ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ», 2024, т. 13, № 2, с. 66–75

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 517.9

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ С ПОМОЩЬЮ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ БОЛЕЕ ПРОСТЫХ УРАВНЕНИЙ

А.Д. Полянин

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия

e-mail: polyanin ipmnet.ru

Поступила в редакцию: 24.01.2024
После доработки: 24.01.2024
Принята к публикации: 06.02.2024

Разработан метод построения точных решений нелинейных уравнений математической физики неавтономного вида, коэффициенты которых зависят от времени, путем использования решений с обобщенным или функциональным разделением переменных более простых уравнений математической физики автономного вида, коэффициенты которых не зависят от времени. Рассмотрены конкретные примеры построения точных решений нелинейных уравнений математической физики, коэффициенты которых произвольным образом зависят от времени. Показано, что решения с обобщенным и функциональным разделением переменных нелинейных уравнений математической физики с постоянным запаздыванием можно использовать для построения точных решений более сложных нелинейных уравнений математической физики с переменным запаздыванием общего вида. Описан ряд нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с переменным запаздыванием, которые допускают точные решения с обобщенным разделением переменных.

Ключевые слова: нелинейные уравнения математической физики, уравнения в частных производных с запаздыванием, методы решения, точные решения, решения с обобщенным разделением переменных, решения с функциональным разделением переменных.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.318

EDN JGRBCV

ВВЕДЕНИЕ. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Точные решения уравнений математической физики играют важную роль для анализа качественных особенностей многих явлений и процессов в различных областях естествознания. Они наглядно демонстрируют и позволяют лучше понять механизмы таких сложных нелинейных эффектов, как пространственная локализация процессов переноса, множественность или отсутствие стационарных состояний при определенных условиях, существование режимов с обострением, возможная негладкость или разрывность искомых величин и др. Простые решения линейных и нелинейных дифференциальных уравнений широко используются для иллюстрации теоретического материала и некоторых приложений в учебных курсах университетов и технических вузов (по прикладной математике, теоретической физике, теории тепло- и массопереноса, гидродинамике, газовой динамике, теории волн, нелинейной оптике и др.).

Точные решения уравнений играют важную роль стандартных математических эталонов, которые могут быть использованы в качестве тестовых задач для оценки точности различных численных и приближенных аналитических методов. Они необходимы также для разработки и совершенствования соответствующих разделов компьютерных программ, предназначенных для аналитических вычислений (системы компьютерной алгебры Mathematica, Maple и др.).

Под точными решениями нелинейных уравнений математической физики обычно понимаются решения, которые выражаются [1, 2]:

(i) через элементарные функции или в виде квадратур (т.е. с помощью элементарных функций и неопределенных интегралов);

(ii) через решения обыкновенных дифференциальных уравнений (далее – ОДУ) или систем таких уравнений.

Для более сложных уравнений математической физики с запаздыванием к точным решениям из пп. (i) и (ii) надо добавить решения, которые выражаются через решения ОДУ с запаздыванием или систем ОДУ с запаздыванием [3].

Наиболее распространенные методы построения точных решений нелинейных уравнений математической физики излагаются в [1, 4–15] (о методах построения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием см. [3, 16]).

В данной работе будут описаны новые методы построения точных решений сложных нелинейных уравнений математической физики (в том числе и уравнений с запаздыванием), основанные на использовании решений с обобщенным или функциональным разделением переменных более простых уравнений математической физики. Эти методы базируются на принципе структурной аналогии решений, который формулируется следующим образом: *точные решения более простых уравнений могут служить основой для построения решений более сложных родственных уравнений.*

ОБЩИЕ ФОРМУЛИРОВКИ РАССМАТРИВАЕМЫХ ПРОБЛЕМ

Приведем общие формулировки двух важных проблем, которые обсуждаются в данной статье.

Проблема 1. Пусть известно точное решение $u = u(x, t)$ некоторого нелинейного уравнения математической физики, зависящего от свободных параметров $a_1, ..., a_p$. Возникает вопрос: в каких случаях можно что-либо сказать о точных решениях более сложного уравнения математической физики, полученного из исходного путем замены свободных параметров на произвольные функции $a_1(t), ..., a_p(t)$?

В следующем разделе будет показано, каким образом точные решения с обобщенным или функциональным разделением переменных нелинейных уравнений математической физики автономного вида, коэффициенты которых не зависят от времени, можно использовать для построения точных решений более общих нелинейных уравнений математической физики неавтономного вида, коэффициенты которых произвольным образом зависят от времени t.

Проблема 2. Пусть известно точное решение $u = u(x, t)$ некоторого нелинейного уравнения математической физики с постоянным запаздыванием τ. Возникает вопрос: в каких случаях можно что-либо сказать о точных решениях более сложного уравнения математической физики, полученного из исходного путем замены постоянного запаздывания τ на произвольное переменное запаздывание $\tau(t)$?

