ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ», 2024, т. 13, № 3, с. 154–159

УДК 517.95

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОДНОМЕРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ РЯДАМИ

***С.П. Баутин*[1,*], *И.А. Вазиева*[1,**]**

[1]*Снежинский физико-технический институт НИЯУ МИФИ, Снежинск, 456776, Россия*

**e-mail:* spbautin@mail.ru

***e-mail:* vazieva.i@yandex.ru

Поступила в редакцию: 24.04.2024

После доработки: 20.05.2024

Принята к публикации: 28.05.2024

В работе рассматривается нелинейное уравнение теплопроводности в одномерном плоскосимметричном случае. Для него на отрезке [0; π] ставится задача Коши с непрерывными начальными данными. Эти данные четным образом продолжаются на отрезок [–π; 0], а затем с периодом 2π на всю числовую ось. Решение получившейся задачи Коши представляется в виде соответствующего тригонометрического ряда по косинусам от пространственной переменной. Коэффициенты ряда являются искомыми функциями от времени. Для этих коэффициентов приведена бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений с соответствующими начальными условиями. Построены конечные отрезки тригонометрических сумм, приближенно передающие решения рассматриваемых задач Коши.

Ключевые слова: нелинейное уравнение теплопроводности, задача Коши, тригонометрические ряды, приближенные решения.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.330

ODCDWC

ВВЕДЕНИЕ

Решения нелинейного уравнений теплопроводности описывают не только процесс передачи тепла от холодного к теплому, но также описывают процесс фильтрации газа в пористом грунте [1–5].

В настоящее время основным способом построения решений начально- краевых задач для нелинейных уравнений с частными производными являются разностные методы, при которых численно определяется конечное число значений искомых функций в отдельных изолированных точках. Но часто под вопросом остается надежность получаемых разностными методами численных результатов.

Среди аналитических методов получения решений нелинейных уравнений с частными производными одним из основных методов является использование конечных или бесконечных представлений с применением различных систем базисных функций для разных функциональных пространств [6–11].

В работе [12] впервые методика бесконечных тригонометрических рядов была применена для построении решений одного нелинейного уравнения, а также нелинейной системы уравнений с частными производными смешанного типа. В работах [13–15] доказана сходимость используемых тригонометрических рядов.

Эти факты и послужили отправной точкой для исследований, представленных в данной работе: построение решений нелинейного уравнения теплопроводности в одномерном плоскосимметричном случае в виде тригонометрических рядов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЕЕ РЕШЕНИЙ

Рассматривается нелинейное уравнение теплопроводности в одномерном плоскосимметричном случае

$$u_t = uu_{xx} + \frac{1}{\sigma} u_x^2, \quad \sigma = \text{const} > 0. \qquad (1.1)$$

Для уравнения (1.1) на отрезке [0; π] задаются непрерывные начальные условия, которые вначале четным образом продолжаются на отрезок [–π; 0], а затем с периодом 2π на всю числовую ось.

Решение (1.1) ищется в виде

$$u(t,x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)\cos(kx) \qquad (1.2)$$

с неизвестными коэффициентами $u_k(t)$, зависящими от t и для которых заданы начальные условия

$$u_k(0)=u_k^0; \quad u_k^0=\text{const}. \qquad (1.3)$$

Решение уравнения (1.1) в виде тригонометрических рядов только по синусам невозможно в силу конкретного вида нелинейности исходного уравнения.

Из вида (1.2) следует, что в точках $x = \pm\pi$ выполняются условия теплоизоляции

$$u_x(t,x)\Big|_{x=\pm\pi}=0,$$

делающие нулевым поток тепла с концов отрезка [$-\pi$; π]. По представлениям (1.2) определяются их частные производные, которые подставляются в уравнение (1.1).

