

УДК.539.412, 539.1.09

ВЫБОР АДЕКВАТНЫХ ПОТЕНЦИАЛА И МЕТОДОВ РАСЧЕТА КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ АКСИАЛЬНО КАНАЛИРОВАННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

Н.П. Калашиников^{1,*}, А.С. Ольчак^{1,**}

¹Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
Москва, 115409, Россия

*e-mail: kalash@mephi.ru

**e-mail: asolchak@mephi.ru

Поступила в редакцию: 18.01.2024

После доработки: 19.01.2024

Принята к публикации: 06.02.2024

В работе рассматривается движение релятивистских частиц (электронов) вдоль плотноупакованных цепочек атомов в монокристаллах (аксиальное каналирование). Движение электронов рассматривается в сопутствующей системе отсчета (ССО), которая сама движется со скоростью, равной продольной оси каналирования компоненте скорости каналированной частицы. В ССО движение аксиально-каналированной частицы является двумерным (плоским), причем для электронов с энергиями до нескольких гигаэлектронвольт оно будет нерелятивистским, как в атоме водорода. Квантовые характеристики движения определяются энергией частицы (она играет роль массы электрона в двумерном «атоме»), а также параметрами усредненного потенциала атомной цепочки, зависящими от кристаллографического направления и химического состава кристалла. Аксиальное каналирование вполне можно рассматривать как уникальную модель релятивистского двумерного атома с управляемыми параметрами. В работе показано, что основные характеристики квантовых состояний поперечного движения частиц при аксиальном каналировании слабо чувствительны к функциональной зависимости параметров усредненного потенциала от поперечных координат. Для расчета таких характеристик удобно использовать приближенный метод квантования Бора, позволяющий получить результат аналитически. Модифицированный метод квантования Бора можно применить для расчета характеристик поперечного движения, выходящего даже в ССО за рамки нерелятивистского приближения. В работе рассчитаны энергетические спектры допустимых состояний поперечного орбитального движения для нескольких вариантов модельных аксиально-симметричных потенциалов. Показано, что, несмотря на различия в структуре, средние расстояния между энергетическими уровнями слабо нечувствительны к выбору модели потенциала. Найдены энергии уровней как для случая, когда для описания поперечного движения в ССО применимо нерелятивистское приближение, так и в ситуации, выходящей за рамки нерелятивистского приближения.

Ключевые слова: когерентное взаимодействие, каналирование, монокристалл, сопутствующая система отсчета, электромагнитное излучение, квантовая механика, гамма-излучение.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.312

EDN GVIYWB

ВВЕДЕНИЕ

В этой статье авторы продолжают систематическое рассмотрение движения релятивистских частиц вдоль выделенных направлений в монокристаллах (каналирование). В предшествующей публикации [1] обсуждался выбор потенциала для описания и расчета квантовых характеристик поперечного движения заряженной частицы в режиме плоскостного каналирования. В настоящей статье анализируется осевое (аксиальное) каналирование, когда электроны движутся по спиралевидным траекториям

вокруг цепочек атомов, описываемых усредненным аксиально симметричным потенциалом. В поперечной направлению каналирования плоскости движение каналированных электронов является орбитальным и финитным, подобно движению электронов в атомах, что позволяет рассматривать такое движение как уникальную исследовательскую модель релятивистского двумерного атома с управляемыми параметрами, поскольку характеристики движения электрона в осевом канале задаются его релятивистской энергией (она играет роль массы электрона в двумерном «атоме» и в эксперименте ее

ВЫБОР АДЕКВАТНЫХ ПОТЕНЦИАЛА И МЕТОДОВ РАСЧЕТА КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ АКСИАЛЬНО КАНАЛИРОВАННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

можно менять, управляя этой массой), а также параметрами усредненного потенциала атомной цепочки, которые зависят от выбора кристаллографического направления и химического состава кристалла.

Особенность предложенного авторами подхода состоит в сочетании нескольких взаимодополняющих аналитических методов описания движения релятивистских микрочастиц в симметричных потенциалах для получения адекватных расчетных результатов без обращения к непрозрачным численным методам. В комплект применяемых методов входят следующие.

