

УДК 519.63+517.958:533.9

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАВНОВЕСИЯ ПЛАЗМЫ В НЕОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ МАГНИТНОЙ ЛОВУШКИ

К.В. Брушлинский^{1,2,*}, М.Т. Истомина^{2,}, В.В. Крючков^{2,***}, Е.В. Степин^{1,2,****}**

¹Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 125047, Россия

²Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

*e-mail: brush@keldysh.ru

**e-mail: Mtistomina@mephi.ru

***e-mail: kriuchnikov.viacheslav@mail.ru

****e-mail: eugene.v.stepin@gmail.com

Поступила в редакцию: 02.08.2024

После доработки: 02.08.2024

Принята к публикации: 20.08.2024

В статье уточняются численная модель и результаты расчетов равновесных плазменных конфигураций в магнитной ловушке «Пояс» из класса предложенных А.И. Морозовым ловушек-галатей. Удерживающее магнитное поле создано токнесущими проводниками, погруженными в плазму, но не соприкасающимися с ней. В серии предшествующих работ были исследованы геометрия и основные закономерности конфигураций в распрямленной в цилиндр тороидальной ловушке «Пояс» с двумя проводниками, параллельными его оси. Двумерная плазмостатическая модель конфигурации основана на численном решении краевой задачи с известным уравнением Грэда–Шафранова для функции магнитного потока в сечении цилиндра. Она содержала существенное упрощающее предположение, позволяющее иметь дело с односвязной областью решения задачи: проводники не исключались из области, а токи в них представлены дополнительными слагаемыми в уравнении. В предлагаемой работе это упрощение отсутствует, и задача ставится в неодносвязной области вне проводников квадратного сечения. Роль электрического тока в образовании и поддержании равновесной магнитоплазменной конфигурации играет граничное условие, содержащее циркуляцию магнитного поля вдоль границы каждого проводника. В серии расчетов с различными значениями безразмерных параметров задачи в неодносвязной области установлено, что основные свойства конфигурации и закономерности их зависимости от параметров качественно совпадают с полученными ранее в односвязной области. Это говорит о легитимности предыдущего варианта модели и в то же время уточняет его результат. Уточнена зависимость геометрии и количественных характеристик конфигураций от безразмерных параметров задачи.

Ключевые слова: удержание плазмы, магнитные ловушки, галатеи, равновесные конфигурации, неодносвязная область.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.5.4

EDN MCGOAK

ВВЕДЕНИЕ

Статья относится к области научных исследований физики плазмы, ориентированных на осуществление и реализацию в практических целях управляемого термоядерного синтеза (УТС). Реакция синтеза частиц легких элементов таблицы Менделеева (изотопов водорода) должна сопровождаться выделением энергии, превосходящей энергию распада тяжелых элементов – урана и следующих за ним в успешно работающих десятилетиях атомных электростанциях всего мира. В предполагаемых установках, относящихся к

программе УТС, постоянно участвуют магнитные ловушки, в которых сжатая и сильно нагретая плазма должна удерживаться в течение времени, необходимого для осуществления упомянутой реакции синтеза. Единственным известным «материалом», способным удерживать плазму при требуемых высоких температурах, является магнитное поле, которое в сплошной электропроводящей среде играет роль давления. Среди наиболее известных примеров магнитных ловушек можно назвать плазменный столб с сильным электрическим током вдоль него, создающим окружающее удерживающее магнит-

ное поле (Z-пинч) [1, 2], его тороидальный родственник токамак [3] и стелларатор [4], в котором магнитное поле создается внешними проводниками, окружающими плазменный тор. Тороидальная геометрия многих ловушек связана с тенденцией минимизировать контакты горячей плазмы с элементами их конструкции.

Исследования, представленные в данной работе, относятся к ловушкам, которые можно рассматривать как находящиеся между токамаками и стеллараторами: электрический ток, создающий магнитное поле, течет по проводникам, расположенным внутри плазменной среды, но не соприкасающимся с ней. Этот класс ловушек предложил А.И. Морозов [5, 6], который назвал их галатеями. Рассматриваемый ниже пример «Галатеи-Пояса» [7] предполагается также тороидальным. Однако для простоты первоначальных исследований тор распрямлен в бесконечный цилиндр с двумя прямыми проводниками, симметрично расположенными по разные стороны от оси. Такое упрощение облегчает исследование основных свойств ловушек, а поправки на тороидальность определены, например, в работе [8].

В то же время цилиндрический вариант «Галатеи-Пояса» представляет и самостоятельный интерес ввиду аналогии с известными работами по токовому слою, инициированными С.И. Сыроватским [9] и ведущимися до настоящего времени (см., например, [10] с подробной библиографией).

В исследовании магнитных ловушек существенную роль играют математическое моделирование и расчеты с использованием современной высокопроизводительной вычислительной техники. Плазма в ловушках предполагается достаточно плотной, что позволяет рассматривать ее как сплошную среду и строить математические модели обсуждаемых событий в терминах дифференциальных уравнений магнитной газодинамики (МГД) [11, 12]. Время удержания, предполагаемое для начала реакции синтеза, существенно превосходит характерные времена быстрых плазменных процессов, поэтому состояние плазмы в ловушке можно считать равновесным, т.е. не зависящим от времени. Математической моделью равновесия плазмы становится решение краевой задачи с уравнениями плазмостатики в заданной области ловушки с заданными на ее границах необходимыми условиями.

Задачи в упомянутых бесконечных цилиндрах обладают очевидной плоской симметрией,

т.е. двумерны: $\partial/\partial z \equiv 0$; независимыми переменными в области квадратного или круглого сечений цилиндра плоскостью $z = \text{const}$ являются декартовы (x, y) или полярные (r, φ) координаты. Наличие симметрии существенно упрощает математический аппарат задачи: система уравнений плазмостатики сводится к одному скалярному уравнению – плоскому варианту известного уравнения Грэда-Шафранова [13, 14] для неизвестной функции магнитного потока $\psi(x, y)$. Оно описывает состояние строгого равновесия при дополнительном предположении бесконечной проводимости плазмы. Краевые задачи с ним представляют собой простейшую математическую модель равновесных конфигураций плазмы. С ее помощью успешно определяются основные сведения о геометрии и количественных параметрах конфигурации со связывающими их закономерностями.

В то же время в исследовании симметричных ловушек-галатей упомянутый математический аппарат содержит определенное неудобство, обязанное проводникам, погруженным в плазменный объем: область решения краевых задач с уравнением Грэда-Шафранова неодносвязна, так как из нее должны быть исключены сечения проводников конечного диаметра. В предыдущих работах это преодолевалось дополнительным упрощением модели: задача ставилась и решалась во всей односвязной области сечения цилиндра, а роль токов в проводниках, создающих магнитное поле, играли дополнительные слагаемые в уравнении Грэда-Шафранова, сосредоточенные на их небольших, но конечных территориях.

В настоящей работе это упрощение отсутствует, область решения задачи неодносвязна, а токи в проводниках учтены заданием циркуляции магнитного поля в качестве интегрального граничного условия на их поверхностях.

В п. 1 для облегчения труда читателя изложены математическая модель равновесия плазмы в «Галатеях» в предшествующем упрощенном варианте в односвязной области и краткий обзор известных результатов расчетов.

В п. 2 представлена та же модель без упрощения, реализованная в расчетах в неодносвязной квадратной области с двумя проводниками также квадратного сечения. Квадратная геометрия позволяет использовать декартовы координаты (x, y) . Форма внешней границы практически не влияет на основные результаты, поскольку плазменная конфигурация сосредоточена в основном в центральной части области, а

квадратные проводники влияют на результат только в непосредственной близости с ними. Та же геометрия использована в расчетах плазменной модели формирования конфигурации в решении нестационарных начально-краевых задач с двумерными уравнениями МГД в работах [15, 16].

Результаты расчетов и их сопоставление с полученными ранее показали, что основные характеристики равновесных конфигураций несущественно отличаются друг от друга в обоих вариантах модели, что фактически означает легитимность предыдущих расчетов в односвязной области или, точнее говоря, указывает границы их допустимости.

