

УДК 512.6

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ И СКРЫТЫЕ СИММЕТРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

А.Д. Полянин^{1,*}, И.К. Шингарева^{2,**}

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва,
119526, Россия

²Department of Mathematics, University of Sonora, Sonora, 83000, Mexico

*e-mail: polyanin@ipmnet.ru

**e-mail: inna.shingareva@unison.mx

Поступила в редакцию: 21.03.2024

После доработки: 21.03.2024

Принята к публикации: 19.04.2024

Рассматриваются классические и неклассические симметрии алгебраических уравнений и систем алгебраических уравнений. Описаны преобразования, сохраняющие вид некоторых алгебраических уравнений, а также преобразования, понижающие степень этих уравнений. Показано, что отдельные алгебраические уравнения, имеющие скрытые симметрии, путем введения новой дополнительной переменной могут сводиться к классическим симметрическим системам алгебраических уравнений. Установлено, что симметрические системы алгебраических уравнений смешанного типа, состоящие из симметрических и антисимметрических многочленов, можно преобразовать к более простым системам. Излагается метод решения неклассических симметрических систем двух алгебраических уравнений, которые меняются местами при перестановке неизвестных. Исследуются алгебраические уравнения, содержащие вторую итерацию заданного многочлена, которые сводятся к неклассическим симметрическим системам уравнений. Приведены примеры решения конкретных алгебраических уравнений и систем таких уравнений, допускающих явные и скрытые симметрии. В частности, рассматриваются нетривиальные алгебраические уравнения шестой и девятой степени, содержащие свободные параметры, которые допускают решения в радикалах. Описаны иррациональные уравнения, которые путем введения двух новых переменных сводятся к симметрическим системам алгебраических уравнений.

Ключевые слова: алгебраические уравнения, симметрические алгебраические системы, неклассические симметрии, скрытые симметрии, корни алгебраических уравнений, решения в радикалах.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.347

EDN HSKMBV

ВВЕДЕНИЕ

Алгебраическим уравнением n -й степени называется уравнение с одним неизвестным x вида

$$P_n(x) = 0, \quad (1)$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n .

Решением (корнем) уравнения (1) называется число x , удовлетворяющее условию $P_n(x) = 0$. Решить уравнение (1) означает найти все его решения.

На протяжении столетий основной задачей алгебры считалась разработка методов решения алгебраических уравнений. С древних времен известны формулы для решения алгебраических уравнений первой и второй степени.

В XVI в. итальянские математики С. дель Ферро, Н. Тарталья, Дж. Кардано, Л. Феррари

получили формулы для решения алгебраических уравнений третьей и четвертой степени. Исторические сведения об этом можно найти в [1, 2] (см. также [3–7], где приведены различные представления решений указанных уравнений).

Замечание 1. Значительно раньше, в XI в., О. Хайям, известный во всем мире как выдающийся поэт, написал «Трактат о доказательствах задач алгебры и алмукабалы», где изложил геометрический метод решения алгебраических уравнений третьей степени, имеющих положительные корни, с помощью конических сечений (см. [2, 8]). Позже, в XVII в., теория решения кубических уравнений, основанная на конических сечениях, была развита Р. Декартом и другими учеными, которые не были знакомы с трудами О. Хайяма.

Замечание 2. Интересно отметить, что некоторые фундаментальные физические константы

являются решениями конкретных квадратных и кубических уравнений [9].

В период с XVI по начало XIX в. для алгебраических уравнений степени выше четвертой неоднократно предпринимались попытки представления решения в радикалах, т.е. в виде выражения, содержащего только коэффициенты алгебраического уравнения и операции сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения корня целой степени. Однако эти попытки оказались безуспешными в общем случае.

В XIX веке П. Руффини, Н. Абель, Э. Галуа установили, что в общем случае решение алгебраических уравнений степени выше четвертой не может быть выражено в радикалах [10] (см. также [4, 6, 11, 12]).

Важно отметить, что решение отдельных алгебраических уравнений пятой степени и выше можно выразить в радикалах. Некоторые такие уравнения можно найти в справочнике [11], где помимо решений в радикалах приводятся также решения, которые выражаются в терминах специальных функций (для алгебраических уравнений пятой степени см. также [12]).

Далее будут рассматриваться алгебраические уравнения и системы алгебраических уравнений, которые обладают теми или иными свойствами симметрии, что позволяет их значительно упрощать. Для лучшего понимания материала, следуя принципу «от простого к сложному», сначала кратко излагаются известные факты, а затем описываются оригинальные результаты.

1. ПРОСТЕЙШИЕ СИММЕТРИИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ПОНИЖАЮЩИЕ ПОРЯДОК АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1°. Под симметриями алгебраических уравнений будут пониматься преобразования, сохраняющие вид уравнений. Ниже приведены примеры алгебраических уравнений, которые сохраняют вид при некоторых простых преобразованиях.