- Использование сопутствующей системы отсчета (ССО), которая сама движется со скоростью, равной продольной оси каналирования компоненте скорости каналированной частицы. В ССО движение аксиально-каналированной частицы является двумерным (плоским). Для электронов с энергиями до нескольких гигаэлектрон-вольт оно будет нерелятивистским, но для больших энергий нерелятивистское приближение в ССО перестает быть допустимым.

- Использование полуклассических методов квантования Бора и Бора–Зоммерфельда, позволяющих аналитически рассчитать спектр разрешенных состояний поперечного движения как в плоскостном, так и в аксиальном случаях. Эти методы квантования можно расширить, сделав их применимыми даже для случая, когда поперечное движение перестает быть нерелятивистским даже в ССО.

- Использование классического и полуклассического приближений для аналитического расчета заселенностей квантовых состояний поперечного движения и интенсивности жесткого электромагнитного излучения, возникающего при переходах между этими состояниями.

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА УСРЕДНЕННОГО ПОТЕНЦИАЛА ПРИ АКСИАЛЬНОМ КАНАЛИРОВАНИИ И КВАНТОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДВИЖЕНИЯ В СОПУТСТВУЮЩЕЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

Расчет усредненного аксиально-симметричного потенциала цепочки атомов можно выполнить, усреднив по продольному направлению z объемную зарядовую плотность $\rho(|\vec{r}|)$ составляющих ее атомов (ионов):

$$\langle \rho(r) \rangle = \int dz \rho(|\vec{r}|)/d, \quad (1)$$

где d – межатомное расстояние для выбранного кристаллографического направления; аргумент

r в усредненной зарядовой плотности – расстояние до оси каналирования, радиус-вектор \vec{r} в подынтегральном выражении для зарядовой плотности атома отсчитывается от положения ядра атома (иона).

Чтобы найти усредненный потенциал цепочки атомов (точнее – потенциальную энергию $U(r)$ электрона с зарядом e в поле, созданном усредненной зарядовой плотностью (2)), придется решить уравнение Пуассона в цилиндрических координатах [2]:

$$\Delta U(r) = -e \langle \rho(r) \rangle / \epsilon_0 \quad (2)$$

В ССО волновые функции $\psi_{n,l}(r)$ поперечного движения частицы с релятивистской энергией $E \gg mc^2$ в двумерном потенциальном канале $U(r)$ задаются решениями релятивистского уравнения Шредингера (также в цилиндрических координатах)

$$(\hbar^2 c^2 / 2E) \Delta \psi_{n,l}(r) = (\epsilon_n - U(r)) \psi_{n,l}(r), \quad (3)$$

где ϵ_n – собственные значения энергий поперечного движения, определяемые главным квантовым числом n и соответствующие собственным функциям $\psi_{n,l}(r)$ уравнения (3); l – орбитальное квантовое число, определяющее направленный вдоль оси каналирования квантованный момент импульса электрона L_l при заданной главным квантовым числом n энергии ϵ_n поперечного движения.

Сложность состоит в том, что и посчитать интеграл (1) с похожей на реальную плотностью распределения заряда в атоме, и тем более решить потом уравнения (2) и (3) удастся только в специальных функциях [2] или численно, да и сама зарядовая плотность отдельных атомов $\rho(|\vec{r}|)$ считается только численно и/или задается в той или иной приближенной модели. Если мы хотим уловить общие закономерности и характеристики потенциала и движения электронов в нем, удобнее и проще сразу взять модельную форму потенциала $U(r)$, похожую по параметрам на численно считаемую, но позволяющую далее работать с ней аналитически.

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ В АКСИАЛЬНОМ КАНАЛЕ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО КУЛОНОВСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

К сожалению, моделей, допускающих аналитический квантовый расчет по схеме (2), (3), не так много. Можно, например, взять потенциальную двумерную «кулоновскую» функцию

$$U(\rho) = -b \frac{Ze^2 R_{T-F}}{\rho a}, \quad (4)$$

где R_{T-F} – радиус Томаса–Ферми, требующий сложного расчета для каждого типа атомов; b – подгоночный, безразмерный параметр порядка единицы.