Полученное таким образом соотношение записывается через двойные суммы

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty}u_k'(t)\cos(kx)=-\sum_{k=1}^{\infty}k^2u_k(t)\cos(kx)-\\&-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}m^2u_k(t)u_m(t)\cos(kx)\cos(mx)+\\&+\frac{1}{\sigma}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}kmu_k(t)u_m(t)\sin(kx)\sin(mx).\end{aligned} \qquad (1.4)$$

Это полученное уравнение проецируется на базис

$$\{\cos x, \cos 2x, \cos 3x, ...\},$$

т.е. это уравнение последовательно умножается на cos (lx), l = 1, 2, ... и интегрируется по x на отрезке [$-\pi$; π]. Далее учитываются значения конкретных определенных интегралов и вводятся две константы:

$$a_{km(\text{ответов: 1})}=\begin{cases}1, & \text{если } l=k+m \text{ или } l=|k-m|;\\0, & \text{в остальных случаях;}\end{cases}$$

$$b_{km(\text{ответов: 1})}=\begin{cases}1, & \text{если } l=|k-m|;\\-1, & \text{если } l=k+m;\\0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

С помощью этих выражений вычисляются следующие интегралы:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(mx)\cos(lx)\,dx=\frac{\pi}{2}a_{kml},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\sin(mx)\sin(lx)\,dx=\frac{\pi}{2}b_{kml}.$$

В результате получается бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений, и после умножения каждого уравнения на $1/\pi$ имеет место такая бесконечная система дифференциальных уравнений для бесконечного числа искомых функций, записанная в нормальной форме

$$\begin{aligned}&u_l'(t)=-l^2u_l(t)-\\&-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}m^2u_k(t)u_m(t)a_{kml}+\\&+\frac{1}{2\sigma}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}kmu_k(t)u_m(t)b_{kml}.\end{aligned} \qquad (1.5)$$

Здесь l = 1, 2, … .

По методике, предложенной в работах [13–15], установлена локальная по времени сходимость ряда (1.2). Единственное отличие от рассмотренного в [13] случая состоит в виде итогового мажорантного уравнения, которое в данном случае имеет вид

$$\upsilon_t=-\upsilon^2+\upsilon_x^2.$$

Для построения приближенных решений уравнения (1.1) используются конечные суммы

$$u(t,x)=1+\sum_{k=1}^{K}u_k(t)\cos(kx), \qquad (1.6)$$

где K – выбранное значение числа слагаемых в конечных отрезках рядов.

Тогда бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений перейдет в конечную систему

$$\begin{aligned}&u_l'(t)=-l^2u_l(t)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{K}m^2u_k(t)u_m(t)a_{kml}+\\&+\frac{1}{2\sigma}\sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{K}kmu_k(t)u_m(t)b_{kml}, \quad l=1,...,K.\end{aligned}$$

Учет значений констант a_{kml}, b_{kml} и проведение соответствующих эквивалентных преобразований приводит к следующей конечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов $u_k(t)$:

$$u_l'(t) = -l^2 u_l(t) - \\ -\sum_{j=1}^{K-l}\left[\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)j^2 + \left(1-\frac{1}{\sigma}\right)jl + \frac{l^2}{2}\right]u_j u_{j+l} + \\ +\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l-1}\left[\left(1+\frac{1}{\sigma}\right)i^2 - \frac{il}{\sigma}\right]u_i u_{l-i}, \quad (1.7)$$

где l = 1, 2, ..., K.

Приближенные решения уравнения (1.1) строятся в виде конечных сумм (1.6) при заданном числе K. Для определения слагаемых этих сумм решаются конечные системы дифференциальных уравнений (1.7) при заданных начальных данных

$$u_l(0) = u_l^0; \quad u_l^0 = \text{const}; \quad 1 \le l \le K.$$

В качестве примера на рис. 1, 2 приведены графики коэффициентов $u_k(t)$, $1 \le k \le 4$, в случае, когда

$$K = 100,\ \sigma = 0.5,\ \ u_1(0) = 1.0; \\ u_l^0(0) = 0;\ \ 2 \le l \le K. \quad (1.8)$$

Номера кривых на рис. 1, 2 соответствуют номерам коэффициентов $u_k(t)$.