Пример 1. Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$a_{2n}x^{2n} + a_{2n-2}x^{2n-2} + a_{2n-4}x^{2n-4} + \dots + a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 = 0, \quad (2)$$

содержащее только четные степени. Биквадратное уравнение является частным случаем уравнения (2) при $n = 2$. Замена

$$x = -\bar{x} \quad (3)$$

приводит точно к такому же уравнению для $\bar{x}$. Говорят, что уравнение (2) инвариантно относительно преобразования (3). Отсюда следует, что если уравнение (2) имеет решение $x = x_1$, то оно имеет также другое решение

$$x = -x_1.$$

Возводя в квадрат обе части (3), получим простейшую алгебраическую функцию, которая сохраняет вид при преобразовании (3):

$$x^2 = \bar{x}^2. \quad (4)$$

Эта функция и является инвариантом преобразования (3). Если выбирать инвариант (4) за новую переменную, $z = x^2$, то уравнение (2) порядка $2n$ преобразуется к уравнению порядка n :

$$a_{2n}z^n + a_{2n-2}z^{n-1} + a_{2n-4}z^{n-2} + \dots + a_4z^2 + a_2z + a_0 = 0. \quad (5)$$

Таким образом, в данном случае переход от исходной переменной x к инварианту преобразования (4) $z = x^2$ позволяет упростить рассматриваемое уравнение (понизить его порядок в два раза).

2°. Рассмотрим теперь более общее, чем (5), алгебраическое уравнение четной степени $2n$:

$$P_{2n}(x) = 0, \quad (6)$$

которое может содержать младшие члены с нечетными степенями.

Утверждение 1. Пусть левая часть уравнения (6) для некоторого λ и любого x тождественно удовлетворяет соотношению $P_{2n}(x) = P_{2n}(\lambda - x)$. Тогда исходное уравнение с помощью подстановки $z = \left(x - \frac{1}{2}\lambda\right)^2$ сводится к более простому алгебраическому уравнению степени n .

Утверждение 1 нетрудно доказать, используя соотношения

$$\begin{aligned} P_{2n}(x) &= \frac{1}{2} [P_{2n}(x) + P_{2n}(\lambda - x)] = \\ &= \frac{1}{2} \left[P_{2n}\left(\frac{1}{2}\lambda + y\right) + P_{2n}\left(\frac{1}{2}\lambda - y\right) \right], \quad (7) \\ y &= x - \frac{1}{2}\lambda. \end{aligned}$$

Из (7) следует, что уравнение (6), записанное в терминах новой переменной y , не меняется при замене y на $-y$. Поэтому его левую часть можно представить в виде линейной комбинации

ции только четных степеней y . Далее делается замена $z = y^2$ (z – инвариант преобразования $\bar{y} = -y$), понижающая вдвое порядок уравнения.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$(x+a)^{2n} + (x+b)^{2n} - c = 0, \quad (8)$$

которое является частным случаем уравнения (6).

Нетрудно проверить, что левая часть (8) не изменится, если x заменить на $\lambda - x$, где $\lambda = -a - b$. Поэтому исходное уравнение после возведения в степень $2n$ выражений в его левой части и подстановки $z = \left[x + \frac{1}{2}(a+b) \right]^2$ сводится к уравнению степени n .

3°. Рассмотрим теперь алгебраическое уравнение нечетной степени $2n + 1$:

$$P_{2n+1}(x) = 0. \quad (9)$$

Утверждение 2. Пусть левая часть уравнения (9) для некоторого λ тождественно удовлетворяет соотношению

$$P_{2n+1}(x) = -P_{2n+1}(\lambda - x).$$

Тогда исходное уравнение имеет корень $x = \frac{1}{2}\lambda$, и его левая часть может быть представлена в виде

$$P_{2n+1}(x) = \left(x - \frac{1}{2}\lambda \right) Q_{2n}(x), \quad (10)$$

где многочлен четной степени $Q_{2n}(x)$ тождественно удовлетворяет соотношению $Q_{2n}(x) = Q_{2n}(\lambda - x)$. В силу утверждения 1 уравнение $Q_{2n}(x) = 0$ с помощью подстановки

$z = \left(x - \frac{1}{2}\lambda \right)^2$ сводится к более простому алгебраическому уравнению степени n .

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$(x+a)^{2n+1} + (x+b)^{2n+1} + c(2x+a+b) = 0, \quad (11)$$

которое является частным случаем уравнения (9).

Нетрудно проверить, что знак левой части (11) изменится на противоположный, если x заменить на $\lambda - x$, где $\lambda = -a - b$. Поэтому исходное уравнение имеет корень $x = \frac{1}{2}\lambda = -\frac{1}{2}(a+b)$, и его левая часть может быть представлена в виде (10).

4°. Рассмотрим возвратное алгебраическое уравнение четной степени

$$a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + a_2 x^{2n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_0 \neq 0). \quad (12)$$

Левая часть данного уравнения называется *возвратным многочленом* [13] (коэффициенты этого многочлена, одинаково удаленные от его начала и конца, равны).

В уравнении (12) сделаем замену

$$x = \frac{1}{\bar{x}}. \quad (13)$$

После умножения на $\bar{x}^{2n}$ получим точно такое же уравнение. Отсюда следует, что если уравнение (12) имеет решение $x = b$, то оно имеет также другое решение $x = 1/b$.