В приведенных результатах серии расчетов, выполненных в предложенной не односвязной модели, исследована зависимость полученных равновесных конфигураций от безразмерных параметров задачи.

ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ РАВНОВЕСИЯ ПЛАЗМЫ В ЛОВУШКАХ-ГАЛАТЕЯХ С ОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТЬЮ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Математические модели равновесия плазмы в приближении механики сплошных сред основаны на трех уравнениях плазмостатики для трех величин: давления плазмы p , напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$ и плотности электрического поля $\mathbf{j}$ [17]:

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{H}; \quad \mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{H}; \quad \text{div } \mathbf{H} = 0. \quad (1.1)$$

Первое из них – уравнение МГД при отсутствии скорости ($\mathbf{V} = 0$) и зависимости от времени ($\partial/\partial t \equiv 0$), второе и третье – уравнения Максвелла. Они описывают идеализированный вариант строгого равновесия, позволяющий пренебрегать диссипативными процессами, разрушающими равновесие вследствие гидродинамической вязкости и диффузии тепла и магнитного поля. Уравнения (1.1) здесь и далее участвуют в безразмерной форме: единицами измерения всех величин являются их характерные значения, известные из постановок задач. Модель равновесной конфигурации плазмы в любой ловушке возникает в результате постановки и решения (численного!) краевой задачи с уравнениями (1.1) в заданной области и с заданными граничными условиями.

В общем виде эти задачи с семью уравнениями для семи неизвестных функций (векторы $\mathbf{H}$,

$\mathbf{j}$ и первые два уравнения (1.1) трехмерны) сложны, однако они сильно упрощаются при наличии или допущении какой-либо симметрии магнитных ловушек, например, плоской, осевой или винтовой. В этом случае уравнения (1.1) сводятся к одному скалярному уравнению Грэда–Шафранова для одной функции магнитного потока ψ . Оно опубликовано впервые в случае осевой симметрии [13, 14], в приложении к тороидальной геометрии ловушек. Приведем его для облегчения понимания дальнейшего в плоском варианте $\partial/\partial z \equiv 0$, имея в виду приложение к плазменному цилиндру (см., например, [11, 12]). Из уравнений (1.1) следует, что $\mathbf{H} = \text{rot } \Psi$, и

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{\partial \psi}{\partial y}; & H_y &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}; \\ j_x &= \frac{\partial I}{\partial y}; & j_y &= -\frac{\partial I}{\partial x}; \\ \psi &= \psi_z; & I &= H_z; \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \nabla p \cdot \mathbf{H} &= \frac{\partial(p, \psi)}{\partial(x, y)} = 0; \\ \nabla p \cdot \mathbf{j} &= \frac{\partial(p, I)}{\partial(x, y)} = 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Равенство нулю якобианов (1.3) означает взаимную зависимость функций p , ψ , I между собой, которую удобно представить в виде

$$p = p(\psi); \quad I = I(\psi). \quad (1.4)$$

Функции (1.4) описывают распределение давления и электрического тока между магнитными поверхностями $\psi(x, y) = \text{const}$. Конкретная зависимость (1.4) не следует из общих соображений и должна определяться требованиями к обсуждаемой ловушке или имеющейся информацией из экспериментов.

Первое уравнение (1.1) превращается в одно скалярное уравнение

$$\Delta \psi + dp/d\psi + I dI/d\psi = 0 \quad (1.5)$$

– вариант уравнения Грэда–Шафранова для неизвестной функции ψ , соответствующий плоской симметрии ловушек. Это двумерное полулинейное¹ уравнение эллиптического типа участвует в математических моделях более широкого класса процессов взаимодействия реакции (младшие члены) и диффузии (лапласиан), например, в теории горения [19] даже без предположения о симметрии и связанного с ним ограничения размерности [11, 12].

¹ Линейное по старшим производным [18].

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАВНОВЕСИЯ ПЛАЗМЫ В НЕОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ МАГНИТНОЙ ЛОВУШКИ

В рассматриваемых моделях равновесных конфигураций в цилиндре с погруженными в него прямыми проводниками функции $p(\psi)$ и $I(\psi)$ задаются, исходя из следующих соображений: продольное поле

$$H_z = I(\varphi) = 0 \quad (1.6)$$

отсутствует, а давление $p(\psi)$ должно быть близким к нулю вблизи проводников и внешней границы согласно требованию, чтобы плазменная конфигурация не соприкасалась с ними. Типичная геометрия магнитного поля в цилиндре с двумя проводниками представлена на рис. 1 линиями уровня $\psi(x, y) = \text{const}$.

Здесь видно, что конфигурацию естественно разместить в центре ловушки, задав давление $p(\psi)$ максимальным при $x = y = 0$ и на сепаратрисе магнитного поля, проходящей через центр, и потребовать его достаточно быстрого убывания в сторону границ, например:

$$p(\psi) = p_0 \exp\left(-\left(\frac{\psi - \psi_0}{q}\right)^2\right), \quad (1.7)$$

здесь

$$\psi_0 = \psi(0, 0), \quad (1.8)$$

а q – достаточно малый параметр, обеспечивающий быстрое убывание давления при удалении от центра. Граничным условием на внешней границе может служить $H_n = \partial\psi/\partial s = 0$, т.е. любое постоянное значение $\psi = \psi_\Gamma \neq \psi_0$, а на границах проводников – информация о заданных в них токах.

Область, в которой ставится краевая задача – сечение цилиндра за вычетом сечений проводников, неодносвязна, что вызывает дополнитель-

ные вопросы при ее решении. Поэтому в предыдущих работах о равновесии плазмы в рассматриваемых ловушках (тороидальных и цилиндрических) введено еще одно упрощающее предположение: проводники исключены из области, а их влияние на созданное ими магнитное поле представлено дополнительным слагаемым $j^{ex}(x, y)$ в уравнении (1.5), сосредоточенным в окрестности центров проводников, например:

$$j^{ex}(x, y) = \sum_{k=1}^N j_k e^{-\frac{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2}{r_c^2}}, \quad (1.9)$$

где коэффициенты j_k обеспечивают равенство интеграла каждого слагаемого по (x, y) величине (безразмерной) тока в каждом из N проводников, а r_c – условный радиус проводника. В цилиндрическом аналоге ловушки «Пояс» (см. рис. 1):

$$N = 2; \quad x_1 = 1; \quad x_2 = -1; \\ y_1 = y_2 = 0; \quad r_c < 1; \quad j_k = \frac{2}{r_c^2}.$$

Краевая задача с модифицированным таким образом уравнением Грэда–Шафранова

$$\Delta\psi + \frac{dp}{d\psi} + j^{ex}(x, y) = 0, \quad (1.10)$$

ставится и решается в односвязной области сечения цилиндра с упомянутым граничным условием $\psi = \psi_\Gamma = \text{const}$. Значение константы роли не играет, поскольку искомая функция ψ определена с точностью до произвольного аддитивного слагаемого. Точнее говоря, от ψ_Γ зависит значение ψ_0 в центре области, и не зависит разность $\psi - \psi_0$, т.е. давление в формуле (1.7) и магнитное поле в формулах (1.2).