Коэффициенты $u_k(t)$ достаточно быстро достигают своего локального экстремума, а затем монотонно стремятся к нулю. Значения коэффициентов $u_k(t)$ связаны неравенством:

$$|u_k(t)| > |u_{k+1}(t)|.$$

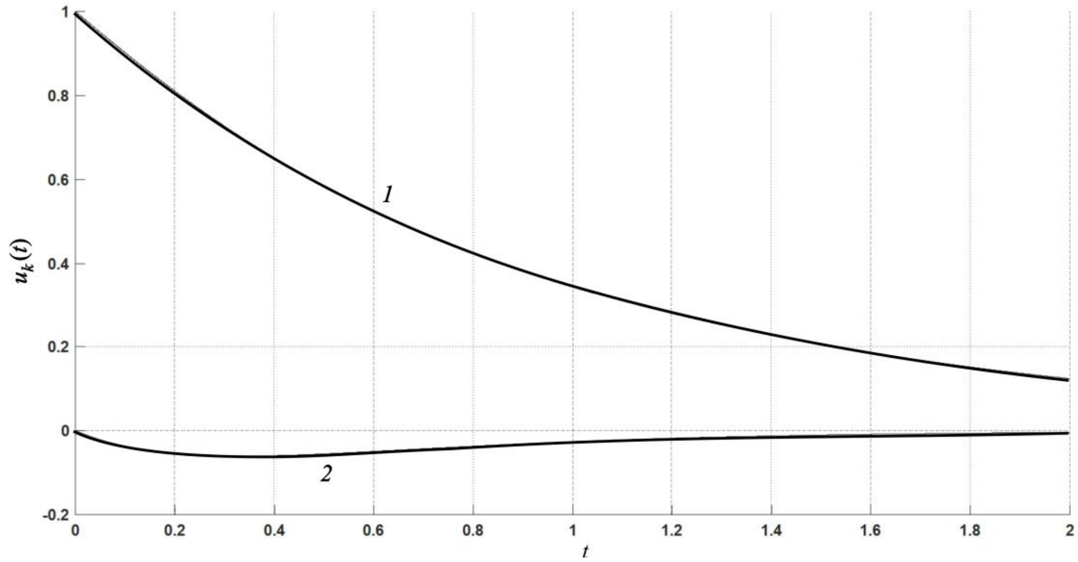

Рис. 1. Графики коэффициентов $u_1(t)$, $u_2(t)$ разложения (1.2)