В предпоследнем разделе будет показано, каким образом точные решения с обобщенным или функциональным разделением переменных нелинейных уравнений математической физики с постоянным запаздыванием можно использовать для построения точных решений более сложных нелинейных уравнений математической физики с переменным запаздыванием общего вида.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕШЕНИЙ АВТОНОМНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ УРАВНЕНИЙ

Покажем, каким образом для построения точных решений уравнений математической физики неавтономного вида, коэффициенты которых зависят от времени t, можно использовать решения родственных более простых уравнений математической физики автономного вида, коэффициенты которых не зависят от времени. Используя принцип «от простого к сложному», последовательность и логику рассуждений в подобных случаях продемонстрируем на нескольких конкретных примерах, после анализа которых сформулируем общие выводы в виде утверждений.

Пример 1. Рассмотрим нелинейное уравнение реакционно-диффузионного типа

$$u_t = a_1 u u_{xx} + a_2, \qquad (1)$$

где a_1 и a_2 – свободные параметры. Уравнение (1) допускает точное решение с обобщенным разделением переменных, квадратичное по пространственной переменной

$$u = \psi_1(t) x^2 + \psi_2(t), \qquad (2)$$

где функции $\psi_1 = \psi_1(t)$ и $\psi_2 = \psi_2(t)$ удовлетворяют нелинейной системе ОДУ:

$$\psi_1' = 2a_1\psi_1^2, \quad \psi_2' = 2a_1\psi_1\psi_2 + a_2. \qquad (3)$$

Здесь и далее штрихи обозначают производные по t. Система (3) легко интегрируется, однако это нам далее не понадобится.

Заменив теперь формально в уравнении (1) параметры a_1 и a_2 на произвольные функции $a_1(t)$ и $a_2(t)$, получим

$$u_t = a_1(t) u u_{xx} + a_2(t). \qquad (4)$$

Легко проверить, что уравнение (4) также допускает точное решение вида (2), где функции $\psi_1 = \psi_1(t)$ и $\psi_2 = \psi_2(t)$ удовлетворяют нелинейной системе ОДУ (3), в которой параметры a_1 и a_2 надо соответственно заменить на произвольные функции $a_1(t)$ и $a_2(t)$.

Рассмотренный иллюстративный пример позволяет сделать простое обобщение, которое можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Утверждение 1. Пусть автономное нелинейное уравнение с частными производными

$$u_t = F(x, u, u_x, \ldots, u_x^{(n)};\ a_1, \ldots, a_p), \qquad (5)$$

зависящее от свободных параметров $a_1, \ldots, a_p$, имеет решение с обобщенным разделением переменных в виде полинома по пространственной переменной x:

$$u = \sum_{k=0}^{m} \psi_k(t) x^k. \qquad (6)$$

Тогда более сложное неавтономное уравнение с частными производными

$$u_t = F(x, u, u_x, \ldots, u_x^{(n)};\ \ a_1(t), \ldots, a_p(t)), \qquad (7)$$

которое получено из уравнения (5) формальной заменой параметров $a_1, \ldots, a_p$ на произвольные функции $a_1(t), \ldots, a_p(t)$, также допускает точное решение вида (6) с другими функциями $\psi_k(t)$.

Утверждение 1 является частным случаем сформулированного далее более общего утверждения 2.

Пример 2. Рассмотрим другое нелинейное уравнение реакционно-диффузионного типа

$$u_t = a_1 u_{xx} + u_x^2 + bu^2 + a_2 \quad (b > 0), \qquad (8)$$

где a_1, a_2, b – свободные параметры. Уравнение (8) допускает точное решение с обобщенным разделением переменных, содержащее тригонометрическую функцию x, вида

$$u = \psi_1(t)\cos(\sqrt{b}x) + \psi_2(t), \qquad (9)$$

где функции $\psi_1 = \psi_1(t)$ и $\psi_2 = \psi_2(t)$ удовлетворяют нелинейной системе ОДУ:

$$\begin{aligned} \psi_1' &= 2b\psi_1\psi_2 - a_1 b\psi_1, \\ \psi_2' &= b(\psi_1^2 + \psi_2^2) + a_2. \end{aligned} \qquad (10)$$

Заменив формально в уравнении (8) параметры a_1 и a_2 на произвольные функции $a_1(t)$ и $a_2(t)$, получим

$$u_t = a_1(t) u_{xx} + u_x^2 + bu^2 + a_2(t) \quad (b > 0). \qquad (11)$$

Легко проверить, что уравнение (11) также допускает точное решение вида (9), где функции $\psi_1 = \psi_1(t)$ и $\psi_2 = \psi_2(t)$ удовлетворяют нелинейной системе ОДУ (10), в которой параметры a_1 и a_2 надо заменить на произвольные функции $a_1(t)$ и $a_2(t)$.

Попытка аналогичным образом заменить константу b в уравнении (8) на произвольную функцию $b(t)$ отказывается безуспешной, поскольку в этом случае функция (9) при $b = b(t)$ уже не будет являться точным решением такого модифицированного уравнения. Это произошло потому, что координатная функция $\varphi(x) = \cos(\sqrt{b}x)$ в решении (9) явным образом зависит от параметра b.