Расходящаяся в нуле функция (1) весьма далека от реального усредненного потенциала цепочки атомов, который, при учете тепловых колебаний ионного остова кристалла, обязан быть ограничен в нуле, однако некоторые характерные свойства движения в режиме аксиального каналирования она позволяет выявить. Анализ решения волнового уравнения (3) с потенциалом (4)

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{l^2}{r^2} R \right) = (U(r) - \varepsilon) R \quad (5)$$

можно найти, например, в [3], где показано, что энергия частицы в двумерном потенциале (4) может принимать значения

$$\varepsilon_n = - \frac{\mu e^4 Z^2}{2\hbar^2 \left(n + |l| + \frac{1}{2} \right)^2}, \quad (6)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$, $|l| = 0, 1, 2, \dots$, что лишь незначительно отличается от известной формулы для обычного трехмерного атома водорода (формула Бора–Зоммерфельда, [4]).

В [3] приведены также волновые функции состояний с квантовыми числами n, l :

$$\Psi_{nl}(r, \varphi) = e^{il\varphi} \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-\gamma \frac{r}{a}} \left(\frac{r}{a} \right)^{|l|+\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^n a_k \left(\frac{r}{a} \right)^k, \quad (7)$$

однако дальнейший аналитический расчет характеристик движения и сопровождающего его электромагнитного излучения в квантовом подходе даже с таким упрощенным потенциалом, как (4), практически невозможен.

ПРИМЕНЕНИЕ ПРАВИЛА КВАНТОВАНИЯ БОРА-ЗОММЕРФЕЛЬДА ДЛЯ РАСЧЕТА КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ ДВИЖЕНИЯ ПРИ АКСИАЛЬНОМ КАНАЛИРОВАНИИ

Если мы хотим уловить общие закономерности и характеристики движения электронов в поле усредненного аксиально-симметричного потенциала, разумно воспользоваться приближенными аналитическими методами расчета квантовых состояний. Для двумерного движения таким упрощенным методом является правило квантования Бора [5–6], предложенное еще до создания полноценной квантовой механики и успешно позволившее точно рассчитать спектр

энергетических состояний атома водорода. Суть правила Бора – энергии разрешенных квантовых состояний орбитального движения в центральном поле соответствуют энергиям движения электронов по круговым классическим орбитам с моментами импульса L_n , кратными целому числу постоянных Планка:

$$L_n = m v_n r_n = \hbar n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

Причем орбитальные скорости v_n и радиусы r_n круговых орбит подчиняются классическому условию

$$m v_n^2 / r_n = -dU(r)/dr, \quad (9)$$

где производная $dU(r)/dr$ берется в точке $r = r_n$ и равна силе, действующей на частицу, движущуюся по круговой орбите радиуса r_n в поле $U(r)$.

Круговой орбите радиуса r_n соответствует максимально возможный момент импульса ($l = n$) при данной энергии движения ε_n , которая определяется условием

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= U(r_n) + m v_n^2 / 2 = \\ &= U(r_n) + (r_n / 2) / dU(r)/dr|_{r=r_n}. \end{aligned} \quad (10)$$

Кроме круговых орбит, электроны с той же энергией ε_n могут иметь вытянутые орбиты с меньшими моментами импульса $L_l = \hbar l$ (l – орбитальное квантовое число, $0 < l < n$).

Для кулоновского потенциала притяжения $U(r) = -a/r$ условия (8), (10), как в трехмерном, так и в двумерном случае, приводят к известным [5–6] значениям энергий квантовых состояний (как в атоме водорода):

$$\varepsilon_n = -a/2r_n = -a^2/m\hbar^2 n^2. \quad (11)$$

Однако, как уже отмечалось, расходящийся в нуле кулоновский потенциал мало похож на реальный усредненный потенциал атомной цепочки, который должен быть ограничен в нуле и скорее напоминать геометрический конус:

$$U(r) = -U_0 \exp(-r/R), \text{ или } U = U_0 r/R, \quad r < R, \quad (12)$$

где R – характерный радиус экранирования кулоновского потенциала ядра атома (радиус атома).