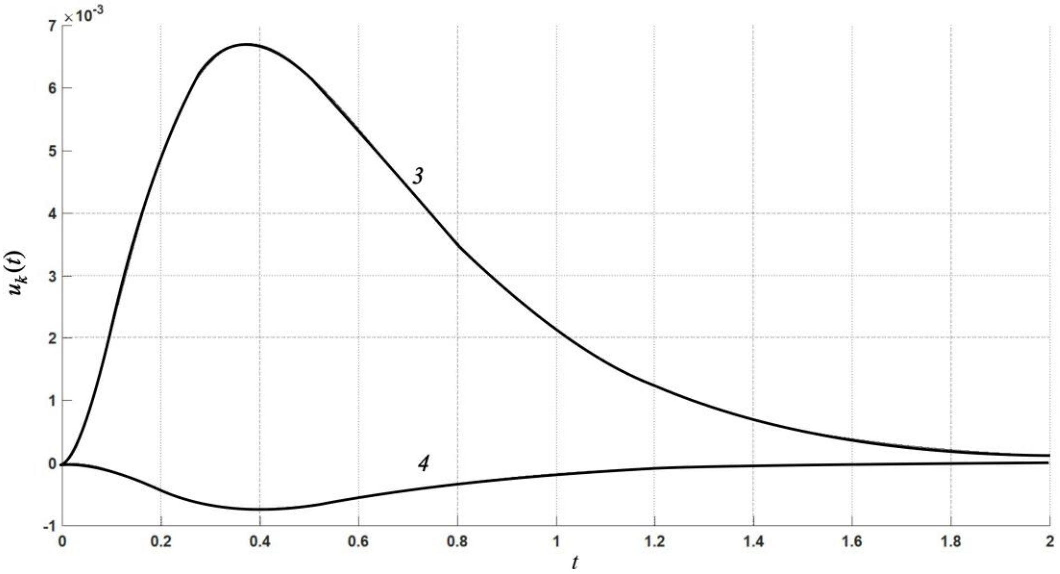

Рис. 2. Графики коэффициентов $u_3(t)$, $u_4(t)$ разложения (1.2)

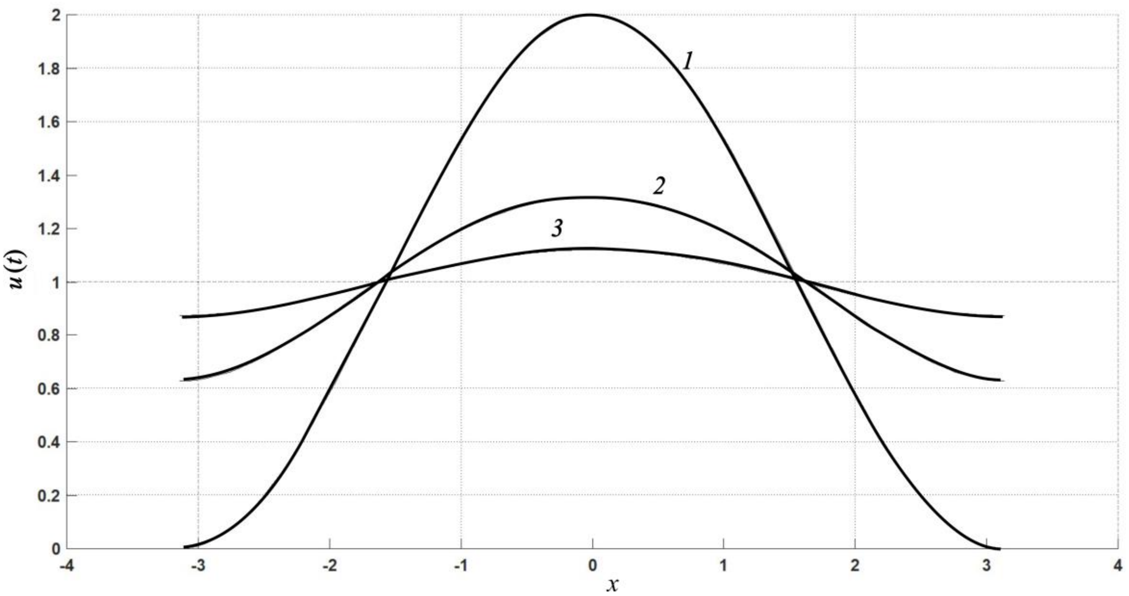

Рис. 3. Приближенные решения задачи (1.8) в различные моменты времени

На графиках рис. 3 представлено изменение с течением времени рассматриваемого приближенного решения задачи (1.8). Линии *1–3* на рис. 3 соответствуют моментам времени t = 0.0, 1.0, 2.0.

Анализ поведения графиков показывает, что с течением времени температура выравнивается. При этом во все моменты времени площадь фигуры под соответствующей кривой постоянна, что соответствует из начальному свойству сохранения тепла в условиях теплоизоляции на границе рассматриваемой области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лейбензон Л.С.* Собрание трудов. Т. 2. Подземная газогидродинамика. М.: Изд-во АН СССР, 1953. 544 с.

2. *Олейник О.А., Калашников А.С., Юй-линь Чжоу*. Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации // Известия АН СССР. Серия математика. 1958. Т. 22. Вып. 5. С. 667–704.

3. *Ладыженская О.А., Солонников В. А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.

4. *Баренблатт Г.И., Ентов В. М., Рыжик В.М.* Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 288 с.