Нетрудно проверить, что простейший инвариант преобразования (13) имеет вид

$$z = x + \frac{1}{x} = \bar{x} + \frac{1}{\bar{x}}. \quad (14)$$

Утверждение 3 (см. [14, 15]). Возвратное уравнение четного порядка допускает понижение порядка с помощью подстановки (14). В результате для новой переменной z получается алгебраическое уравнение порядка n .

Утверждение 4 (см. [14, 15]). В общем случае возвратное алгебраическое уравнение нечетного порядка $P_{2n+1}(x) = 0$, где $P_{2n+1}(x) \equiv a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + a_2 x^{2n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, имеет корень $x = -1$, а его левая часть допускает представление

$$P_{2n+1}(x) = (x+1)Q_{2n}(x),$$

где $Q_{2n}(x)$ – возвратный многочлен степени $2n$.

Из утверждения 4 следует, что возвратное уравнение порядка $2n + 1$ после деления на $(x + 1)$ и введения новой переменной (14) сводится к уравнению порядка n .

5°. Обобщенные возвратные уравнения

$$a_0 \beta^n x^{2n} + a_1 \beta^{n-1} x^{2n-1} + \dots + a_{n-1} \beta x^{n+1} + a_n x^n + \gamma a_{n-1} x^{n-1} + \gamma^2 a_{n-2} x^{n-2} + \dots + \gamma^{n-1} a_1 x + \gamma^n a_0 = 0 \quad (a_0, \beta, \gamma \neq 0)$$

не меняются при преобразовании

$$x = \frac{\gamma}{\beta \bar{x}}.$$

Простейший инвариант этого преобразования имеет вид

$$z = \beta x + \frac{\gamma}{x} = \beta \bar{x} + \frac{\gamma}{\bar{x}}.$$

Переход в исходном уравнении $2n$ -го порядка от x к новой переменной z приводит к более простому уравнению n -го порядка.

2. СИММЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1°. Сначала дадим некоторые определения и кратко опишем изложенные в [14, 16] наиболее важные факты, касающиеся симметрических систем алгебраических уравнений, которые нам понадобятся далее для изложения оригинальной части статьи.

Многочлен $P_s(x, y)$ от двух переменных называется *симметрическим*, если он не меняется при перестановке аргументов: $P_s(x, y) = P_s(y, x)$. В терминах преобразований симметрический многочлен определяется как многочлен, сохраняющий вид при преобразовании $x = \bar{y}, y = \bar{x}$.

Простейшие симметрические многочлены

$$\sigma_1 = x + y, \quad \sigma_2 = xy \quad (15)$$

называются *элементарными*. Эти многочлены являются простейшими алгебраическими инвариантами, которые не меняются при перестановке аргументов.

Обозначим

$$s_n = x^n + y^n, \quad (16)$$

где n – целое положительное число.

Справедлива рекуррентная формула

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2},$$

которая дает возможность последовательно выражать суммы степеней вида (16) через элементарные многочлены. Более удобной является формула Варинга [14]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} s_k &= \frac{1}{k} \sigma_1^k - \frac{(k-2)!}{1!(k-2)!} \sigma_1^{k-2} \sigma_2 + \\ &+ \frac{(k-3)!}{2!(k-4)!} \sigma_1^{k-4} \sigma_2^2 - \frac{(k-4)!}{3!(k-6)!} \sigma_1^{k-6} \sigma_2^3 + \dots, \end{aligned}$$

которая позволяет в явном виде сразу получать искомое представление для суммы степеней.

Утверждение 5. Любой симметрический многочлен от двух переменных может быть единственным образом выражен через элементарные многочлены (15).

Доказательство этого утверждения можно найти, например, в [14, 16].

Для решения систем двух алгебраических уравнений

$$P_s(x, y) = 0, \quad Q_s(x, y) = 0, \quad (17)$$

где P_s и Q_s – симметрические многочлены, полезно в качестве новых переменных использовать элементарные симметрические многочлены (15), что приводит к упрощению исходной системы. Система (17) не меняется при перестановке аргументов $x \leftrightarrow y$. Поэтому подобные системы обладают следующим свойством: если система имеет решение $x = x_0, y = y_0$, то она имеет также решение $x = y_0, y = x_0$.

Если σ_1 и σ_2 – решение преобразованной системы, то искомые величины x и y определяются из простой системы (15), решение которой сводится к квадратному уравнению

$$x^2 - \sigma_1 x + \sigma_2 = 0. \quad (18)$$

Пример 4. Рассмотрим нелинейную систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} x^2 + axy + y^2 &= b, \\ x^4 + cx^2 y^2 + y^4 &= d, \end{aligned} \quad (19)$$

которая содержит четыре свободных параметра a, b, c, d и не меняется при перестановке аргументов.