Рассмотренный пример позволяет сделать достаточно очевидное обобщение, которое сформулируем в виде следующего утверждения.

Утверждение 2. Пусть автономное нелинейное уравнение с частными производными (5), зависящее от свободных параметров $a_1, \ldots, a_p$, имеет решение с обобщенным разделением переменных вида

$$u = \sum_{k=1}^{m} \psi_k(t)\, \varphi_k(x), \qquad (12)$$

в котором все линейно независимые координатные функции $\varphi_k(x)$ не зависят от параметров $a_1, \ldots, a_p$, а функции $\psi_k = \psi_k(t)$ описываются автономной системой ОДУ:

$$\begin{gathered} \psi_k' = f_k(\psi_1, \ldots, \psi_m;\ a_1, \ldots, a_p), \\ k = 1, \ldots, m. \end{gathered} \qquad (13)$$

Тогда более сложное неавтономное уравнение с частными производными (7), которое получено из уравнения (5) формальной заменой параметров $a_1, \ldots, a_k$ на произвольные функции $a_1(t), \ldots, a_p(t)$, допускает точное решение вида (12), где координатные функции $\varphi_k(x)$ не меняются, а функции $\psi_k = \psi_k(t)$ описываются неавтономной системой ОДУ:

$$\psi'_k = f_k(\psi_1, ..., \psi_m;\ a_1(t), ..., a_p(t)),\quad k = 1, ..., m. \tag{14}$$

Это утверждение можно доказать, используя результаты [11] (см. также [1, 13]). Действительно, подставим (12) в автономное уравнение (5), а затем исключим производные по времени с помощью ОДУ (13). Заменив далее функции $\psi_k(t)$ на произвольные константы C_k, получим

$$F\left[\sum_{k=1}^{m} C_k \varphi_k(x)\right] = \sum_{k=1}^{m} f_k(C_1, ..., C_m;\ a_1, ..., a_p)\varphi_k(x), \tag{15}$$

где через $F[u]$ обозначена правая часть уравнения (5). Соотношения (15) означают (см. [1, 11), что конечномерное линейное подпространство

$$L_m = \{\varphi_1(x), ..., \varphi_m(x)\}, \tag{16}$$

элементами которого являются всевозможные линейные комбинации координатных функций $\varphi_1(x), ..., \varphi_m(x)$, входящих в решение (12), инвариантно относительно нелинейного дифференциального оператора по пространственной переменной x, стоящего в правой части автономного уравнения (5). Нелинейный дифференциальный оператор в правой части более сложного неавтономного уравнения с частными производными (7), полученного из уравнения (5) формальной заменой параметров $a_1, ..., a_k$ на произвольные функции $a_1(t), ..., a_p(t)$, параметрически зависит от времени t (содержит производные только по переменной x). Поэтому при подстановке выражения (12) в правую часть уравнения (7), функции $a_1(t), ..., a_p(t)$ ведут себя как константы [1], что в итоге и приводит неавтономной системе ОДУ (14) для функций $\psi_k = \psi_k(t)$.

Замечание 1. В левой части нелинейных уравнений (5) и (7) вместо первой производной u_t может стоять вторая производная u_{tt} или любая линейная комбинация производных по t вида $L[u] = \sum_{i=1}^{s} c_i(t) u_t^{(i)}$. В этом случае в левой части ОДУ (13) и (14) в утверждении 2 вместо первых производных ψ'_k должны стоять вторые производные ψ''_k или выражения $L[\psi_k]$.

Утверждение 2 допускает упрощенную более краткую (но менее информативную) формулировку, которая приведена ниже.

Утверждение 2а. Пусть автономное уравнение с частными производными (5), зависящее от свободных параметров $a_1, ..., a_p$, имеет решение (12), в котором линейно независимые координатные функции $\varphi_k(x)$ не зависят от параметров $a_1, ..., a_p$. Тогда более сложное неавтономное уравнение с частными производными (7), полученное из уравнения (5) формальной заменой параметров $a_1, ..., a_k$ на произвольные функции $a_1(t), ..., a_p(t)$, также допускает точное решение вида (12), в котором координатные функции $\varphi_k(x)$ не меняются, а функции $\psi_k = \psi_k(t)$ описываются подходящей системой ОДУ.

Утверждения 1 и 2 можно обобщить также на случай нелинейных уравнений математической физики, которые допускают более сложные точные решения с функциональным разделением переменных. Проиллюстрируем сказанное на конкретном примере.

Пример 3. Рассмотрим уравнение реакционно-диффузионного типа с логарифмической нелинейностью

$$u_t = a_1 u_{xx} + a_2 u \ln u, \tag{17}$$

где a_1 и a_2 – свободные параметры.

