terms are simulated. It is shown that in the presence of higher nonlinear terms, the solitons interact inelastically upon collision.

Keywords: Cubic-quintic-septic nonlinear Schrödinger equation, Split-step Fourier scheme, Optical soliton, Numerical modeling, Nonlinear optics, Nonlinear differential equations.

REFERENCES

1. Lake B.M., Yuen H.C., Rungaldier H., Ferguson W.E. Nonlinear deep-water waves: theory and experiment. Part 2. Evolution of a continuous wave train. Journal of Fluid Mechanics, Cambridge University Press, 1977. Vol. 83. No. 1 Pp. 49–74.
2. Yuen H.C., Ferguson W. E. Relationship between Benjamin-Feir instability and recurrence in the nonlinear Schrödinger equation. Physics of Fluids, 1978. Vol. 21. No. 8. P. 1275.
3. Kudryashov N.A. On traveling wave solutions of the Kundu-Eckhaus equation. Optik, 2020, Vol. 224. 165500.
4. Kohl R.W., Biswas A., Ekici M., Zhou Q., Khan S., Alshomrani A.S., Belic M. R. Highly dispersive optical soliton perturbation with cubic-quintic-septic refractive index by semi-inverse variational principle. Optik, 2019. Vol. 199. 163322.
5. Kudryashov N.A. Construction of nonlinear differential equations for description of propagation pulses in optical ber. Optik, 2019. Vol. 192. 162964.
6. Kudryashov N.A. Solitary and periodic waves of the hierarchy for propagation pulse in optical ber. Optik, 2019, Vol. 194. 163060.
7. Biswas A., Ekici M., Sonmezoglu A., Belic M.R. Highly dispersive optical solitons with non-local nonlinearity by exp-function. Optik, 2019. Vol. 186. Pp. 288–292.
8. Kudryashov N.A. Method for finding optical solitons of generalized nonlinear Schrödinger equations. Optik, 2022. Vol. 261. 169163.
9. Kivshar Y., Agrawal G. Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals. Academic Press, 2003. Pp. 108.
10. Kudryashov N.A. Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations. Chaos, Solitons & Fractals, 2005. Vol. 24. No. 5. Pp. 1217–1231.
11. Weideman A. C., Herbst B.M. Split-Step Methods for the Solution of the Nonlinear Schrödinger Equation. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1986. Vol. 23. No. 3. Pp. 485–507.