Для потенциалов, подобных (12), которые, в отличие от кулоновского, ограничены снизу некоторым минимальным значением, правило Бора–Зоммерфельда (8) следует модифицировать так, чтобы учесть квантовую невозможность состояния покоя, диктуемую принципом неопределенности [4]:

$$L_n = \hbar(n + 1/2), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

ВЫБОР АДЕКВАТНЫХ ПОТЕНЦИАЛА И МЕТОДОВ РАСЧЕТА КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ АКСИАЛЬНО КАНАЛИРОВАННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

Заметим, что для параболического потенциала $U(r) = kr^2/2$ условия (10), (13) приводит к результату, соответствующему точным решениям уравнения Шредингера $\varepsilon_n = n \hbar(k/m)^{1/2}$. Можно надеяться, что применение правил (10), (13) даст адекватные значения и для потенциалов, приближенных к реальному усредненному потенциалу атомных цепочек, вдоль которых движутся каналированные электроны. В частности, для «конусообразного» потенциала (12) условия квантования (10), (13) приводят к трансцендентному уравнению

$$z_n^{3/2} \exp(-z_n/2) = bn; \\ z_n = r_n/R; b = \hbar c(EU_0)^{-1/2}/R, \quad (14)$$

которое для подбарьерных состояний с радиусами орбит $r_n < R$ ($z_n < 1$) имеет простые аналитические решения: $r_n = R(bn)^{2/3}$. Параметр $b = \hbar c(EU_0)^{-1/2}/R$ при релятивистских энергиях электронов всегда мал: $b \ll 1$. Заметим, что число состояний с радиусами орбит $r_n < R$ примерно соответствует числу состояний в плоскостном потенциале той же глубины U_0 : $N \sim (EU_0)^{1/2} R/\hbar c$.

Поперечные энергии ε_n в потенциале (12) для подбарьерных каналированных состояний с радиусами орбит $r_n < R$ определяются выражением, похожим на то, что задает энергии состояний в «треугольном» потенциале при плоскостном каналировании [1]:

$$\varepsilon_n = mv_n^2/2 + U(r_n) = 3\gamma U_0 r_n/2R = \\ = (3/2mc^2)(n\hbar c EU_0/R)^{2/3}. \quad (15)$$

АКСИАЛЬНОЕ КАНАЛИРОВАНИЕ ЧАСТИЦ СВЕРХВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ – «ДВУМЕРНЫЙ РЕЛЯТИВИСТСКИЙ АТОМ»

Успешное применение правила квантования Бора–Зоммерфельда к модельным потенциалам дает надежду, что если модифицировать это правило применительно к релятивистским энергиям поперечного движения, оно даст верную оценку для спектра и числа связанных состояний и в этом случае. Выход за рамки нерелятивистского приближения даже в ССО неизбежен при увеличении энергии электрона E до нескольких гигаэлектрон-вольт, когда поперечные импульсы движущихся в канале частиц достигают релятивистских значений:

$$cp(x) = (2E(\varepsilon_n - U(x))^{1/2} \sim (EU_0)^{1/2} > mc^2. \quad (16)$$

Корректировка правила квантования (10), (13) для релятивистских энергий движения электрона в ССО кажется очевидной – классическое условие устойчивости орбиты радиуса r заменить на вариант, применимый и в релятивистском случае [5]:

$$R = cp_t/|edU/dr| = Rcp_t/\gamma eU_0, \quad (17)$$

где p_t – поперечный импульс электрона в сопутствующей системе отсчета. Далее применяем правило квантования Бора для момента импульса

$$L_n = p_t r_n = \gamma eU_0 r_n^2/Rc = n\hbar, \quad (18)$$

находим радиусы разрешенных орбит,

$$r_n = \sim (n\hbar Rc/\gamma eU_0)^{1/2}, \quad (19)$$

и энергии разрешенных энергетических состояний с квантовыми числами n :

$$\varepsilon_n = cp_n + eU(r_n) = \\ = 2\gamma eU_0 r_n/R = 2(n\hbar c \gamma eU_0/R)^{1/2}. \quad (20)$$