Уравнение (17) допускает точное решение с функциональным разделением переменных вида [1, 11]:

$$u = \exp[\psi_1(t)x^2 + \psi_2(t)x + \psi_3(t)], \tag{18}$$

где функции $\psi_n = \psi_n(t)$ (n = 1, 2, 3) удовлетворяют нелинейной системе ОДУ:

$$\begin{aligned} \psi'_1 &= 4a_1\psi_1^2 + a_2\psi_1, \\ \psi'_2 &= 4a_1\psi_1\psi_2 + a_2\psi_2, \\ \psi'_3 &= a_2\psi_3 + 2a_1\psi_1 + a_1\psi_2^2. \end{aligned} \tag{19}$$

Заменив теперь формально в уравнении (17) параметры a_1 и a_2 на произвольные функции $a_1(t)$ и $a_2(t)$, получим более сложное уравнение

$$u_t = a_1(t)u_{xx} + a_2(t)u\ln u \qquad (20)$$

Легко проверить, что уравнение (20) также допускает точное решение вида (18), где функции $\psi_n = \psi_n(t)$ (n = 1, 2, 3) удовлетворяют нелинейной системе ОДУ (19), в которой параметры a_1 и a_2 надо соответственно заменить на произвольные функции $a_1(t)$ и $a_2(t)$.

Рассмотренный иллюстративный пример позволяет сделать простое обобщение, приведенное ниже.

Утверждение 3. Пусть автономное нелинейное уравнение с частными производными (5), зависящее от свободных параметров $a_1, ..., a_p$, имеет решение с функциональным разделением переменных вида

$$u = U(z), \quad z = \sum_{k=0}^{m} \psi_k(t)x^k, \qquad (21)$$

где $U(z)$ – некоторая функция, не зависящая от параметров $a_1, ..., a_p$. Тогда более сложное неавтономное уравнение с частными производными (7), которое получено из уравнения (5) формальной заменой параметров $a_1, ..., a_p$ на произвольные функции $a_1(t), ..., a_p(t)$, также допускает точное решение вида (21) с той же самой функцией $U(z)$, но с другими функциями $\psi_k(t)$.

Данное утверждение доказывается путем перехода к новой переменной z в уравнениях (5) и (7) с использованием подстановки $u = U(z)$, после чего преобразованные уравнения будут иметь решения с обобщенным разделением переменных, к которым применимо утверждение 1.

Утверждение 3 допускает дальнейшее обобщение, описанное ниже.

Утверждение 4. Пусть автономное нелинейное уравнение с частными производными (5), зависящее от свободных параметров $a_1(t), ..., a_p(t)$, имеет решение с функциональным разделением переменных вида

$$u(x,t) = U(z), \quad \text{где} \quad z = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(x)\psi_k(t), \qquad (22)$$

в котором все координатные функции $\varphi_k(x)$ и внешняя функция $U(z)$ не зависят от параметров $a_1, ..., a_p$, а функции $\psi_k = \psi_k(t)$ описываются автономной системой ОДУ (13). Тогда более сложное неавтономное уравнение с частными производными (7), которое получено из уравнения (5) формальной заменой параметров $a_1, ..., a_p$ на произвольные функции $a_1(t)$, …, $a_p(t)$, допускает точное решение вида (22), где координатные функции $\varphi_k(x)$ и функция $U(z)$ не меняются, а функции $\psi_k = \psi_k(t)$ описываются неавтономной системой ОДУ (14).

Утверждение 4 доказывается путем перехода к новой переменной z в уравнениях (5) и (7) с использованием подстановки $u = U(z)$, после чего преобразованные уравнения будут иметь решения с обобщенным разделением переменных, к которым применимо утверждение 2.

Утверждение 4 допускает упрощенную более краткую (но менее информативную) формулировку, которая приведена ниже.

Утверждение 4а. Пусть автономное уравнение с частными производными (5), зависящее от свободных параметров $a_1, ..., a_p$, имеет решение с функциональным разделением переменных (22), в котором координатные функции $\varphi_k(x)$ и внешняя функция $U(z)$ не зависят от параметров $a_1, ..., a_p$. Тогда более сложное неавтономное уравнение (7), полученное из уравнения (5) формальной заменой параметров $a_1, ..., a_p$ на произвольные функции $a_1(t), ..., a_p(t)$, также допускает точное решение вида (22), в котором координатные функции $\varphi_k(x)$ и функция $U(z)$ не меняются, а функции $\psi_k = \psi_k(t)$ описываются подходящей системой ОДУ.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Покажем, каким образом для построения точных решений уравнений математической физики с переменным запаздыванием общего вида можно использовать решения родственных более простых уравнений математической физики с постоянным запаздыванием. Последовательность и логику полезных предварительных рассуждений в подобных случаях продемонстрируем на двух конкретных примерах, после анализа которых сформулируем общие выводы в виде утверждений.