Переходя в (19) от x, y к переменным (15) и учитывая формулы

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x + y)^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 2\sigma_2, \\ x^4 + y^4 &= (x^2 + y^2)^2 - 2x^2 y^2 = \\ &= (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)^2 - 2\sigma_2^2 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2 \sigma_2 + 2\sigma_2^2, \end{aligned} \quad (20)$$

получим

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 + (a-2)\sigma_2 &= b, \\ \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2 \sigma_2 + (c+2)\sigma_2^2 &= d. \end{aligned} \quad (21)$$

Исключая из уравнений σ_1 , приходим к квадратному уравнению

$$(a^2 + c - 2)\sigma_2^2 - 2ab\sigma_2 + b^2 - d = 0.$$

Дальнейшая процедура определения решений элементарна и здесь не приводится.

Системы уравнений вида (17) и родственные алгебраические системы с тремя и более неизвестными, уравнения которых не меняются при любой перестановке аргументов, будем назы-

вать классическими симметрическими системами алгебраических уравнений (или кратко симметрическими системами алгебраических уравнений).

2°. Отдельные алгебраические уравнения имеют скрытые (неявные, неочевидные) симметрии и путем введения новой дополнительной переменной могут сводиться к симметрическим системам алгебраических уравнений. Проиллюстрируем сказанное на конкретном примере.

Пример 5. Рассмотрим алгебраическое уравнение шестого порядка

$$(a - x^2)^3 = (b - x^3)^2, \quad (22)$$

которое содержит два свободных параметра a и b и в развернутом виде может быть записано в виде

$$2x^6 - 3ax^4 - 2bx^3 + 3a^2x^2 + b^2 - a^3 = 0. \quad (23)$$

Уравнение (22) и эквивалентное ему уравнение (23) очевидными симметриями не обладают. Покажем, что решения уравнения (22) можно выразить через решения алгебраической симметрической системы

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a, \\ x^3 + y^3 &= b. \end{aligned} \quad (24)$$

Действительно, прямое исключение из системы (24) дополнительной переменной y приводит к уравнению (22).

Система (24) решается путем перехода к новым переменным (15). Учитывая первое равенство (20) и соотношение

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2,$$

в результате получим более простую систему

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 - 2\sigma_2 &= a, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 &= b. \end{aligned}$$

Исключив σ_2 , приходим к кубическому уравнению

$$\sigma_1^3 - 3a\sigma_1 + 2b = 0. \quad (25)$$

Поскольку корни любого кубического уравнения можно выразить в радикалах [3], таким образом конструктивно доказано, что все корни

двухпараметрического уравнения шестой степени (22) можно выразить в радикалах.

Замечание 3. Симметрические системы алгебраических уравнений с тремя и более неизвестными, сохраняющие вид при перестановках переменных, и методы их решения рассматриваются в книге [14]. В этой книге также показано, как симметрические многочлены могут использоваться для доказательств неравенств и для решения некоторых иррациональных уравнений.

3. СИММЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

1°. Многочлен $Q_a(x, y)$ от двух переменных называется *антисимметрическим*, если он меняет знак при перестановке аргументов, т.е. $Q_a(x, y) = -Q_a(y, x)$.

Два основных свойства антисимметрических многочленов [14]:

$$\begin{aligned} 1) Q_a(x, x) &= 0; \\ 2) Q_a(x, y) &= (x - y)R_s(x, y), \end{aligned} \quad (26)$$

где $R_s(x, y)$ – симметрический многочлен.

2°. Рассмотрим симметрическую систему алгебраических уравнений смешанного типа

$$\begin{aligned} P_s(x, y) &= 0, \\ Q_a(x, y) &= 0, \end{aligned} \quad (27)$$

в которой первый многочлен $P_s(x, y)$ является симметрическим, а второй многочлен $Q_a(x, y)$ – антисимметрическим. При перестановке аргументов $x \leftrightarrow y$ первое уравнение системы (27) не меняется, а левая часть второго уравнения меняет знак на противоположный (после умножения на -1 это уравнение переходит в исходное уравнение). Поэтому подобные системы обладают следующим свойством: если система (27) имеет решение $x = x_0, y = y_0$, то она имеет также решение $x = y_0, y = x_0$.

В силу второго свойства (26) систему (27) можно представить в виде

$$\begin{aligned} P_s(x, y) &= 0, \\ (x - y)R_s(x, y) &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Второму уравнению (28) можно удовлетворить, приравняв нулю любой из двух сомножителей в его левой части. Поэтому система (27) распадается на две более простые подсистемы

$$\begin{aligned} P_s(x, x) &= 0, \quad y = x; \\ P_s(x, y) &= 0, \quad R_s(x, y) = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Вторая подсистема (29) является симметрической и может быть решена методом, описанным в разд. 2.