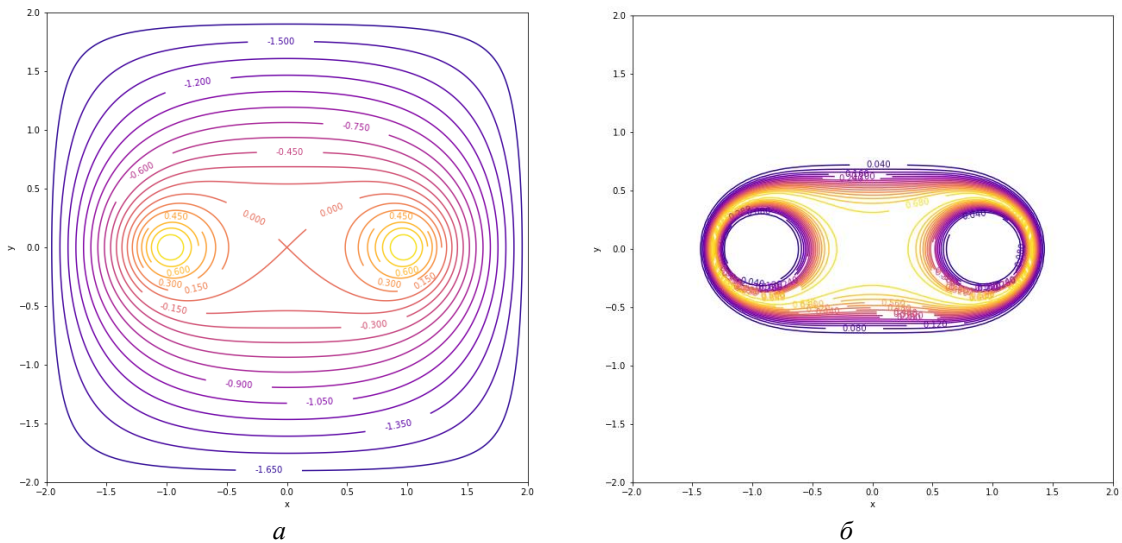


Рис. 1. Распределение магнитного поля (а) и давления (б) в ловушке «Галатея-Пояс» при $p_0 = 0.7, r_c = 0.2, q = 0.2$.

Решение задачи получено итерационным методом установления в искусственно введенном времени, т.е. численным решением начально-краевой задачи с уравнением

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \Delta \psi + g(x, y), \quad (1.11)$$

где $g(x, y)$ – младшие члены уравнения (1.10). При этом использовался хорошо известный метод продольно-поперечной прогонки [12, 20–22]. В ранних работах исследованы конфигурации в «Стеллараторе-Галатее» (СГ) [23–25] – распрямленной в цилиндр ловушке с тремя винтовыми проводниками. При этом предполагалась винтовая симметрия, винтовые координаты и винтовой вариант уравнения Грэда–Шафранова [11, 12]. Затем исследованы равновесия в «Галатее-Поясе» [25–29], где в последнее время уделено внимание устойчивости конфигураций. Промежуточный случай «Трилистника» – цилиндра с тремя прямыми проводниками – рассмотрен в [25, 30].

Основной результат всех расчетов состоит в том, что равновесное решение устанавливается только при ограничении безразмерного параметра p_0 – отношения максимального давления p в плазме к характерному «магнитному» давлению $H^2/8\pi$:

$$p_0 < p_0^{cr}. \quad (1.12)$$

При $p_0 > p_0^{cr}$ решение теряет смысл: либо стационарное решение перестает быть един-

ственным, либо решение вообще не устанавливается со «временем», либо плазменная конфигурация вторгается на «территорию проводников», условно представленную кругами радиусом r_c .

Ограничение (1.12) имеет и простой физический смысл: ловушка с фиксированной электромагнитной природой не может удержать плазму какого угодно высокого давления.

В перечисленных выше работах исследована зависимость геометрии равновесных конфигураций и относящейся к ним количественной информации от безразмерных параметров задачи: упомянутого выше p_0 и поперечных размеров проводников r_c и конфигурации q .

ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ РАВНОВЕСИЯ ПЛАЗМЫ В ЛОВУШКАХ-ГАЛАТЕЯХ С НЕОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТЬЮ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Следующий этап работы вызван желанием уточнить модель равновесия плазмы в ловушках-галатеех, избавившись от представления токов в проводниках заданной функцией $j^{ex}(x, y)$, т.е. исключив проводники конечного диаметра из сечения цилиндра. Рассмотрим его подробнее на примере распрямленной в цилиндр «Галатее-Пояса» квадратного сечения с двумя квадратными проводниками (рис. 2), что позволяет пользоваться декартовыми координатами (x, y) аналогично упомянутым работам [15, 16].

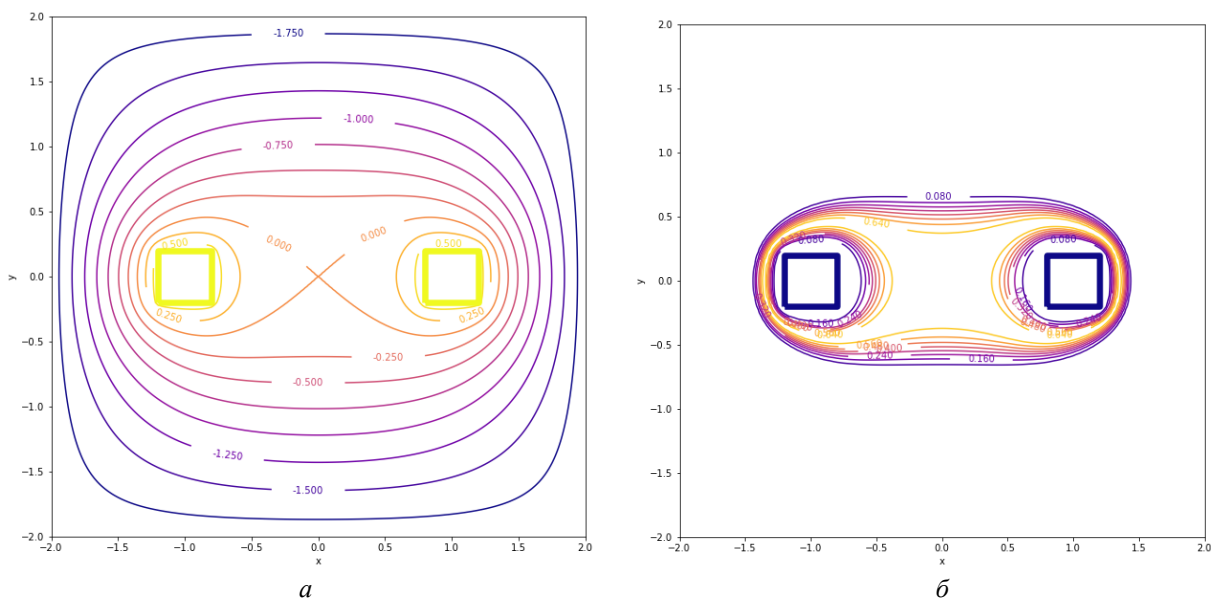


Рис. 2. Распределение магнитного поля (а) и давления (б) в ловушке «Галатее-Пояс» в «неодносвязной» модели при $p_0 = 0.7, r_c = 0.2, q = 0.2$

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАВНОВЕСИЯ ПЛАЗМЫ В НЕОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ МАГНИТНОЙ ЛОВУШКИ

Сечение цилиндра за вычетом проводников представляет собой неодносвязную область, в которой ставится и решается задача с уравнением Грэда–Шафранова

$$\Delta\psi + \frac{dp}{d\psi} = 0, \quad (2.1)$$

без $j^{ex}(x, y)$ и продольного поля $I \equiv H_z \equiv 0$ с барометрической функцией $p(\psi)$ (1.7) и условием (1.8), располагающим максимум давления в центре и на проходящей через него сепаратрисе магнитного поля.

Граничное условие на внешней границе остается по-прежнему $\psi = \psi_\Gamma = 0$. Новым элементом модели становится граничное условие на границах проводников, содержащее информацию о величине протекающих по ним электрических токов и отражающее непрерывность магнитного поля. Его физический смысл легко понять, если приравнять интеграл плотности тока по сечению каждого проводника величине заданного в нем тока и воспользоваться формулой Стокса. В размерных единицах CGS это означает

$$\begin{aligned} \iint j \, dx \, dy &= \frac{c}{4\pi} \iint \text{rot } \mathbf{H} \, dx \, dy = \\ &= \frac{c}{4\pi} \oint H_s \, ds = -\frac{c}{4\pi} \oint \frac{\partial\psi}{\partial n} \, ds = J, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где двойной интеграл берется по площади сечения проводника, а контурный – по его границе. Единицами измерения выбраны заданные постановкой задачи величины: $x_u = x_1 = |x_2|$ – расстояние от центра до осей проводников, $H_u = 2J/cx_u$ – напряженность магнитного поля созданного током J на расстоянии x_u от него, $p_u = H_u^2/4\pi$ – характерное «магнитное давление», $\psi_u = H_u x_u$. В безразмерных величинах, отнесенных к указанным единицам, условие (2.2) превращается в

$$-\oint \frac{\partial\psi}{\partial n} \, ds = 2\pi, \quad (2.3)$$

т.е. содержит интеграл нормальной производной искомой функции ψ по границе каждого проводника. К нему нужно добавить требование:

$$H_n = 0, \text{ т.е. } \psi = \text{const}, \quad (2.4)$$

на границе проводника. Величина этой константы определена значением $\psi = \psi_\Gamma$ на внешней границе и условием (2.3).

