ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ», 2024, т. 13, № 4, с. 221–231

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.6

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ С ЛИМИТЕРОМ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

В.В. Завьялов
ФГУП «РФЯЦ-ВНИИТФ им. академ. Е.И. Забабахина», Снежинск, Челябинская область, 456770, Россия
e-mail: v.v.zaviyalov@vniitf.ru

Поступила в редакцию 25.03.2024 г.
После доработки: 05.08. 2024
Принята к публикации: 06.08.2024

Численное моделирование нестационарного процесса переноса излучения в кинетической модели является весьма трудоемкой задачей. Сложность обусловлена большой размерностью задачи и, дополнительно, для задач переноса лучистой энергии – сильной нелинейностью. Для детерминированных подходов, основанных на дискретизации направления полета частиц, приходится решать систему гиперболических уравнений большой размерности. Соответственно, желательно чтобы схемы, применяемые для численного моделирования, были экономичными, как по использованию памяти, так и по времени расчета и показывали приемлемые результаты для широкого диапазона чисел Куранта. В случае лучистого переноса ситуация усугубляется сильной нелинейностью решаемой задачи, что приводит к существенному изменению свойств среды на временных шагах. Это налагает повышенные требования к монотонности схем при изменении оптической толщины. Согласно теореме Годунова среди двухслойных по времени линейных схем нет монотонных схем повышенного порядка аппроксимации. Одним из направлений решения этой проблемы является разработка NFC (Nonlinear Flux Correction) схем сквозного счета, в которых повышенный порядок точности на гладких решениях и монотонность достигаются за счет нелинейной коррекции потоков. Численное решение монотонизируется с помощью специального алгоритма в окрестностях больших градиентов точного решения. В работе приводится краткий обзор и характеристика конечно-разностной схемы, разработанной и много лет успешно применяемой в РФЯЦ-ВНИИТФ для решения проблем переноса излучения. Для монотонизации схемы используется методология TVD (Total Variation Diminishing).

Ключевые слова: кинетическое уравнение переноса, TVD, разностная схема, численный метод.
DOI: 10.26583/vestnik.2024.348
EDN HZCNVX

ВВЕДЕНИЕ

Численное моделирование нестационарного переноса излучения в кинетической постановке, особенно с учетом энергетического спектра, является весьма трудоемкой вычислительной задачей. В трехмерном случае размерность фазового пространства решения достигает семи. Для детерминированных подходов распространенной практикой является дискретизация пространства направлений полета частиц и интегрирование уравнения переноса вдоль каждой траектории. Возникающие при аппроксимации системы дискретных уравнений могут иметь внушительную размерность и требовать значительных объемов памяти и больших времен для обращения [1], [2]. Соответственно, желательно, чтобы применяемые схемы были экономичными, как по использованию памяти, так и по времени расчета и показывать приемлемые результаты для широкого диапазона чисел Куранта. В случае численного моделирования лучистого переноса ситуация усугубляется сильной нелинейностью решаемой задачи [2]. Свойства среды могут сильно меняться на временных шагах и даже на итерациях. Это налагает повышенные требования к монотонности схем. Согласно теореме Годунова [3] среди двухслойных по времени линейных схем нет монотонных схем повышенного порядка аппроксимации. Одним из направлений решения этой проблемы является разработка NFC (Nonlinear Flux Correction) схем сквозного счета, в которых повышенный порядок точности на гладких решениях и монотонность достигаются за счет нелинейной коррекции потоков. Численное решение монотонизируется с помощью специального алгоритма в окрестностях больших градиентов точного решения. В работе [4] было рассмотрено два варианта нелинейной конечно-