Заметим, что релятивистским энергиям поперечного движения в любом случае соответствуют большие квантовые числа $n \gg 1$, при которых добавка $\hbar/2$ в правиле квантования (18) перестает быть существенной, а расстояния между уровнями энергии при больших n

$$d\varepsilon_n/dn = \sim (\hbar c \gamma eU_0/Rn)^{1/2} \quad (21)$$

убывают быстрее, чем при малых n ($d\varepsilon_n/dn \sim n^{-1/3}$, см. (15)).

Общее число связанных состояний в потенциальном канале при ультрарелятивистских энергиях может достигать

$$N \sim R\gamma eU_0/\hbar c. \quad (22)$$

ВЫВОДЫ И ЗАВЕРШАЮЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Выполненное рассмотрение показывает, что основные характеристики квантовых состояний поперечного движения релятивистских частиц при осевом каналировании также слабо чувствительны к функциональной зависимости усредненного потенциала от поперечных координат, как и при каналировании плоскостном. Точное воспроизведение этой зависимости методами численного усреднения сложных потенциалов атомов и ионов решетки нецелесообразно. Достаточно ограничиться выбором простого, но реалистичного модельного потенциала, например конусообразного. Для выполнения такого расчета также не обязательно использовать сложные точные уравнения квантовой ме-

ханики (релятивистское уравнение Шредингера, решение которого возможно лишь численно или в специальных функциях), но воспользоваться модифицированным приближенным методом квантования Бора, позволяющим сделать аналитический расчет основных характеристик квантовых состояний [7–8]. Этот метод удастся применить и для рассмотрения поперечного движения, выходящего за рамки нерелятивистского приближения.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена в рамках Программы стратегического академического лидерства «ПРИОРИТЕТ – 2030».

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калашиников Н.П., Ольчак А.С. Выбор адекватного потенциала взаимодействия для описания плос-

костного каналирования релятивистских частиц // Вестник НИЯУ «МИФИ», 2024. Т. 13. № 1 [в печати].

2. Калашиников Н.П. Когерентные взаимодействия заряженных частиц в монокристаллах. М.: Атомиздат, 1981. 224 с.

3. Воробьев С.А. Каналирование электронных пучков. М.: Энергоатомиздат, 1984. 96 с.

4. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теоретическая физика. Т. III. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука. ГРФМЛ, 1989. 768 с.

5. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теоретическая физика. Т. II. Теория поля. М.: Наука. ГРФМЛ, 1988. 512 с.

6. Фано У., Фано Л. Физика атомов и молекул. М.: Наука. ГРФМЛ, 1980. 658 с.

7. Калашиников Н.П., Ольчак А.С. Классическое и квантовое описания эффекта каналирования как взаимно дополняющие приближения // Поверхность, рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования, 2022. № 10. С. 107–112.

8. Калашиников Н.П., Ольчак А.С. Классический подход для описания излучения каналированных частиц // Вестник НИЯУ «МИФИ», 2021. Т.10. № 2. С. 97–103.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2024, vol. 13, no. 1, pp. 16–21