5. *Vazquez J.L.* The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. Oxford: Clarendon Press, 2007, 648 p.

6. *Васин В.В., Сидоров А.Ф.* О некоторых методах приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений // Известия вузов. Математика, 1983. 7 (254). С. 13–27.

7. *Баутин С.П.* Применение характеристических рядов для представления решений нелинейных уравнений параболического типа в окрестности линии вырождения // Численные методы механики сплошной среды, 1985, Т. 16. № 5. С. 16–28.

8. *Баутин С.П.* Существование аналитической тепловой волны, определяемой заданным краевым режимом // Сибирский журнал индустриальной математики, 2003. Т. VI. № 1(13). С. 3–11.

9. *Баутин С.П.* Аналитическая тепловая волна. М.: Физматлит, 2003. 88 с.

10. *Рубина Л. И., Ульянов О. Н.* Об одном методе решения уравнения нелинейной фильтрации // Сибирский математический журнал, 2012. Том 53. № 5.

11. *Казаков А.Л., Лемперт А.А.* О существовании и единственности решения краевой задачи для параболического уравнения нестационарной фильтрации // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54. № 2(318). С. 97–105.

12. *Баутин С.П., Замыслов В.Е., Скачков П.П.* Математическое моделирование тригонометрическими рядами одномерных течений вязкого теплопроводного газа. Новосибирск: Наука; Екатеринбург: УрГУПС, 2014. 91 с.

13. *Баутин С.П., Замыслов В.Е.* Представление решений уравнения Бюргерса тригонометрическими рядами // Вестник НИЯУ МИФИ, 2022. Т. 11. № 4. С. 305–318.

14. *Баутин С.П., Карелина О.А., Обухов А.Г.* Представление решений системы уравнений движе-

ния с помощью тригонометрических рядов // Вестник НИЯУ МИФИ, 2023. Т. 12. № 1. С. 39–51.

15. *Баутин С.П., Карелина О.А., Обухов А.Г.* Некоторые нестационарные двумерные течения газа, определяемые с помощью тригонометрических рядов // Вестник НИЯУ МИФИ, 2023. Т. 12. № 4. С. 223–232.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2024, vol. 13, no. 3, pp. 154–159

REPRESENTATION OF SOLUTIONS TO THE NONLINEAR HEAT CONDUCTIVITY EQUATION BY TRIGONOMETRIC SERIES

***S.P. Bautin*[1,*], *I.A. Vazieva*[1,**]**

National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Snezhinsk, 456776, Russia

**e-mail:* spbautin@mail.ru

***e-mail:* vazieva.i@yandex.ru

Received April 24, 2024; revised May 20, 2024; accepted May 28, 2024

The paper considers the nonlinear heat equation in a one-dimensional plane-symmetric case. For him, on the interval $[0; \pi]$ the Cauchy problem with continuous initial data is posed. These data evenly continue to the segment $[-\pi; 0]$, and then with a period of 2π on the entire numerical axis. The solution to the resulting Cauchy problem is represented in the form of a corresponding trigonometric series in cosines from the spatial variable. The coefficients of the series are the desired functions of time. For these coefficients, an infinite system of ordinary differential equations is given with the corresponding initial conditions. Finite segments of trigonometric sums are constructed that approximately convey the solutions of the considered Cauchy problems.

Keywords: nonlinear heat equation, Cauchy problem, trigonometric series, approximate solutions.

REFERENCES

1. *Leibenzon L.S. Sobranie trudov.* Tom 2. Podzemnaya gazogigrodinamika [Collection of works. Vol. 2. Underground gas hydrodynamics]. Moscow, Izd-vo AN SSSR Publ., 1953. 544 p.

2. *Oleinik O.A., Kalashnikov A.S., Yu-lin Zhou.* Zadacha Koshy i kraevye zadachi dlay uravnnenii tipa nestacyonarnoi filtracyi. [The Cauchy problem and boundary value problems for equations of the nonstationary filtration type.] // Izvestiya AN SSSR. Mathematics series. 1958. Vol. 22. Iss. 5. Pp. 667–704 (in Russian).