Пример 6. Рассмотрим двухпараметрическую смешанную алгебраическую систему вида (27):

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a, \\ x^3 + by &= y^3 + bx. \end{aligned} \quad (30)$$

Перенеся в (30) все члены в левую часть уравнений, получим частный случай системы (27) при

$$\begin{aligned} P_s(x, y) &= x^2 + y^2 - a, \\ Q_a(x, y) &= x^3 - y^3 + b(y - x). \end{aligned}$$

Второе уравнение (30) можно представить в виде произведения

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 - b) = 0.$$

Поэтому исходная система (30) распадается на две простые подсистемы

$$\begin{aligned} 2x^2 - a &= 0, \quad y = x; \\ x^2 + y^2 - a &= 0, \quad x^2 + xy + y^2 - b = 0, \end{aligned}$$

решение которых элементарно.

Замечание 4. В некоторых случаях система двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными, состоящая из несимметрических уравнений, может быть сведена к симметрической системе вида (17) путем введения новых неизвестных с помощью преобразования масштабирования вида $x = \mu \bar{x}$, $y = \lambda \bar{y}$, где μ и λ – искомые параметры.

4. НЕКЛАССИЧЕСКИЕ СИММЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1°. Рассмотрим теперь систему алгебраических уравнений специального вида

$$\begin{aligned} P(x, y) + Q_s(x, y) &= 0, \\ P(y, x) + Q_s(x, y) &= 0, \end{aligned} \quad (31)$$

где $P(x, y)$ – некоторый заданный многочлен от двух переменных, а $Q_s(x, y)$ – симметрический многочлен.

При перестановке аргументов уравнения (31) меняются местами. Такие системы будем называть *неклассическими симметрическими системами алгебраических уравнений*.

Решение системы уравнений (31) можно свести к решению более простой симметрической системы и решению одного независимого уравнения. Для этого сначала, почленно сложив оба уравнения, получим уравнение

$$P(x, y) + P(y, x) + 2Q_s(x, y) = 0, \quad (32)$$

которое не меняется при перестановке аргументов. Затем, вычитая из первого уравнения (31) второе уравнение, имеем

$$P(x, y) - P(y, x) = 0. \quad (33)$$

Легко проверить, что в левой части уравнения (33) стоит антисимметрический многочлен. В силу второго свойства (26) справедливо представление

$$P(x, y) - P(y, x) = (x - y)R_s(x, y), \quad (34)$$

где $R_s(x, y)$ – симметрический многочлен от двух переменных. Поэтому уравнение (33) можно записать в виде

$$(x - y)R_s(x, y) = 0. \quad (35)$$

Таким образом, исходная система (31) эквивалентна системе, состоящей из двух уравнений (32) и (35). Уравнению (35) можно удовлетворить, приравняв нулю любой из двух сомножителей в его левой части. В результате система (32) и (35) распадается на две более простые подсистемы

$$\begin{aligned} P(x, y) + P(y, x) + 2Q_s(x, y) &= 0, \quad y = x; \\ P(x, y) + P(y, x) + 2Q_s(x, y) &= 0, \quad R_s(x, y) = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Первая подсистема (36) упрощается после подстановки $y = x$ из второго уравнения и может быть записана в виде

$$P(x, x) + Q_s(x, x) = 0, \quad y = x.$$

Вторая подсистема (36) является симметрической и может быть решена методом, описанным в разд. 2.

Пример 7. Рассмотрим трехпараметрическую алгебраическую систему вида (31):

$$\begin{aligned} x &= ax^2 + by^2 + c, \\ y &= ay^2 + bx^2 + c, \end{aligned} \quad (37)$$

где $a \neq \pm b$. Перенеся в (37) все члены в правую часть уравнений, получим частный случай системы (31) при

$$P(x, y) = ax^2 - x + by^2 + c, \quad Q_s(x, y) \equiv 0.$$

Складывая и вычитая почленно уравнения системы (37), приходим к эквивалентной системе уравнений

$$\begin{aligned}(a+b)(x^2+y^2)-(x+y)+2c &= 0, \\ (x-y)[(a-b)(x+y)-1] &= 0,\end{aligned}$$

которая распадается на две простые подсистемы

$$\begin{aligned}(a+b)x^2-x+c &= 0, \quad y=x; \\ (a+b)(x^2+y^2)-(x+y) &= 0, \\ (a-b)(x+y)-1 &= 0.\end{aligned}$$

Решение этих подсистем ввиду элементарности опускается.

2°. К системам типа (31) при $Q_s(x, y) \equiv 0$ сводятся алгебраические уравнения вида

$$f(f(x)) = x, \quad (38)$$

в левой части которых стоит вторая итерация заданного многочлена $f(x)$. Корни более простого уравнения $f(x) = x$ являются также корнями исходного уравнения (38) (это свойство имеет место и для более сложных трансцендентных уравнений, когда $f(x)$ – любая заданная непрерывная функция).

Введение новой переменной $y = f(x)$ позволяет из уравнения (38) получить эквивалентную алгебраическую систему

$$y = f(x), \quad x = f(y), \quad (39)$$

которая является частным случаем системы (31) (после переноса всех членов уравнений (39) в левую часть) и решается методом, описанным в п. 1°.

Пример 8. Рассмотрим алгебраическое уравнение четвертой степени

$$(x^2+a)^2+a=x, \quad (40)$$

которое содержит свободный параметр a и может быть представлено в виде уравнения (38) при $f(x) = x^2 + a$.