Интегральный характер условия (2.3) вносит определенную сложность в процесс численного

решения краевой задачи с уравнением (2.1) методом установления. Она решается с помощью явной разностной схемы, которая требует мелких шагов по времени $\Delta t \sim (\Delta x)^2$ [12], что вполне доступно высокой производительности современной вычислительной техники.

Требование (1.8) расположения максимума давления в центре удовлетворяется, как и раньше, в процессе установления: в качестве ψ_0^{n+1} на каждом следующем шаге по времени берется значение $\psi^n(0, 0)$ с предыдущего шага.

Наконец, следует обратить внимание на термин «неодносвязность» в тексте статьи и ее заглавии. Строго говоря, он относится к фактической области рассматриваемой ловушки и должен иметь смысл, например, в задачах об устойчивости плазменных конфигураций, где могут представлять интерес возмущения, отличные от нуля в центре области, т.е. на оси цилиндра. В плазмостатической двумерной модели равновесия в «Поясе» конфигурация симметрична относительно осей x и y , и ее достаточно рассматривать только в одном, например в первом квадранте с дополнительным граничным условием симметрии:

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0 \\ \text{и } H_y &= -\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

В этом случае квадрант односвязен, но со сложной нижней границей, «обтекающей» половину проводника, с условием

$$-\oint \frac{\partial\psi}{\partial n} \, ds = \pi. \quad (2.6)$$

вместо (2.3).

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

В расчетах, проведенных в изложенной в п. 2 математической модели, получены результаты серии вариантов равновесных конфигураций в «Поясе» при различных значениях безразмерных параметров задачи. Они представлены распределением магнитного поля – силовыми линиями $\psi - \psi_0 = \text{const}$ и давления – изобарами $p = \text{const}$. На рис. 3 они сопоставлены с результатами расчетов предыдущей «односвязной» модели при типичных значениях $p_0 = 0.7, r_c = 0.2, q = 0.2$.

Здесь видно, что конфигурации практически совпадают в целом а различия заметны только

вблизи проводников, контуры которых видны на рис. 3,б и заменены круговыми линиями, обозначенными $j^{ex}(x, y)$ на рис. 3,а. Из качественных характеристик можно заметить слабое изменение магнитного потока между сепаратрисой $\psi - \psi_0 = 0$ и внешней границей: он увеличился

по сравнению с предыдущей моделью с $\psi - \psi_0 = -1.74$ до $\psi - \psi_0 = -1.83$, т.е. в пределах 5 %. Заметно изменилось время (безразмерное) установления стационарного решения задачи: от $T \sim 6$ в старой модели до $T \sim 3$ в новой.

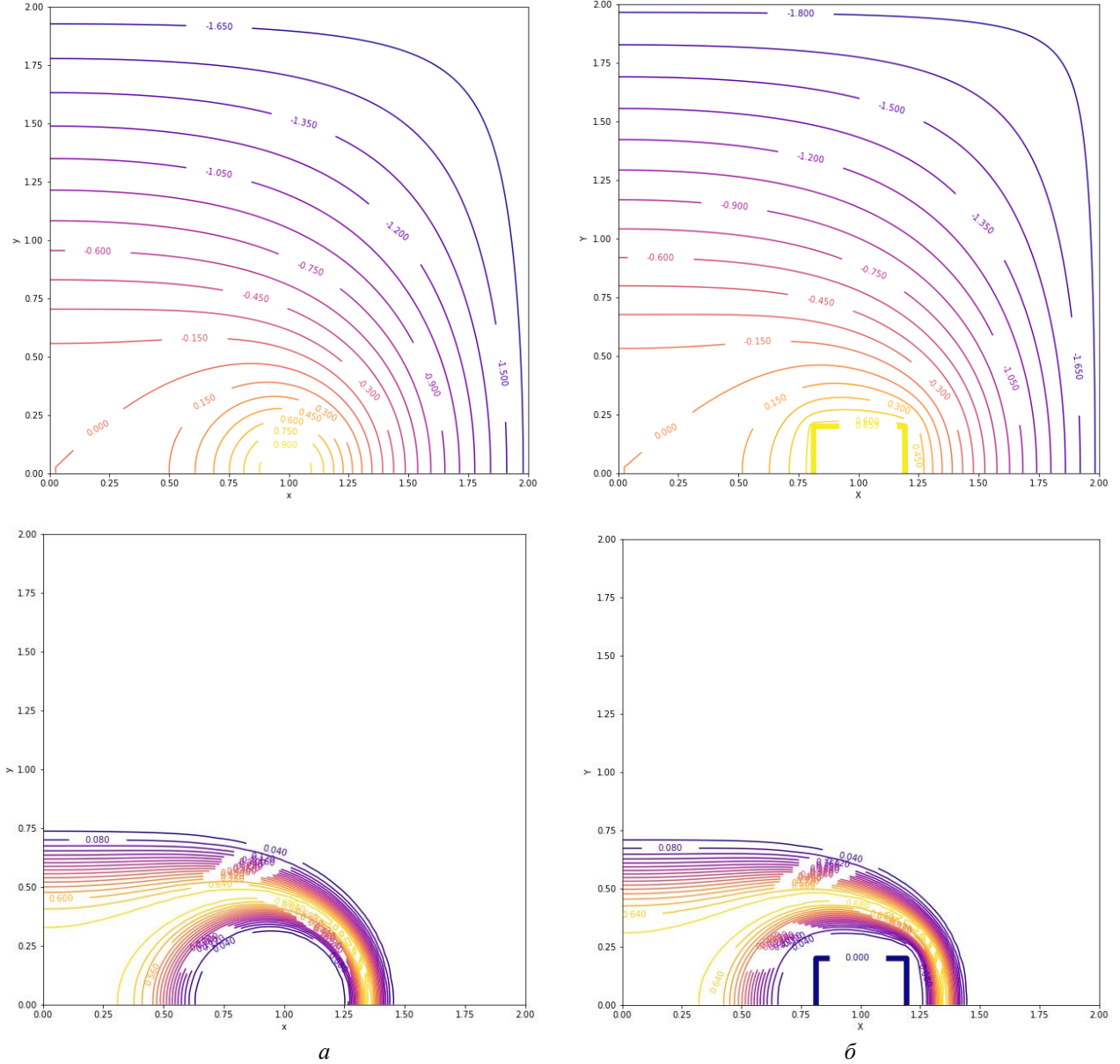


Рис. 3. Распределение магнитного поля (сверху) и давления (снизу) в «односвязной» (а) и «неодносвязной» (б) моделях в ловушке «Галатей-Пояс» при $p_0 = 0.7, r_c = 0.2, q = 0.2$

В предыдущих работах существенную роль играет ограничение максимального давления p_0 , измеренного в магнитных единицах (1.12), за пределами которого интересующее нас равновесие конфигурации теряет смысл. В рассматриваемой модели с реально присутствующими в ловушке проводниками, оно также должно существовать, если сохранить требование условной

изоляции плазмы от них. А именно, нужно потребовать, например, чтобы линия $\psi = \text{const}$, на которой $p = \varepsilon_1 \ll 1$, проходила на расстоянии $\Delta r = \varepsilon_2 > 0$ от середины сторон квадратного проводника или через вершины этого квадрата. В расчетах вариантов с параметрами $r_c = 0.2, q = 0.2$ оказалось естественным значение

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАВНОВЕСИЯ ПЛАЗМЫ В НЕОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ МАГНИТНОЙ ЛОВУШКИ

$p_0^{cr} \approx 4$, что практически не отличается от опубликованного в [27] значения $p_0 \approx 5$ (которое названо p_0^{diff}) в «односвязной» модели, т.е. значение $p_0 = 0.7$ на рис. 3 находится в допустимых пределах (1.12).