Пример 4. Рассмотрим реакционно-диффузионное уравнение с квадратичной нелинейностью и постоянным запаздыванием

$$u_t = a(uu_x)_x + b\bar{u}, \quad \bar{u} = u(x, t-\tau), \tag{23}$$

где τ = const > 0, которое допускает решение с обобщенным разделением переменных

$$u = \psi_1(t)x^2 + \psi_2(t), \tag{24}$$

где функции $\psi_1 = \psi_1(t)$, $\psi_2 = \psi_2(t)$ удовлетворяют нелинейной системе ОДУ с постоянным запаздыванием:

$$\begin{gathered} \psi_1' = 6a\psi_1^2 + b\bar{\psi}_1, \quad \bar{\psi}_1 = \psi_1(t-\tau), \\ \psi_2' = 2a\psi_1\psi_2 + b\bar{\psi}_2, \quad \bar{\psi}_2 = \psi_2(t-\tau). \end{gathered} \tag{25}$$

Заменив в (23) постоянную $\tau > 0$ на произвольную положительную функцию времени $\tau(t)$, получим более сложное нелинейное уравнение реакционно-диффузионного типа с квадратичной нелинейностью и переменным запаздыванием

$$u_t = a(uu_x)_x + b\bar{u}, \quad \bar{u} = u(x,t-\tau(t)). \tag{26}$$

Поскольку содержащий производные по x нелинейный член в правых частях уравнений (23) и (26) одинаков, естественно предположить, что степенная структура решений по пространственной переменной обоих уравнений также будет одинаковой, а изменятся только зависящие от t функциональные множители при различных степенях x.

Другими словами, ищем точные решения реакционно-диффузионного уравнения с переменным запаздыванием (26) в той же форме (24), что и решения исходного уравнения с постоянным запаздыванием (23). В итоге, для функций $\psi_1 = \psi_1(t)$, $\psi_2 = \psi_2(t)$ получим систему ОДУ (25), в которой τ надо заменить на $\tau(t)$.

Результаты, описанные в данном примере, допускают обобщение, сформулированное ниже.

Утверждение 5. Пусть нелинейное уравнение математической физики с постоянным запаздыванием

$$\begin{gathered} u_t = F\left(x, u, u_x, ..., u_x^{(n)};\ \bar{u}, \bar{u}_x, ..., \bar{u}_x^{(p)}\right), \\ \bar{u} = u(x, t-\tau), \end{gathered} \tag{27}$$

где $n > p$, имеет решение с обобщенным разделением переменных

$$u = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(x)\psi_k(t), \tag{28}$$

в котором линейно независимые координатные функции $\varphi_k(x)$ не зависят от τ, а функции $\psi_k = \psi_k(t)$ описываются системой ОДУ с постоянным запаздыванием:

$$\begin{gathered} \psi_k' = f_k(\psi_1, ..., \psi_m; \bar{\psi}_1, ..., \bar{\psi}_m), \\ \bar{\psi}_k = \psi_k(t-\tau), \quad k = 1, ..., m. \end{gathered} \tag{29}$$

Тогда более сложное уравнение с переменным запаздыванием

$$\begin{gathered} u_t = F(x, u, u_x, ..., u_x^{(n)}; \bar{u}, \bar{u}_x, ..., \bar{u}_x^{(p)}), \\ \bar{u} = u(x, t-\tau(t)), \end{gathered} \tag{30}$$

которое получено из уравнения (27) формальной заменой постоянной τ на произвольную функцию времени τ (t), также допускает точное решение вида (28), где координатные функции $\varphi_k(x)$ не меняются, а функции $\psi_k = \psi_k(t)$ описываются системой ОДУ с переменным запаздыванием:

$$\begin{gathered} \psi_k' = f_k(\psi_1, ..., \psi_m; \bar{\psi}_1, ..., \bar{\psi}_m), \\ \bar{\psi}_k = \psi_k(t-\tau(t)), \ k = 1, ..., m. \end{gathered} \tag{31}$$

Доказательство утверждения 5 проводится аналогично доказательству утверждения 2.

Замечание 2. В левой части уравнений (27) вместо первой производной u_t может стоять любая линейная комбинация производных по t вида $L[u] = \sum_{i=1}^{s} a_i u_t^{(i)}$, причем коэффициенты a_i произвольным образом могут зависеть от времени, $a_i = a_i(t)$. В этом случае в левой части ОДУ (29) и (31) в утверждении 5 вместо первых производных ψ_k' должны стоять выражения $L[\psi_k]$.

Утверждение 5 можно обобщить на случай нелинейных уравнений математической физики с запаздыванием, которые допускают более сложные точные решения с функциональным разделением переменных. Проиллюстрируем сказанное на конкретном примере.

Пример 5. Рассмотрим уравнение реакционно-диффузионного типа с двойной логарифмической нелинейностью и постоянным запаздыванием

$$u_t = u_{xx} + u(a \ln^2 u + b \ln \bar{u}),\quad \bar{u} = u(x, t-\tau), \tag{32}$$

которое при $a > 0$ допускает точное решение с функциональным разделением переменных вида [17]:

$$u = \exp[\psi_1(t)\varphi(x) + \psi_2(t)],\quad \varphi(x) = C_1 \cos(\sqrt{a}x) + C_2 \sin(\sqrt{a}x), \tag{33}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, а функции $\psi_1 = \psi_1(t)$ и $\psi_2 = \psi_2(t)$ удовлетворяют нелинейной системе ОДУ с постоянным запаздыванием:

$$\begin{gathered} \psi_1' = 2a\psi_1\psi_2 - a\psi_1 + b\bar{\psi}_1, \\ \bar{\psi}_1 = \psi_1(t-\tau), \\ \psi_2' = a(C_1^2 + C_2^2)\psi_1^2 + a\psi_2^2 + b\bar{\psi}_2, \\ \bar{\psi}_2 = \psi_2(t-\tau). \end{gathered} \tag{34}$$