Уравнение (40) путем введения новой переменной $y = x^2 + a$ сводится к неклассической симметрической системе вида (31):

$$y = x^2 + a, \quad x = y^2 + a. \quad (41)$$

Складывая и вычитая уравнения (41), как описано в п. 1°, после элементарных преобразований и разложения редуцированного уравнения на множители имеем

$$\begin{aligned}x^2+y^2-x-y+2a &= 0, \\ (y-x)(x+y+1) &= 0.\end{aligned} \quad (42)$$

Приравняв далее нулю сомножители в левой части второго уравнения (42), в итоге получим два независимых квадратных уравнения

$$\begin{aligned}x^2-x+a &= 0, \quad y=x; \\ x^2+x+a+1 &= 0, \quad y=-x-1,\end{aligned}$$

которые определяют четыре корня x исходного уравнения (40).

Пример 9. Рассмотрим более сложное алгебраическое уравнение девятой степени вида (38) при $f(x) = x^3 + a$:

$$(x^3+a)^3+a=x. \quad (43)$$

Это уравнение содержит свободный параметр a и сводится к неклассической симметрической системе

$$y = x^3 + a, \quad x = y^3 + a. \quad (44)$$

Складывая и вычитая уравнения (44), как описано в п. 1°, после элементарных преобразований приходим к эквивалентной системе уравнений

$$\begin{aligned}x^3+y^3-x-y+2a &= 0, \\ (y-x)(x^2+xy+y^2+1) &= 0,\end{aligned}$$

которая распадается на две более простые подсистемы

$$\begin{aligned}x^3-x+a &= 0, \quad y=x; \\ x^3+y^3-x-y+2a &= 0, \quad x^2+xy+y^2+1=0.\end{aligned} \quad (45)$$

Решения первой подсистемы (45) определяются корнями кубического уравнения, которое позволяет найти три корня исходного уравнения (43). Для решения второй системы (45), которая является симметрической и определяет оставшиеся шесть корней уравнения (43), введем новые переменные по формулам (15). В результате получим более простую систему

$$\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1 + 2a = 0, \quad \sigma_1^2 - \sigma_2 + 1 = 0. \quad (46)$$

Исключив отсюда σ_2 , приходим к кубическому уравнению для σ_1 :

$$\sigma_1^3 + 2\sigma_1 - a = 0. \quad (47)$$

Корни этого уравнения и равенство $\sigma_2 = \sigma_1^2 + 1$, которое следует из второго уравнения (46), дают три пары действительных или комплексных чисел σ_{1k}, σ_{2k} ($k = 1, 2, 3$). Подставив эти числа в квадратное уравнение (18), можно найти шесть корней исходного уравнения (43).

Поскольку корни любого кубического уравнения можно выразить в радикалах, таким образом конструктивно доказано, что все корни однопараметрического уравнения девятой степени (43) можно выразить в радикалах.

Замечание 5. Если нас интересуют только действительные корни алгебраического уравнения (43), то вторую систему (45) надо отбросить, поскольку в этом случае имеет место неравенство

$$x^2 + xy + y^2 + 1 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + 1 > 0.$$

3°. Покажем, что алгебраические уравнения вида

$$f(af(x) + x + ab) + f(x) + 2b = 0, \quad (48)$$

где $f(x)$ – заданный многочлен, a и b – свободные параметры, обладают скрытой симметрией и сводятся к системам типа (31) при $Q_s(x, y) \equiv 0$. Отметим, что корни более простого уравнения $f(x) = -b$ являются также корнями исходного уравнения (48) (это свойство имеет место и для более сложных трансцендентных уравнений, когда $f(x)$ – любая заданная непрерывная функция).

Положим

$$y = af(x) + x + ab. \quad (49)$$

В результате уравнение (48) принимает вид

$$f(y) + f(x) + 2b = 0. \quad (50)$$

Исключив из (49) и (50) функцию $f(x)$, получим соотношение

$$x = af(y) + y + ab. \quad (51)$$

Уравнения (49) и (51) образуют систему вида (31):

$$y = af(x) + x + ab, \quad x = af(y) + y + ab. \quad (52)$$

Пример 10. Рассмотрим однопараметрическое алгебраическое уравнение четвертой степени

$$(x^2 + x + b)^2 + x^2 + 2b = 0, \quad (53)$$

которое является частным случаем уравнения (48) (при $f(x) = x^2$, $a = 1$) и сводится к неклассической симметрической системе

$$y = x^2 + x + b, \quad x = y^2 + y + b. \quad (54)$$

Складывая и вычитая уравнения (54), получим эквивалентную систему уравнений, которую можно представить в виде

$$x^2 + y^2 + 2b = 0, \quad (y - x)(x + y + 2) = 0. \quad (55)$$

Приравняв нулю сомножители в левой части второго уравнения, после элементарных преобразований в итоге для переменной x приходим к двум независимым квадратным уравнениям

$$\begin{aligned} x^2 + b &= 0, & y &= x; \\ x^2 + 2x + b + 2 &= 0, & y &= -x - 2. \end{aligned}$$

Эти уравнения имеют корни

$$\begin{aligned} x_1 &= -\sqrt{-b}, & x_2 &= \sqrt{-b}, \\ x_3 &= -1 - \sqrt{-b-1}, & x_4 &= -1 + \sqrt{-b-1}, \end{aligned}$$

которые и определяют искомые решения исходного уравнения (55).