Далее в расчетах прослежена зависимость результатов от параметров. На рис. 4 представлена зависимость конфигурации от параметра p_0 – при фиксированных значениях r_c и q .

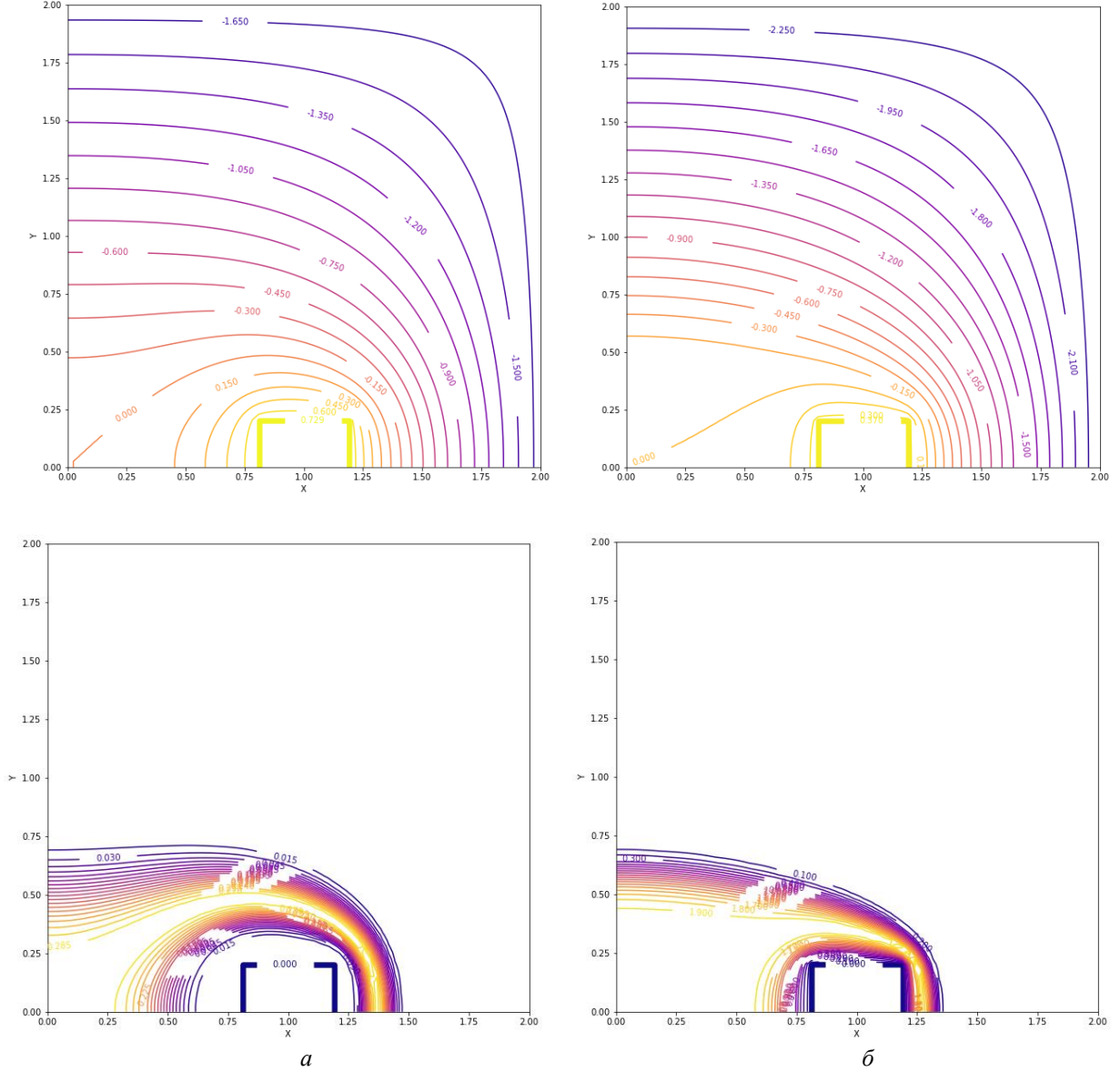


Рис. 4. Распределение магнитного поля (сверху) и давления (снизу) при $p_0 = 0.3$ (а) и $p_0 = 2.0$ (б).
В обоих вариантах $r_c = 0.2, q = 0.2$

Сравнивая их с рис. 3,б можно увидеть, что при уменьшении p_0 конфигурация более сосредоточена в центре области, т.е. более удалена от проводников, а при возрастании p_0 – стремится расшириться и приближается к проводникам. Любопытства ради проведены расчеты и со значениями $p_0 > p_0^{cr}$, которые показали, что с неограниченным ростом p_0 конфигурация стре-

мится занять всю область вне проводников и почти соприкасается с проводниками и внешней границей. Из аналогичных расчетов в предыдущей «односвязной» модели следует, что плазма полностью закрывает территорию проводников, т.е. слагаемое $j^{ex}(x, y)$ в уравнении (1.10) подавлено двумя остальными. При $p_0 \rightarrow \infty$ плазма

почти равномерно заполняет все сечение проводника, и ее давление резко падает до нуля у внешней границы.

Рис. 5 в дополнение к рис. 3,б представляет зависимость плазменной конфигурации от параметра r_c – отношения поперечных размеров проводников и всего сечения ловушки при фиксированных «базовых» значениях $p_0 = 0.7$, $q = 0.2$.