Заменив теперь формально в уравнении (32) постоянную τ на произвольную функцию $\tau(t)$, получим более сложное уравнение

$$u_t = u_{xx} + u(a \ln^2 u + b \ln \bar{u}),\quad \bar{u} = u(x, t-\tau(t)). \tag{35}$$

Легко проверить, что уравнение (35) также допускает точное решение вида (33), где функции $\psi_1 = \psi_1(t)$ и $\psi_2 = \psi_2(t)$ удовлетворяют нелинейной системе ОДУ (34), в которой постоянную τ надо заменить на произвольную функцию $\tau(t)$.

Рассмотренный иллюстративный пример позволяет сделать обобщение, которое сформулируем в виде утверждения.

Утверждение 6. Пусть нелинейное уравнение с постоянным запаздыванием (27) имеет решение с функциональным разделением переменных вида

$$u(x, t) = U(z),$$

где

$$z = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(x)\psi_k(t),$$

в котором линейно независимые координатные функции $\varphi_k(x)$ и внешняя функция $U(z)$ не зависят от параметра τ, а функции $\psi_k = \psi_k(t)$ описываются системой ОДУ с постоянным запаздыванием (29). Тогда более сложное уравнение с переменным запаздыванием (30), которое получено из уравнения (27) формальной заменой постоянной τ на произвольную функцию времени $\tau(t)$, допускает точное решение вида (28), где координатные функции $\varphi_k(x)$ и функция $U(z)$ не меняются, а функции $\psi_k = \psi_k(t)$ описываются системой ОДУ с переменным запаздыванием (31).

В табл. 1 приведены некоторые нелинейные реакционно-диффузионные уравнения с переменным запаздыванием, допускающие точные решения с обобщенным и функциональным разделением переменных (использовались результаты, приведенные в [3]. Считается, что $\tau = \tau(t)$ произвольная положительная непрерывно дифференцируемая функция (в частности, в случае пропорционального запаздывания в уравнениях следует положить $\tau = (1 - p)t$, т. е. $\tau - t = pt$, где $0 < p < 1$). Отметим, что решения с функциональным разделением переменных двух последних уравнений в табл. 1 представлены в неявной форме.

КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Обнаружено, что точные решения с обобщенным и функциональным разделением переменных нелинейных уравнений математической физики автономного вида, коэффициенты которых не зависят от времени t, можно использовать для построения точных решений более общих нелинейных уравнений неавтономного вида, коэффициенты которых произвольным образом зависят от времени. Приведены примеры точных решений нелинейных неавтономных уравнений математической физики. Показано, что точные решения с обобщенным или функциональным разделением переменных нелинейных уравнений математической физики с постоянным запаздыванием позволяют находить точные решения более сложных нелинейных уравнений математической физики с переменным запаздыванием общего вида. Описаны некоторые нелинейные реакционно-диффузионные уравнения с переменным запаздыванием, допускающие точные решения с обобщенным разделением переменных.

Таблица 1. Реакционно-диффузионные уравнения с переменным запаздыванием общего вида, допускающие решения с обобщенным функциональным разделением переменных