Пример 11. Можно показать, что однопараметрическое алгебраическое уравнение девятой степени

$$(x^3 + x + b)^3 + x^3 + 2b = 0,$$

которое является частным случаем уравнения (48) (при $f(x) = x^3$, $a = 1$), разрешимо в радикалах.

Замечание 6. Более сложную алгебраическую систему, которая получается из (31) формальной заменой симметрического многочлена $Q_s(x, y)$ на произвольный многочлен $Q(x, y)$, можно упростить, вычитая одно уравнение системы из другого. В результате приходим к уравнению вида (35), которое далее следует рассмотреть вместе с одним из уравнений исходной системы.

4°. Иррациональные уравнения вида

$$P_s(\sqrt[n]{a-x}, \sqrt[n]{b+x}) = 0, \quad (56)$$

где $P_s(y, z)$ – симметрический многочлен, n – натуральное число, а a и b – свободные параметры, путем введения новых переменных

$$y = \sqrt[n]{a-x}, \quad z = \sqrt[n]{b+x} \quad (57)$$

сводятся к симметрической системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} P_s(y, z) &= 0, \\ y^n + z^n &= a + b. \end{aligned}$$

Замечание 7. Если n – четное число, то перед любым корнем в (56)–(57) может стоять также знак «минус». Для иллюстрации сказанного рассмотрим конкретный пример.

Пример 12. Трехпараметрические иррациональные уравнения вида

$$\sqrt[4]{a-x} \pm \sqrt[4]{b+x} = c$$

путем введения новых переменных

$$y = \sqrt[4]{a-x}, \quad z = \pm \sqrt[4]{b+x}$$

сводятся к симметрической системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} y + z &= c, \\ y^4 + z^4 &= a + b, \end{aligned}$$

которая решается стандартным способом, описанным в разд. 2.

КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

В данной статье рассматриваются классические и неклассические симметрии алгебраических уравнений и систем алгебраических уравнений. Описаны преобразования, понижающие порядок некоторых алгебраических уравнений. Показано, что путем введения новой дополнительной переменной некоторые алгебраические уравнения, имеющие скрытые симметрии, можно преобразовать к классическим симметрическим системам алгебраических уравнений. Приведены примеры нетривиальных алгебраических уравнений шестой и девятой степени, содержащие один или несколько свободных параметров, которые можно разрешить в радикалах. Доказано, что алгебраические системы смешанного типа, состоящие из симметрических и антисимметрических многочленов, можно преобразовать к более простым системам. Показано, что неклассические симметрические системы двух алгебраических уравнений, которые меняются местами при перестановке неизвестных, можно преобразовать к более простым симметрическим системам и одному независимому уравнению. Установлено, что уравнения специального вида, содержащие вторую итерацию заданного многочлена, можно преобразовать к неклассическим симметрическим системам алгебраических уравнений. Рассматриваются иррациональные уравнения, которые можно преобразовать к симметрическим системам алгебраических уравнений путем введения двух новых переменных.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят А.В. Аксенова за полезные обсуждения.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена по теме государственного задания (номер госрегистрации 124012500440-9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Turnbull H.W. Theory of Equations. Edinburgh: Oliver and Boyd, 1947.
2. Van der Waerden B.L. A History of Algebra: From Al-Khwarizmi to Emmy Noether. Berlin: Springer, 1985.
3. Korn G.A., Korn T.M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. New York: Dover Publ., 2000.
4. Polyanin A.D., Manzhirov A.V. Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists. Boca Raton – London: Chapman & Hall/CRC Press, 2007.
5. Zucker I.J. The cubic equation – a new look at the irreducible case // The Mathematical Gazette, 2008. V. 92. № 525. P. 264–268.
6. Bronshtein I.N., Semendyayev K.A. Handbook of Mathematics, 6th ed. Berlin: Springer, 2015.
7. Chaves-Pichardo M., Martinez-Crus M.A., Trejo-Martinez A., Vega-Crus A.B. On the practicality of the analytical solutions for all third and fourth-degree algebraic equations with real coefficients // Mathematics, 2023. V. 11. № 6. 1447.
8. Siadat V.M., Tholen A. Omar Khayyam. Geometric Algebra and Cubic Equations // Math Horizons, 2021. V. 28. № 1. P. 12–15.
9. El Naschie M.S. The fundamental algebraic equations of the constants of nature // Chaos, Solitons & Fractals, 2008. V. 35. No. 2. P. 320–322.
10. Struik D.J. (ed.) A Source Book in Mathematics: 1200–1800. Princeton, Princeton University Press, 1986.
11. Polyanin A.D. Handbook of Exact Solutions to Mathematical Equations. Boca Raton, CRC Press, 2024.
12. King R.B. Beyond the Quartic Equation. Boston, Birkhäuser, 1996.
13. Математическая энциклопедия. Т. 1. М.: Советская энциклопедия, 1977. С. 740–741.
14. Болтянский В.Г., Виленкин Н.Я. Симметрия в алгебре, 2-е изд. М.: Наука, 2002.
15. Кудряшов Н.А. Симметрия алгебраических и дифференциальных уравнений // Соросовский образовательный журнал, 1998. № 9. С. 104–110.
16. Blum-Smith B., Coskey S. The fundamental theorem on symmetric polynomials: History's first whiff of Galois theory // The College Mathematics Journal, 2017. V. 48. № 1. P. 18–29.