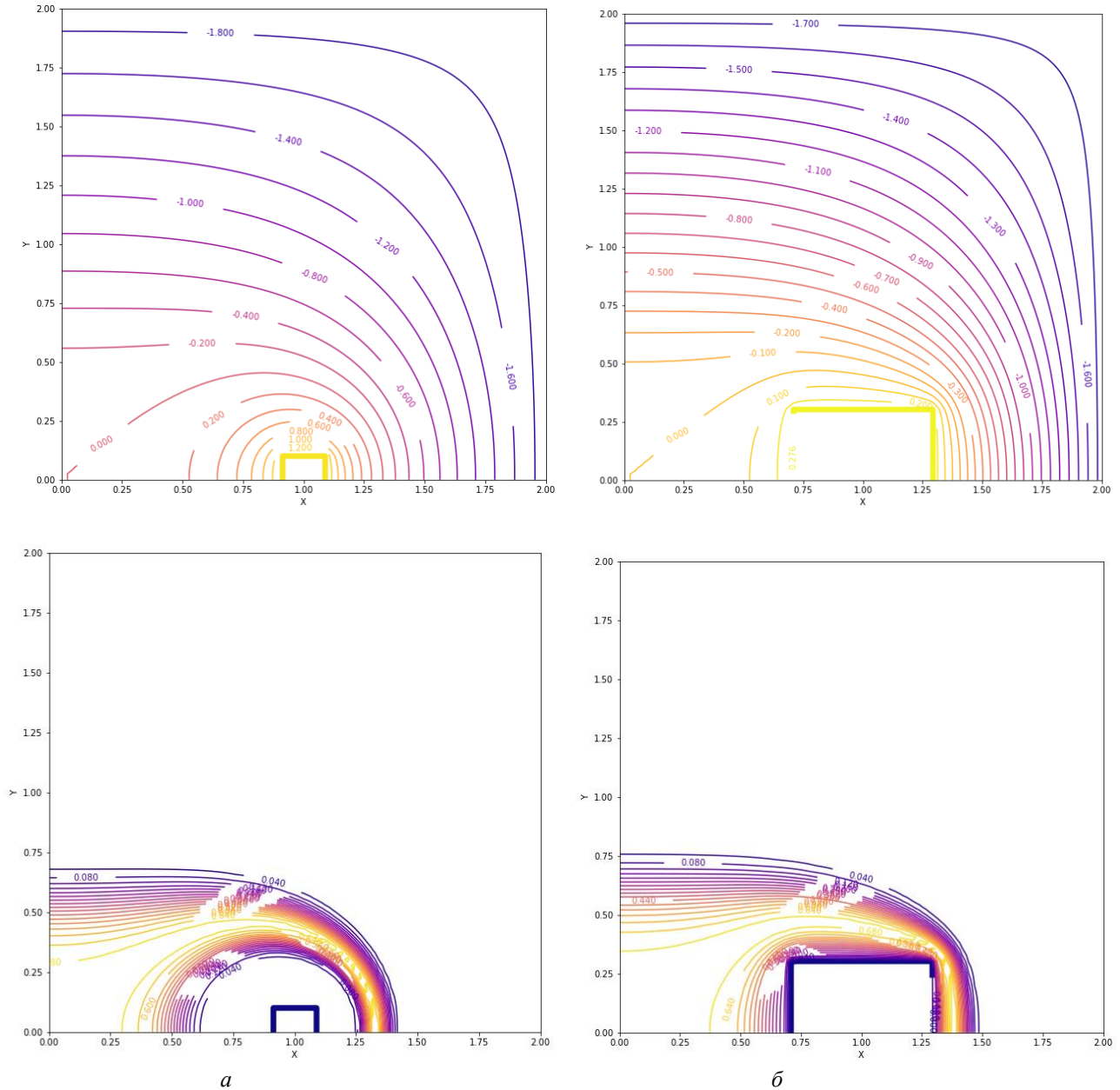


Рис. 5. Распределение магнитного поля (сверху) и давления (снизу) при $r_c = 0.1$ (а) и $r_c = 0.3$ (б).
В обоих вариантах $p_0 = 0.7$, $q = 0.2$

Здесь видно, что при более тонких проводниках ($r_c = 0.1$ по сравнению с $r_c = 0.2$) основная часть конфигурации $0.64 < p < 0.7$ выглядит более компактно, что вместе с освободившимся от проводников пространством способствует более эффективной ее изоляции от них. При более

толстых ($r_c = 0.3$) – имеет место противоположный результат: основная ее часть увеличивается в размерах, а проводники занимают больше места в пространстве ловушки.

Рис. 6 и 3,б иллюстрируют аналогичную зависимость конфигураций от параметра q в формуле (1.7).

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАВНОВЕСИЯ ПЛАЗМЫ В НЕОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ МАГНИТНОЙ ЛОВУШКИ

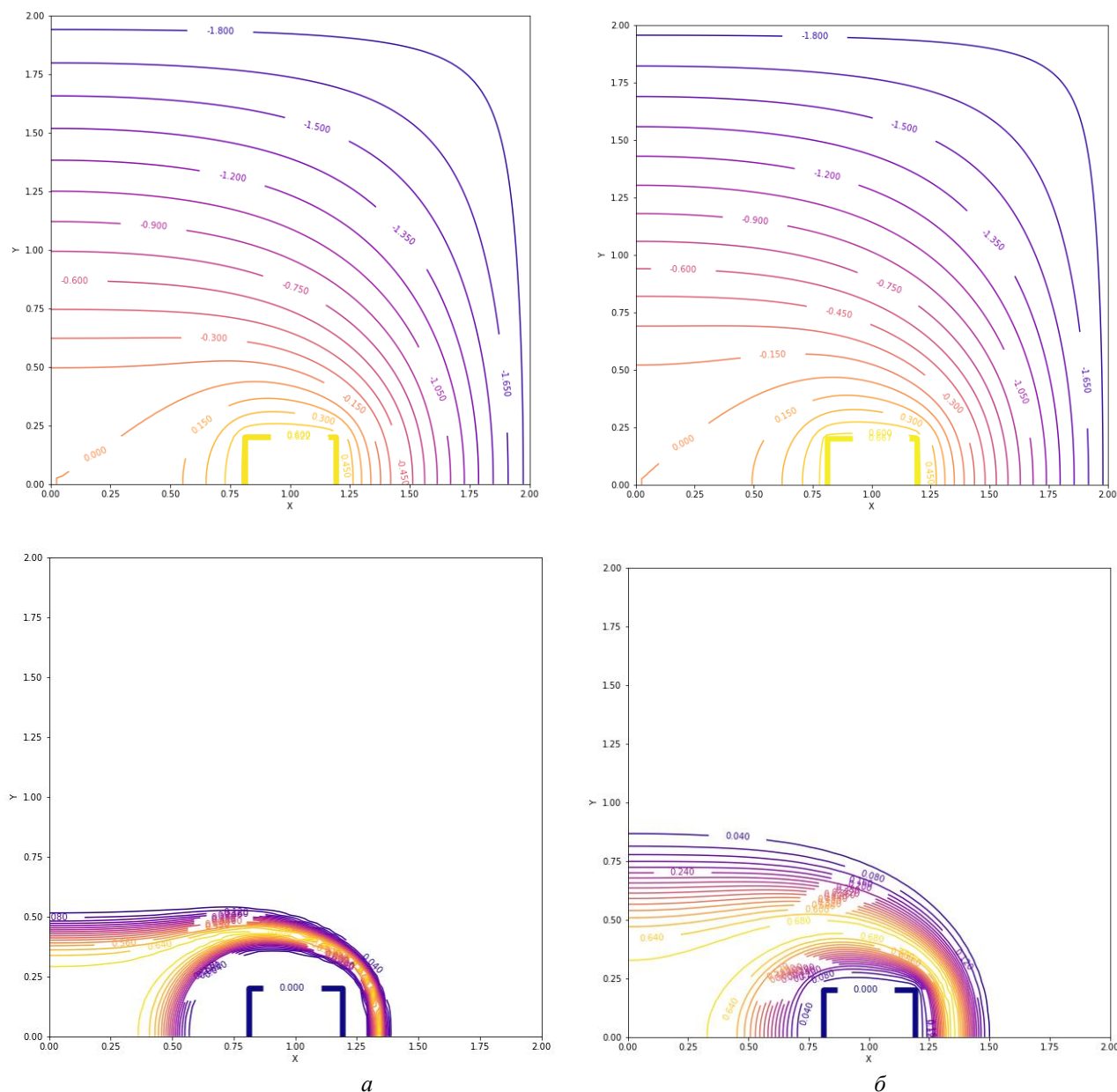


Рис. 6. Распределение магнитного поля (сверху) и давления (снизу) при $q = 0.1$ (а) и $q = 0.3$ (б).
В обоих вариантах $p_0 = 0.7, r_c = 0.2$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При возрастании q центральная часть конфигурации (криволинейный четырехугольник) почти не меняется, а за ее границей давление падает более плавно, что соответствует формуле (1.7) и, в частности, приближает плазменную периферию к проводникам, т.е. снижает эффективность изоляции проводников.

Перечисленные результаты геометрии равновесной конфигурации и ее зависимости от внешних условий выражены количественно в уточненной здесь математической модели. Они уточняют результаты, полученные ранее в «односвязной» модели, опубликованные в работе [29].