SELECTING ADEQUATE CAPACITY AND METHODS CALCULATION OF QUANTUM STATES OF AXIALLY CHanneLED ELECTRONS AT HIGH ENERGIES

N.P. Kalashnikov^{1,*}, A.S. Olchak^{1,**}

¹National Research Nuclear University «MEPhI», Moscow, 115409, Russia

*e-mail: kalash@mephi.ru

**e-mail: asolchak@mephi.ru

Received January 18, 2024; revised January 19, 2024; accepted February 6, 2024

The work examines the movement of relativistic particles (electrons) along close-packed chains of atoms in single crystals (axial channeling). The motion of electrons is considered in the accompanying reference frame (CFR), which itself moves with a speed equal to the longitudinal axis of the channeling and the velocity component of the channeled particle. In SSO, the motion of an axially channeled particle is two-dimensional (flat), and for electrons with energies up to several GeV it will be non-relativistic, as in the hydrogen atom. The quantum characteristics of motion are determined by the energy of the particle (it plays the role of the mass of the electron in a two-dimensional “atom”), as well as by the parameters of the average potential of the atomic chain, which depend on the crystallographic direction and chemical composition of the crystal. Axial channeling can be considered as a unique model of a relativistic two-dimensional atom with controlled parameters. The work shows that the main characteristics of quantum states of transverse motion of particles during axial channeling are weakly sensitive to the functional dependence of the parameters of the average potential on transverse coordinates. To calculate such characteristics, it is convenient to use Bohr’s approximate quantization method, which allows one to obtain the result analytically. The modified Bohr quantization method can be used to calculate the characteristics of transverse motion, which even goes beyond the nonrelativistic approximation even in SSO. In this work, the energy spectra of permissible states of transverse orbital motion are calculated for several variants of model axially symmetric potentials. It is shown that,

ВЫБОР АДЕКВАТНЫХ ПОТЕНЦИАЛА И МЕТОДОВ РАСЧЕТА КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ АКСИАЛЬНО КАНАЛИРОВАННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

despite differences in structure, the average distances between energy levels are slightly insensitive to the choice of potential model. The level energies were found both for the case when a nonrelativistic approximation is applicable to describe the transverse motion in the SSO, and in a situation that goes beyond the nonrelativistic approximation.

Keywords: coherent interaction, channeling, single crystal, accompanying reference frame, electromagnetic radiation, quantum mechanics, gamma radiation.

REFERENCES

1. *Kalashnikov N.P., Ol'chak A.S.* Vybor adekvatnogo potentsiala vzaimodejstviya dlya opisaniya ploskostnogo kanalirovaniya relyativistskih chastic. [Selecting adequate interaction potential to describe planar channeling of relativistic particles]. Vestnik NIYAU «MIFI», 2024. Vol. 13. No. 1 [in the press].
2. *Kalashnikov N.P.* Kogerentnye vzaimodejstviya zaryazhennykh chastic v monokristallakh [Coherent interactions of charged particles in single crystals]. Moscow, Atomizdat Publ., 1981. 224 p.
3. *Vorob'ev S.A.* Kanalirovanie elektronnykh puchkov [Channeling of electron beams]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1984. 96 p.
4. *Landau L.D., Livshic E.M.* Teoreticheskaya fizika. T. III. Kvantovaya mekhanika. Nerelyativistskaya teoriya. [Theoretical physics. vol. III. Quantum mechanics. Non-relativistic theory]. Moscow, Nauka. GRFML Publ., 1989. 768 p.
5. *Landau L.D., Livshic E.M.* Teoreticheskaya fizika. T. II. Teoriya polya. [Theoretical physics. Vol. II. Field theory]. Moscow, Nauka. GRFML Publ., 1988. 512 p.
6. *Fano U., Fano L.* Fizika atomov i molekul. [Physics of atoms and molecules]. Moscow, Nauka. GRFML Publ., 1980. 658 p.
7. *Kalashnikov N.P., Ol'chak A.S.* Klassicheskoe i kvantovoe opisaniya effekta kanalirovaniya kak vzaimno dopolnyayushchie priblizheniya [Classical and quantum descriptions of the channeling effect as mutually complementary approximations]. Poverhnost', rentgenovskie, sinhrotronnye i nejtronnye issledovaniya, 2022. No. 10. Pp. 107–112 (in Russian).
8. *Kalashnikov N.P., Ol'chak A.S.* Klassicheskij podhod dlya opisaniya izlucheniya kanalirovannykh chastic [Classical approach to describe the radiation of channeled particles]. Vestnik NIYAU MIFI, 2021. Vol. 10. No. 2. Pp. 97–103 (in Russian).