3. *Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V. A., Uraltseva N. N.* Lineinye I kvazilineinye uravneniya parabolicheskogo vida. [Linear and quasi-linear equations of parabolic type]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 736 p.

4. *Barenblatt G.I., Kolesnikov V.M., Ryzhik V.M.* Teoriya nestacyonarnoi filtracyi [Theory of unsteady filtration of liquid and gas]. Moscow, Nedra Publ., 1972. 288 p.

5. *Vazquez J.L.* The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. Oxford: Clarendon Press, 2007. 648 p.

6. *Vasin V.V., Sidorov A.F*. O necotoryh metodah priblizennogo resheniya differencyalnyh i integralnyh uravnenii. [On some methods of approximate solution of differential and integral equations]. Izvestiya vuzov. Mathematics, 1983. No. 7 (254). Pp. 13–27 (in Russian).

7. *Bautin S.P.* Primenenie harakteristicheskih raydov dlya predstavleniay reshenii nelineinyh uravnenii parabolicheskogo vida v okrestnosti linii vyrozdeniya [Application of characteristic series to represent solutions of nonlinear parabolic equations in surroundings of the degeneracy line]. Chislennye metody mekhaniki sploshnoj sredy, 1985. Vol. 16. No. 5. Pp. 16–28 (in Russian).

8. *Bautin S.P.* Sushestvovanie analiticheskoi teplovoi volny, opredelayemoi zadannym kraevym rezymom. [The existence of an analytical heat wave determined by a given boundary regime]. Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki, 2003. Vol. VI. No. 1(13). Pp. 3–11 (in Russian).

9. *Bautin S.P.* Analiticheskaya teplovaya volna [Analytical heat wave]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003. 88 p.

10. *Rubina L.I., Ulyanov O.N.* Ob odnom metode resheniya uravnenia nelineinoi filtracyi. [On one method for solving the nonlinear filtration equation]. Sibirskij matematicheskij zhurnal, 2012. Vol. 53. No. 5 (in Russian).

11. *Kazakov A.L., Lempert A.A.* O sushestvovanii i edinstvennosti resheniya kraevoi zadachi dlay parabolicheskogo uravneniya nestacionarnoi filtracyi [On the existence and uniqueness of a solution to a boundary value problem for a parabolic equation of non-stationary

filtration]. Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika, 2013. Vol. 54. No. 2(318). Pp. 97–105 (in Russian).

12. *Bautin S.P., Zamyslov V.E., Skachkov P.P*. Matematicheskoe modelirovanie rigonometricheskimi raydami odnomernyh techenii vayzkogo tehljprovosnogo gaza. [Mathematical modeling of one-dimensional flows of viscous heat-conducting gas using trigonometric series]. Novosibirsk, Nauka Publ.; Yekaterinburg, USURT Publ., 2014. 91 p.

13. *Bautin S.P., Zamyslov V.E.* Predstavlenie resenii uravneniya Burgersa trigonometricheskimi raydami. [Representation of solutions of the Burgers equation by trigonometric series] // Vestnik NIYaU MIFI, 2022. Vol. 11. No. 4. Pp. 305–318 (in Russian).

14. *Bautin S.P., Karelina O.A., Obukhov A.G.* Predstavlenie reshenii sistemy uravnenii dvizeniya s pomoshiu trigonometricheskih raydov. [Representation of solutions of the system of equations of motion using trigonometric series]. Vestnik NIYaU MIFI, 2023. Vol. 12. No. 1. Pp. 39–51 (in Russian).

15. *Bautin S.P., Karelina O.A., Obukhov A.G.* Nekotorye nestachyonarnye dvumernye techeniya gaza, opredelyaemye s pomoshiu trigonometricheskih raydov. [Some unsteady two-dimensional gas flows determined using trigonometric series]. Vestnik NIYaU MIFI, 2023. Vol. 12. No. 4. Pp. 223–232.