Статья представляет исследования равновесных конфигураций плазмы, удерживаемых магнитным полем в ловушках-галатеях на примере распрямленной в цилиндр тороидальной ловушки «Пояс» с погруженными в плазменный объем двумя прямыми проводниками. Математические модели двумерны вследствие плоской симметрии ловушек и основаны на численном решении краевых задач с уравнением Грэда–Шафранова. Дан краткий обзор используемой в предыдущих вариантах модели, в которой проводники с током участвуют с помощью дополнительных слагаемых в уравнении с целью иметь

дело с задачами в односвязной области сечения цилиндра. Основная цель работы и ее результат – отказаться от этого упрощения и ввести сечения проводников в ставшую от этого неодносвязной область решения задачи. Уточненная таким образом модель изложена в тексте и реализована в серии расчетов с различными значениями участвующих в задаче безразмерных параметров. Основным результатом состоит в том, что конфигурации в обеих моделях заметно отличаются друг от друга только в непосредственной окрестности проводников. Уточнены количественные характеристики исследуемых конфигураций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дьяченко В.Ф., Имиенник В.С. Двумерная МГД-модель плазменного фокуса Z-пинча // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. М: Атомиздат, 1974. Вып. 8. С. 164–246.
2. Брагинский С.И., Гельфанд И.М., Федоренко Р.П. Теория сжатия и пульсаций плазменного столба в мощном импульсном разряде // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций / Под ред. М.А. Леонтовича. М: Изд-д АН СССР, 1958. Т. 4. С. 201–221.
3. Безбатченко А.Л., Головин И.Н., Козлов П.Н., Стрелков В.С., Явлинский Н.А. Безэлектродный разряд с большой силой тока в тороидальной камере с продольным магнитным полем // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций // Под ред. М.А. Леонтовича. М: Изд. АН СССР. 1958. Т. 4. С. 116–133.
4. Арцимович Л.А. Управляемые термоядерные реакции. М.: Гос. Изд-во «Физ.-мат. Литература», 1961. 468 с.
5. Морозов А.И. О галатеях – плазменных ловушках с омываемыми плазмой проводниками // Физика плазмы, 1992. Т. 18. Вып. 3. С. 305–316.
6. Морозов А.И., Савельев В.В. О галатеях-ловушках с погруженными в плазму проводниками // Успехи физических наук, 1998. Т. 168. № 11. С. 1153–1194.
7. Морозов А.И., Франк А.Г. Тороидальная магнитная ловушка-галатея с азимутальным током // Физика плазмы, 1994. Т. 20. № 11. С. 982–989.
8. Брушлинский К.В., Кондратьев И.А. Сравнительный анализ расчетов равновесия плазмы в тороидальных и цилиндрических магнитных ловушках // Математическое моделирование, 2018. Т. 30. № 6. С. 76–94.
9. Сыроватский С.И. Токовые слои и вспышки в космической и лабораторной плазме // Вестник АН СССР. 1977. № 10. С. 33–44.
10. Франк А.Г., Кирий Н.П., Марков В.С. Эксперименты по формированию магнитоплазменных конфигураций «Галатея-Пояс» // Физика плазмы, 2019. Т. 45. № 1. С. 32–36.
11. Брушлинский К.В. Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики. М., БИНОМ, Лаборатория знаний, 2009. 200 с.
12. Брушлинский К.В. Математические основы вычислительной механики жидкости, газа и плазмы. Долгопрудный: Изд. дом «Интеллект», 2017. 272 с.
13. Шафранов В.Д. О равновесных магнитогидродинамических конфигурациях // Журнал экспериментальной и теоретической физики, 1957. Т. 33. Вып. 3 (9). С. 710–722.
14. Grad H., Rubin H. Hydrodynamic equilibria and force-free fields // Proc. 2nd United Nations Int. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy. Geneva, 1958. V. 31. P. 190–197.
15. Дудникова Г.И., Морозов А.И., Федорук М.П. Численное моделирование прямых плазменных конфигураций галатей типа «Пояс» // Физика плазмы, 1997. Т. 23. № 5. С. 387–396.
16. Дудникова Г.И., Федорук М.П., Яковлев В.С. Численное моделирование магнитоплазменных конфигураций «Галатея-Пояс» // Вычислительные технологии, 2000. Т. 5. № 2. С. 26–34.
17. Шафранов В.Д. Равновесие плазмы в магнитном поле // Вопросы теории плазмы Т. 2/ Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 2. С. 92–131.
18. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М: Наука. 1978. 685 с.
19. Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М. Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980. 478 с.
20. Peaceman D.W., Rachford H.H. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations // J. Soc. Industr. Appl. Math. ,1955. V. 3. № 1. P. 28–42.
21. Douglas J. On the numerical integration of $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = \partial u / \partial t$ by implicit method // J. Soc. Industr. Appl. Math. ,1955. V. 3. № 1. P. 42–65.
22. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука. 1967. 197 с.
23. Брушлинский К.В., Зуева Н.М., Михайлова М.С., Морозов А.И., Пустовитов В.Д., Тузова Н.Б. Численное моделирование прямых винтовых шнуров с проводниками, погруженными в плазму // Физика плазмы. 1994. Т. 20. № 3. С. 284–292.
24. Брушлинский К.В., Морозов А.И., Петровская Н.Б. Численное моделирование винтовой равновесной конфигурации с плазмой на сепаратрисе // Математическое моделирование, 1998. Т. 10. № 11. С. 29–36.
25. Брушлинский К.В., Гольдич А.С., Десятова А.С. Плазмостатические модели магнитных ловушек-галатей // Математическое моделирование, 2012. Т. 24. № 8. С. 81–86.
26. Брушлинский К.В., Игнатов П.А. Плазмостатическая модель магнитной ловушки «Галатея-Пояс» // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2010. Т. 50. № 12. С. 2184–2194.
27. Брушлинский К.В., Степин Е.В. Вопросы устойчивости в двумерных математических моделях

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАВНОВЕСИЯ ПЛАЗМЫ В НЕОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ МАГНИТНОЙ ЛОВУШКИ

равновесия плазмы в магнитных ловушках-галатеях // Дифференциальные уравнения, 2021. Т. 57. № 7. С. 867–879.

28. *Брушлинский К.В., Крюченков В.В., Степин Е.В.* Математическая модель равновесных конфигураций плазмы в магнитных ловушках и исследование их устойчивости // Труды матем. института им. В.А. Стеклова, 2023. Т. 322. С. 58–70.

29. *Brushlinskii K.V., Stepin E.V.* On equilibrium magnetoplasma configurations in «Galatea-Belt» magnetic traps / J. Phys.: Conf. Ser. 2021. V. 2028. P. 012026.

30. *Brushlinskii K.V., Stepin E.V.* Mathematical model and numerical simulation of equilibrium plasma configurations in «Threeleaf» magnetic traps // Lobachevskii journal of mathematics, 2023. V. 14. No. 1. P. 20–25.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2024, vol. 13, no. 5, pp. 316–328

MATHEMATICAL MODEL OF PLASMA EQUILIBRIUM IN THE MULTIPLY CONNECTED DOMAIN OF A MAGNETIC TRAP

K.V. Brushlinskii^{1,2}, M.T. Istomina², V.V. Kriuchenkov², E.V. Stepin^{1,2}

¹*M.V. Keldysh institute of applied mathematics, RAS, Moscow, 125047, Russia*

²*National research nuclear university «MEPhI», Moscow, 115409, Russia*

*e-mail: brush@keldysh.ru

**e-mail: Mtistomina@mephi.ru

***e-mail: kriuchenkov.viacheslav@mail.ru

****e-mail: eugene.v.stepin@gmail.com

Received August 02, 2024; revised August 02, 2024; accepted August 20, 2024

The article clarifies the numerical model and the results of calculations of equilibrium plasma configurations in the magnetic trap «Belt» from the class of Galatea traps proposed by A.I. Morozov. The confining magnetic field is created by current-carrying conductors immersed in the plasma but not in contact with it. In a series of previous works, the geometry and basic regularities of configurations in the toroidal trap «Belt» straightened into a cylinder with two conductors parallel to its axis were researched. The two-dimensional plasmostatic model of the configuration is based on the numerical solution of the boundary value problem with the known Grad-Shafranov equation for the magnetic flux function in the cross-section of the cylinder. It contained an essential simplifying assumption, that makes it possible to deal with a single-connected domain of the problem solution: conductors were not excluded from the domain, and currents in them were represented by additional summands in equation. In the proposed work this simplification is absent, and the problem is posed in a multiply connected domain of out of conductors of square cross section. The role of the electric current in the formation and maintenance of the equilibrium magnetoplasma configuration is played by a boundary condition containing the circulation of the magnetic field along the boundary of each conductor. In a series of calculations with different values of dimensionless parameters of the problem in the multiply connected domain, it was found that the main properties of the configuration and the regularities of their dependence on the parameters qualitatively coincide with those obtained earlier in the single-connected domain. This indicates the legitimacy of the previous version of the model and at the same time clarifies its result. The dependence of the geometry and quantitative characteristics of configurations on the dimensionless parameters of the problem has been clarified.

Keywords: plasma confinement, magnetic traps, Galateas, equilibrium configurations, non-simply connected region.