Исходное уравнение	Вид решений	Определяющее уравнение
$u_t = au_{xx} + uf(\bar{u}/u)$	$u = [C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)]\psi(t)$; $u = [C_1\exp(-\beta x) + C_2\exp(\beta x)]\psi(t)$; $u = (C_1 x + C_2)\psi(t)$	$\psi'_t = -a\beta^2\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi)$; $\psi'_t = a\beta^2\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi)$; $\psi'_t = \psi f(\bar{\psi}/\psi)$
$u_t = au_{xx} + bu\ln u +$ $+ uf(\bar{u}/u)$	$u = \varphi(x)\psi(t)$	$a\varphi''_{xx} = C_1\varphi - b\varphi\ln\varphi$, $\psi'_t = C_1\psi + b\psi\ln\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi)$
$u_t = au_{xx} + f(u - \bar{u})$	$u = C_2 x^2 + C_1 x + \psi(t)$	$\psi'_t = 2C_2 a + f(\psi - \bar{\psi})$
$u_t = au_{xx} + bu + f(u - \bar{u})$	$u = C_1\cos(\lambda x) + C_2\sin(\lambda x) + \psi(t)$, где $\lambda = \sqrt{b/a}$ (при $ab > 0$); $u = C_1\exp(-\lambda x) + C_2\exp(\lambda x) + \psi(t)$, где $\lambda = \sqrt{-b/a}$ (при $ab < 0$)	$\psi'_t = b\psi + f(\psi - \bar{\psi})$; $\psi'_t = b\psi + f(\psi - \bar{\psi})$
$u_t = a(u^k u_x)_x + uf(\bar{u}/u)$	$u = \varphi(x)\psi(t)$	$a(\varphi^k\varphi'_x)'_x = C_1\varphi$, $\psi'_t = C_1\psi^{k+1} + \psi f(\bar{\psi}/\psi)$
$u_t = a(u^k u_x)_x +$ $+ bu^{k+1} + uf(\bar{u}/u)$	$u = \left[C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)\right]^{\frac{1}{k+1}}\psi(t)$, где $\beta = \sqrt{b(k+1)/a}$, $b(k+1) > 0$; $u = (C_1 e^{-\beta x} + C_2 e^{\beta x})^{\frac{1}{k+1}}\psi(t)$, где $\beta = \sqrt{-b(k+1)/a}$, $b(k+1) < 0$; $u = C_1\exp\left(-\dfrac{b}{2a}x^2 + C_2 x\right)\psi(t)$, при $k = -1$; $u = \varphi(x)\psi(t)$ (обобщает предыдущие решения)	$\psi'_t = \psi f(\bar{\psi}/\psi)$; $\psi'_t = \psi f(\bar{\psi}/\psi)$; $\psi'_t = \psi f(\bar{\psi}/\psi)$; $a(\varphi^k\varphi''_x)'_x + b\varphi^{k+1} = C_1\varphi$, $\psi'_t = C_1\psi^{k+1} + \psi f(\bar{\psi}/\psi)$
$u_t = a(e^{\lambda u}u_x)_x + f(u - \bar{u})$	$u = \dfrac{1}{\lambda}\ln(C_1\lambda x^2 + C_2 x + C_3) + \psi(t)$	$\psi'_t = 2aC_1 e^{\lambda\varphi} + f(\psi - \bar{\psi})$
$u_t = a(e^{\lambda u}u_x)_x +$ $+ be^{\lambda u} + f(u - \bar{u})$	$u = \dfrac{1}{\lambda}\ln[C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)] + \psi(t)$, где $\beta = \sqrt{b\lambda/a}$, $b\lambda > 0$; $u = \dfrac{1}{\lambda}\ln(C_1 e^{-\beta x} + C_2 e^{\beta x}) + \psi(t)$, где $\beta = \sqrt{-b\lambda/a}$, $b\lambda < 0$; $u = \varphi(x) + \psi(t)$ (обобщает предыдущие решения)	$\psi'_t = f(\psi - \bar{\psi})$; $\psi'_t = f(\psi - \bar{\psi})$; $a(e^{\lambda\varphi}\varphi'_x)'_x + be^{\lambda\varphi} = C_1$, $\psi'_t = C_1 e^{\lambda\psi} + f(\psi - \bar{\psi})$
$u_t = [(a\ln u + b)u_x]_x -$ $-cu\ln u + uf(u/\bar{u})$	$u = \exp(\pm\lambda x)\psi(t)$, $\lambda = \sqrt{c/a}$	$\psi'_t = \lambda^2(a + b)\psi + \psi f(\bar{\psi}/\psi)$

$u_t = a[f'(u)u_x]_x + b + \dfrac{1}{f'(u)} g(f(u) - f(\bar{u}))$	$f(u) = \psi(t) - \dfrac{b}{2a}x^2 + C_1 x + C_2$	$\psi'_t = g(\psi - \bar{\psi})$
$u_t = a[uf'(u)u_x]_x + \dfrac{1}{f'(u)}[bf(u) + cf(\bar{u})]$	$f(u) = \varphi(t)x + \psi(t)$	$\varphi'_t = b\varphi + c\bar{\varphi}$, $\psi'_t = b\psi + c\bar{\psi} + a\varphi^2$

Обозначения: $\bar{u} = u(x, t - \tau(t))$, $\bar{\psi} = \psi(t - \tau(t))$, $f(z)$ и $g(z)$ – произвольные функции; C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500440-9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear PDEs. Boca Raton-London: CRC Press, 2022.

2. *Полянин А.Д.* Преобразования, редукции и точные решения одного сильно нелинейного уравнения электронной магнитной гидродинамики // Вестник НИЯУ МИФИ, 2023. Т. 12. № 4. С. 201–210.

3. *Polyanin A.D., Sorokin V.G., Zhurov A.I.* Delay Ordinary and Partial Differential Equations. Boca Raton: CRC Press, 2023.

4. *Calogero F., Degasperis A*. Spectral Transform and Solitons: Tolls to Solve and Investigate Nonlinear Evolution Equations. Amsterdam: North Holland, 1982.

5. *Ovsiannikov L.V.* Group Analysis of Differential Equations. New York: Academic Press, 1982.

6. *Bluman G.W., Kumei S.* Symmetries and Differential Equations. New York: Springer, 1989.

7. *Ibragimov N.H. (ed.).* CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. V. 1, Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws. Boca Raton: CRC Press, 1994.

8. *Olver P.J.* Application of Lie Groups to Differential Equations, 2nd ed. NewYork: Springer-Verlag, 2000.

9. *Kudryashov N.A*. Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations // Chaos, Solitons and Fractals. 2005. V. 24. № 5. Pp. 1217–1231.

10. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005.

11. *Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R.* Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics. Chapman & Hall / CRCPress, Boca Raton, 2007.