разностной схемы с лимитером для решения нестационарного уравнения переноса в плоском случае. Вариант, предложенный автором, оказался более удачным и в дальнейшем много лет развивался и использовался для моделирования задач переноса нейтральных частиц в РФЯЦ-ВНИИТФ [5–14]. В работе [5] схема была обобщена на двумерный случай и для сильно неортогональных сеток А.Д. Гаджиевым предложено применять метод наименьших квадратов к оператору дивергенции, что может улучшать решение. Для сетки из произвольных выпуклых многоугольников в двумерной геометрии модификация схемы предложена в [15]. Различные варианты схемы рассматривались А.А. Шестаковым в [7], но все они по мнению автора уступают исходной схеме. Отметим, что несмотря на развитие вычислительной техники для широкого класса задач переноса излучения развиваются и используются HOLO алгоритмы [9–12] и их дальнейшие упрощения, например, P1 приближение [13–14]. Для этих гиперболических уравнений также можно применять подход из [4]. Вообще говоря, неявные схемы TVD хорошо известны и применяются на практике [16–18]. Однако их применение, как правило, приводит к трехточечному шаблону и итерационному методу их решения, что может оказываться обременительным на практике.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для упрощения рассмотрим кинетическое уравнения переноса излучения в моноэнергетическом случае, которое для изотропного рассеяния выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial I}{c\partial t}+\nabla\cdot(\mathbf{\Omega}I)+\alpha I=\frac{\alpha_s}{4\pi}\int\limits_{\mathbf{\Omega}} I d\mathbf{\Omega}. \qquad (1)$$

Здесь $I(\mathbf{r},\mathbf{\Omega},t)$ – функция распределения частиц, $\alpha_c(\mathbf{r})$ – коэффициент ослабления, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, $\mathbf{\Omega}$ – единичный вектор в направлении полета частицы, t – время, c – скорость.

Для уравнения (1) в области Г пространства $\square^{\overline{n}}$ с замкнутой границей $\overline{\Gamma}$ решается смешанная задача со следующими начальными и граничными условиями:

$$I(\mathbf{r},\mathbf{\Omega},t=0)=I^0(\mathbf{r},\mathbf{\Omega}),$$
$$I(\mathbf{r}\in\overline{\Gamma},\mathbf{n}\cdot\mathbf{\Omega}<0,t)=I^-(\mathbf{r}\in\overline{\Gamma},\mathbf{\Omega},t),$$

где $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к $\overline{\Gamma}$.

В случае чисто поглощающей среды в плоской геометрии мы получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial I}{c\partial t}+\mu\frac{\partial I}{\partial z}=-\alpha_c I. \qquad (2)$$

Обозначим μ – косинус угла полета частиц, n – временной индекс, I_* – значение в центре ячейки, I^+, I^- – значения на неосвещенных и на освещенных гранях соответственно. Пусть $\alpha_c=\text{const}$, тогда для равномерных сеточных шагов по пространству и времени запишем схему из [4]:

$$I_*^{n+1}=\left(\frac{1}{c\Delta t}I_*^n+\frac{|\mu|}{\Delta z}\left(I^-\right)^{n+1}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{c\Delta t}+\frac{|\mu|}{\Delta z}\hat{L}_*^n+\alpha_c\right)^{-1},$$
$$L_*^n=L\left(\left(I^+-I^-\right)_*^n,\ \left(I^+-I^-\right)_{*-\text{sign}n\mu}^n\right), \qquad (3)$$
$$\hat{L}_*^n=1+\text{sign}n\mu\frac{L_*^n}{2I_*^n},\quad \left(I^+\right)^{n+1}=\hat{L}_*^n I_*^{n+1}.$$

Здесь $\mathrm{L}(I)$ некоторая функция-ограничитель (лимитер). Если положить ее равной 0, то мы получим хорошо известную неявную противопоточную схему первого порядка, которая в теории переноса называется шаговой (St-схема). В качестве ограничителя обычно используют односторонние производные и их добавление эквивалентно введению антидиффузии в St схему таким образом, чтобы новая схема имела бы второй порядок аппроксимации и сохраняла при этом монотонность. Поскольку $\hat{L}_*$ является дробно-линейным функционалом, то в предположении слабого изменения на итерациях можно брать его с n-го шага, что позволяет использовать экономичный алгоритм бегущего счета поскольку сводит схему к двухточечному шаблону. Это привносит в схему погрешность порядка $O(\Delta t)$, что непринципиально при аппроксимации по времени неявной схемой Эйлера. Ограничители аналогичные (3) в случае криволинейных геометрий применяются к угловым переменным.