NON-CLASSICAL AND HIDDEN SYMMETRIES OF NONLINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS AND SYSTEMS

A.D. Polyinin^{1,*}, I.K. Shingareva^{2,**}

¹ *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526, Russia*

² *Department of Mathematics, University of Sonora, Sonora, 83000, Mexico*

*e-mail: polyinin@ipmnet.ru

**e-mail: inna.shingareva@unison.mx

Received March 21, 2024; revised March 21, 2024; accepted April 19, 2024

Classical and non-classical symmetries of algebraic equations and systems of algebraic equations are considered. Transformations that preserve the form of some algebraic equations, as well as transformations that reduce the order of these equations, are described. It is shown that individual algebraic equations with hidden symmetries can be reduced to classical symmetric systems of algebraic equations by introducing a new additional variable. It has been established that symmetric systems of algebraic equations of mixed type, consisting of symmetric and antisymmetric polynomials, can be converted to simpler systems. A method is presented for solving non-classical symmetric systems of two algebraic equations that change places when the unknowns are rearranged. Algebraic equations containing the second iteration of a given polynomial are studied, which are reduced to non-classical symmetric systems of equations. Examples are given of solving specific algebraic equations and systems of such equations that admit explicit and hidden symmetries. In particular, nontrivial algebraic equations of the sixth and ninth degrees are considered, containing free parameters that admit solutions in radicals. Irrational equations are described, which, by introducing two new variables, are reduced to symmetric systems of algebraic equations.

Keywords: algebraic equations, symmetric algebraic systems, non-classical symmetries, hidden symmetries, roots of algebraic equations, solutions in radicals.

REFERENCES

1. *Turnbull H.W.* Theory of Equations. Edinburgh: Oliver and Boyd, 1947.
2. *Van der Waerden B.L.* A History of Algebra: From Al-Khwarizmi to Emmy Noether. Berlin: Springer, 1985.
3. *Korn G.A., Korn T.M.* Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. New York: Dover Publ., 2000.
4. *Polyinin A.D., Manzhilov A.V.* Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists. Boca Raton – London: Chapman & Hall/CRC Press, 2007.
5. *Zucker I.J.* The cubic equation – a new look at the irreducible case. The Mathematical Gazette, 2008. Vol. 92. No. 525. Pp. 264–268.
6. *Bronstein I.N., Semendyayev K.A.* Handbook of Mathematics, 6th ed. Berlin: Springer, 2015.
7. *Chaves-Pichardo M., Martinez-Crus M.A., Trejo-Martinez A., Vega-Crus A.B.* On the practicality of the analytical solutions for all third and fourth-degree algebraic equations with real coefficients. Mathematics, 2023. Vol. 11. No. 6. 1447.
8. *Siadat V.M., Tholen A. Omar Khayyam.* Geometric Algebra and Cubic Equations. Math Horizons, 2021. Vol. 28. No. 1. Pp. 12–15.
9. *El Naschie M.S.* The fundamental algebraic equations of the constants of nature. Chaos, Solitons & Fractals, 2008. Vol. 35. No. 2. Pp. 320–322.
10. *Struik D.J. (ed.)* A Source Book in Mathematics: 1200–1800. Princeton, Princeton University Press, 1986.
11. *Polyinin A.D.* Handbook of Exact Solutions to Mathematical Equations. Boca Raton, CRC Press, 2024.
12. *King R.B.* Beyond the Quartic Equation. Boston, Birkhäuser, 1996.
13. *Matematicheskaya ènciklopediya. T.1. [Encyclopedia of Mathematics Vol.1].* Moscow, Sovetskaya Entsiklopediya Publ., 1977. Pp. 740–741 (in Russian).
14. *Boltyansky V.G., Vilenkin N.Ya.* Simmetriya v algebre, 2-ye izd. [Symmetry in Algebra, 2nd ed. Moscow, Nauka Publ., 2002].
15. *Kudryashov N.A.* Simmetriya algebraicheskikh i differentsial'nykh uravnenij [Symmetry of algebraic and differential equations]. Soros Educational Journal, 1998. No. 9, Pp. 104–110 (in Russian).
16. *Blum-Smith B., Coskey S.* The fundamental theorem on symmetric polynomials: History's first whiff of Galois theory. The College Mathematics Journal, 2017. Vol. 48. No. 1. Pp. 18–29.