REFERENCES

1. *D'yachenko V.F., Imshennik V.S.* Dvumernaya MGD-model' plazmennogo fokusa Z-pincha [Two-dimensional MHD model of the Z-pinch plasma focus]. Voprosy teorii plazmy/ Pod red. M.A. Leontovicha. Moscow, Atomizdat Publ., 1974. Iss. 8. Pp. 164–246 (in Russian).

2. *Braginskij S.I., Gel'fand I.M., Fedorenko R.P.* Teoriya szhatiya i pul'sacij plazmennogo stolba v moshchnom impul'snom razryade [Theory of compression and pulsations of a plasma column in a powerful pulsed discharge]. Fizika plazmy i problema upravlyayemykh termoyadernykh reakcij / Pod red. M. A. Leontovicha. Moscow, Izd. AN SSSR Publ., 1958. Vol. 4. Pp. 201–221 (in Russian).

3. *Bezbatchenko A.L., Golovin I.N., Kozlov P.N., Strelkov V.S., YAvlinskij N.A.* Bezelektroodnyj razryad s bol'shoj siloj toka v toroidal'noj kamere s prodol'nym magnitnym polem [Electrodeless discharge with high current intensity in a toroidal chamber with a longitudinal magnetic field]. *Fizika plazmy i problema upravlyaemyh termoyadernyh reakcij* Pod red. M. A. Leontovicha. Moscow, Izd. AN SSSR Publ. Vol. 4. Pp. 116–133 (in Russian).
4. *Arcimovich L.A.* Upravlyaemye termoyadernye reakcii [Controlled thermonuclear reactions] Moscow, Gos. Izd. fiz.-mat. Literature Publ., 1961. 468 p
5. *Morozov A.I.* Galathea's – plasma confinement systems in which the conductors are immersed in the plasma. *Sov. J. Plasma Phys.*, 1992. Vol. 18 (3). Pp. 159–165.
6. *Morozov A.I. and Savel'ev V.V.* On Galathea – magnetic traps with plasma-embedded conductors. *Phys. Usp.*, 1998. Vol. 41 (11). Pp. 1049–1089.
7. *Morozov A.I. and Frank A.G.* Galathea toroidal multipole trap with azimuthal current. *Plasma Phys. Rep.*, 1994. Vol. 20 (11). Pp. 879–886.
8. *Brushlinskii K.V. and Kondratyev I.A.* Comparative analysis of plasma equilibrium computations in toroidal and cylindrical magnetic traps. *Math. Models Comput. Simul.*, 2019. Vol. 11 (1). Pp. 121–132.
9. *Syrovatskij S.I.* Tokovyie sloi i vspyshki v kosmicheskoy i laboratornoj plazme [Current layers and flares in space and laboratory plasma]. *Vestnik AN SSSR*. 1977. No. 10. Pp. 33–44 (in Russian).
10. *Frank A.G., Kyrie N.P., Markov V.S.* Experiments of the Formation of Galathea-Belt Magnetoplasma Configurations. *Plasma Physics Reports*, 2019. Vol. 45 (1). Pp. 25–32.
11. *Brushlinskij K.V.* Matematicheskie i vychislitel'nye zadachi magnitnoj gazodinamiki [Mathematical and computational problems of magnetic gas dynamics]. Moscow, BINOM, Laboratoriya znaniy Publ., 2009. 200 p.
12. *Brushlinskij K.V.* Matematicheskie osnovy vychislitel'noj mekhaniki zhidkosti, gaza i plazmy [Mathematical foundations of computational mechanics of liquid, gas and plasma]. *Dolgoprudny, Izd. dom «Intellect» Publ.*, 2017.
13. *Shafranov V.D.* On magnetohydrodynamical equilibrium configurations. *Sov. Phys. JEPT*, 1958. Vol. 6 (3). Pp. 545–554.
14. *Grad. H., Rubin H.* Hydrodynamic equilibria and force-free fields. *Proc. 2nd United Nations Int. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy*. Geneva, 1958. Vol. 31. Pp. 190–197.
15. *Dudnikova G.I., Morozov A.I., Fedoruk M.P.* Chislennoe modelirovanie pryamyh plazmennyyh konfiguracij galatej tipa «Poyas» [Numerical modeling of direct plasma configurations of «Belt» type Galathea]. *Fizika plazmy*, 1997. Vol. 23. No. 5. Pp. 387–396 (in Russian).
16. *Dudnikova G.I., Fedoruk M.P., YAKovlev V.S.* Chislennoe modelirovanie magnitoplazmennyyh konfiguracij Galathea-Poyas [Numerical modeling of Galathea-Belt magnetoplasma configurations]. *Vychislitel'nye tekhnologii*, 2000. Vol. 5. No. 2. Pp. 26–34 (in Russian).
17. *Shafranov V.D.* Ravnovesie plazmy v magnitnom pole [Plasma equilibrium in a magnetic field]. *Voprosy teorii plazmy vol. 2/ Pod red. M.A. Leontovicha*. Moscow, Gosatomizdat Publ., 1963. Iss. 2. Pp. 92–131 (in Russian).
18. *Rozhdestvenskij B.L., Yanenko N.N.* Sistemy kvazilinejnyh uravnenij i ih prilozheniya k gazovoj dinamike [Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 685 p.
19. *Zel'dovich Ya.B., Barenblatt G.I., Librovich V.B. and Makhviladze G.M.* The Mathematical Theory of Combustion and Explosions. New York, Consultants Bureau, 1985.
20. *Peaceman D.W., Rachford H.H.* The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. *J. Soc. Industr. Appl. Math.*, 1955. Vol. 3. No. 1. Pp. 28–42.
21. *Douglas J.* On the numerical integration of $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = \partial u / \partial t$ by implicit method. *J. Soc. Industr. Appl. Math.*, 1955. Vol. 3. No. 1. Pp. 42–65.
22. *Yanenko N.N.* Metod drobnyyh shagov resheniya mnogomernyyh zadach matematicheskoy fiziki [Method of fractional steps for solving multidimensional problems of mathematical physics]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1967. 197 p.
23. *Brushlinskii K.V., Zueva N.M., Mikhailo-va M.S., Morozov A.I., Pustovitov V.D. and Tuzova N.B.* Numerical simulation of straight helical sheaths with conductors immersed in plasma. *Plasma Phys. Rep.*, 1994. Vol. 20 (3). Pp. 257–264 (1994).
24. *Brushlinskij K.V., Morozov A.I., Petrovskaya N.B.* Chislennoe modelirovanie vintovoy ravnovesnoj konfiguracii s plazmoj na separatrixe [Numerical modeling of a helical equilibrium configuration with plasma on a separatrix]. *Matematicheskoe modelirovanie*, 1998. Vol. 10. No. 11. Pp. 29–36 (in Russian).
25. *Brushlinskii K.V., Gol'dich A.S. and Desyatova A.S.* Plasmostatic models of magnetic galathea-traps. *Math. Models Comput. Simul.*, 2013. Vol. 5 (2). Pp. 156–166.
26. *Brushlinskii K.V. and Ignatov P.A.* A plasmostatic model of the galathea-belt magnetic trap. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2010. Vol. 50 (12). Pp. 2071–2081.
27. *Brushlinskii K.V. and Stepin E.V.* Stability issues in two-dimensional mathematical models of plasma equilibrium in magnetic galathea traps. *Diff. Eqns.*, 2021. Vol. 57 (7). Pp. 835–847.
28. *Brushlinskii K.V., Kryuchenkov V.V. and Stepin E.V.* Mathematical Model of Equilibrium Plasma Configurations in Magnetic Traps and Their Stability Analysis. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2023. Vol. 322. Pp. 52–64.
29. *Brushlinskii K.V., Stepin E.V.* On equilibrium magnetoplasma configurations in «Galathea-Belt» magnetic traps. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021, Vol. 2028. Pp. 012026.
30. *Brushlinskii K.V., Stepin E.V.* Mathematical model and numerical simulation of equilibrium plasma configurations in «Threeleaf» magnetic traps. *Lobachevskii journal of mathematics*, 2023. Vol. 14. No. 1. Pp. 20–25.