12. *Кудряшов Н.А.* Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Изд. Дом «Интеллект», 2010.

13. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.

14. *Conte R., Musette M.* The Painleve Handbook. 2nd ed. Cham: Springer, 2020.

15. *Аксенов А.В., Полянин А.Д.* Обзор методов построения точных решений уравнений математической физики, основанных на использовании более простых решений // Теоретическая и математическая физика, 2022. Т. 211. № 2. С. 567–594.

16. *Sorokin V.G., Vyazmin A.V.* Nonlinear reaction-diffusion equations with delay: Partial survey, exact solutions, test problems, and numerical integration // Mathematics, 2022. V. 10. № 11. 1886.

17. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Exact solutions of linear and non-linear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time // International Journal of Non-Linear Mechanics, 2013. V. 54. Pp. 115–126

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2024, vol. 13, no. 2, pp. 66–75

CONSTRUTING SOLUTIONS TO NONLINEAR EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS USING EXACT SOLUTIONS TO SIMPLER EQUATIONS

A.D. Polyanin
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences,Moscow, 119526 Russia
**e-mail: polyanin@ipmnet.ru*
Received January 24, 2024; revised January 24, 2024; accepted February 06, 2024

A method has been developed for constructing exact solutions of complex nonautonomous nonlinear equations of mathematical physics, the coefficients of which explicitly depend on time, by using solutions with generalized or functional separation of variables of simpler autonomous equations of mathematical physics, the coefficients of which do not depend on time. Specific examples of constructing exact solutions of nonlinear equations of mathematical physics, the coefficients of which depend arbitrarily on time, are considered. It is shown that solutions with generalized and functional separation of variables of nonlinear equations of mathematical physics with constant delay can be used to construct exact solutions of more complex nonlinear equations of mathematical physics with variable delay of a general form. A number of nonlinear reaction-diffusion equations with variable delay are described, which allow exact solutions with generalized separation of variables.

Keywords: nonlinear equations of mathematical physics, partial differential equations with delay, solution methods, exact solutions, generalized separable solutions, functional separable solutions.

REFERENCES

1. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear PDEs. Boca Raton–London, CRC Press, 2022.
2. *Polyanin A.D.* Preobrazovaniya, redukcii i tochnye resheniya odnogo sil'no nelinejnogo uravneniya elektronnoj magnitnoj gidrodinamiki [Transformations, reductions and exact solutions of a highly nonlinear equation of electron magnetohydrodynamics]. Vestnik NIYaU MIFI, 2023. Vol. 12. No. 4. Pp. 201–210 (in Russian).
3. *Polyanin A.D., Sorokin A.D., Zhurov A.I.* Delay Ordinary and Partial Differential Equations. Boca Raton-London, CRC Press, 2023.
4. *Calogero F., Degasperis A.* Spectral Transform and Solitons: Tolls to Solve and Investigate Nonlinear Evolution Equations. North Holland, Amsterdam, 1982.
5. *Ovsiannikov L.V.* Group Analysis of Differential Equations. NewYork, Academic Press, 1982.
6. *Bluman G.W., Kumei S.* Symmetries and Differential Equations. Springer, New York, 1989.
7. *Ibragimov N.H. (ed.).* CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Vol. 1. Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws. Boca Raton: CRC Press, 1994.
8. Olv*er P.J.* Application of Lie Groups to Differential Equations, 2nd ed. NewYork, Springer-Verlag, 2000.
9. *Kudryashov N.A.* Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations. Chaos, Solitons and Fractals. 2005. Vol. 24. No. 5. Pp. 1217–1231.
10. *Polyanin A.D., Zaitsev A.I., Zhurov A.I.* Metody resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki i mekhaniki [Solution Methods for Nonlinear Equations of Mathematical Physics and Mechanics], Moscow, Fizmatlit Publ., 2005 (in Russian).
11. *Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R.* Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics. Chapman & Hall /CRC Press, Boca Raton, 2007.
12. *Kudryashov N.A.* Metody nelinejnoj matematicheskoj phiziki [Methods of Nonlinear Mathematical Physics. Dolgoprudnyi, Izd. Dom Intellekt Publ., 2010 (in Russian).
13. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.
14. *Conte R., Musette M.* The Painleve Handbook, 2nd ed. Springer, Cham, 2020.
15. *Aksenov A.V., Polyanin A.D.* Obzor metodov postroeniya tochnyh reshenij uravnenij matematicheskoj fiziki, osnovannyh na ispol’zovanii bolee prostyh reshenij [Review of methods for constructing exact solutions of equations of mathematical physics based on simpler solutions]. Theoretical and Mathematical Physics, 2022. Vol. 211. No. 2. Pp. 149–180 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.4213/tmf10247
16. *Sorokin V.G., Vyazmin A.V.* Nonlinear reaction-diffusion equations with delay: Partial survey, exact solutions, test problems, and numerical integration, Mathematics, 2022. Vol. 10. No. 11. 1886.
17. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Exact solutions of linear and non-linear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2013. Vol. 54. Pp. 115–126.