Вообще говоря, схемы относящиеся к классу TVD (Total Variation Diminishing) уменьшают или сохраняют полную вариацию функции. Такое условие невозрастания вариации численно-

го решения, или TVD принцип, является более слабым, чем требование монотонности. Теория схем, принадлежащих к классу, удовлетворяющих критерию невозрастания полной вариации достаточно хорошо развита и продолжает совершенствоваться, например, [16–18]. Полная вариация $TV\left[I\right]$ для ограниченной функции $I\left(z\right)$ определяется как

$$TV\left[I\right]=\sup_{\hat{i}}\sum_{\hat{i}}\left|I\left(z_i\right)-I\left(z_{i-1}\right)\right|,\quad z_0<z_i<\ldots<z_{\hat{i}},$$

или для дифференцируемой функции в виде

$$TV\left[I\right]=\int_{z_0}^{z_{\hat{i}}}\left|\frac{dI}{dz}\right|dz.$$

В статьях [4–5] показано, что рассматриваемая схема не принадлежит к классу TVD схем (не удовлетворяет критерию Хартена [16]), однако разница составляет третий порядок малости. В работах [11–12] в одномерном случае была предпринята попытка использовать величины в лимитере с текущего временного слоя. Для этого авторам пришлось дополнительно разработать итерационный процесс и решать его методом Ньютона. Ценой усложнения алгоритма и дополнительными временными расходами удалось несколько повысить точность расчетов.

Так как автор использует ограничители, удолетворяющие критерию TVD [16], то для удобства будем называть рассматриваемую схему в дальнейшем TVD$^+$.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СХЕМЫ

В стационарном режиме (2) переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\mu\frac{\partial I}{\partial z}=-\alpha_c I,$$

имеющее точное решение:

$$I^+=e^{-z\alpha_c/\mu}I^-. \qquad (3)$$

Соотношение (3) описывает хорошо известный закон Бугера–Ламберта в теории переноса излучения [1], [2]. Точное решение удобно использовать для численного исследования порядка сходимости схемы.

Рассмотрим следующий тест. Положим $\alpha_c=5,\ \mu=1,\ I^-=10000,\ z\in\left[0,1\right]$ и начальный шаг сетки $h_0=0.1$. Тогда точное решение определяется формулой $I^+=10000e^{-5z}$. Расчеты проводились по схеме TVD$^+$ на последовательно сгущающихся сетках из 10, 20, 40, 80, 160 ячеек. Использовались следующие ограничители – Ван Альбада (VA), Чакравати-Ошера (CO), SuperBee (SB) [16]

$$L_{VA}\left(a,b\right)=\frac{\left(a^2+\varepsilon^2\right)b+\left(b^2+\varepsilon^2\right)a}{a^2+b^2+2\varepsilon^2},\ \ \varepsilon^2=O\left(h^3\right);$$

$$L_{SB}\left(a,b\right)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{sgn}\left(a\right)+\mathrm{sgn}\left(b\right)\right)\max\left(\min\left(2\left|a\right|,\left|b\right|\right),\ \min\left(\left|a\right|,2\left|b\right|\right)\right);$$

$$L_{CO}\left(a,b\right)=\frac{1-\delta}{2}L_{MM}\left(a,\beta b\right)+\frac{1+\delta}{2}L_{MM}\left(\beta a,b\right);$$

$$L_{MM}\left(a,b\right)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{sgn}\left(a\right)+\mathrm{sgn}\left(b\right)\right)\min\left(\left|a\right|,\left|b\right|\right).$$

Здесь $L_{MM}\left(a,b\right)$ – хорошо известный ограничитель MINMOD, δ – параметр, определяющий тип схемы и порядок аппроксимации, $0\le\beta\le\frac{3-\delta}{1-\delta}$ – параметр сжатия. В расчетах использовались значения $\beta=3,\ \delta=1/3$.

Для сравнения использовались хорошо известные в теории переноса линейные St, DD, LC схемы [3]. Формально они имеют первый, второй и четвертый порядок точности соответственно. В LC схему в плоском стационарном случае вырождается схема DDAD, предложенная сотрудниками РФЯЦ-ВНИИТФ в [19]. К сожалению, DDAD схема немонотонна и неположительна, что потребовало дальнейших работ в этом направлении.

По данным расчетов можно вычислить порядок численной сходимости в некоторой абсолютной сеточной норме L_* по формуле

$$\alpha_{L_*}=\log_2\frac{\left\|\delta I_h\right\|_{L_*}}{\left\|\delta I_{h/2}\right\|_{L_*}},\quad \left\|\delta I_h\right\|_{L_*}=\left\|I_{\mathrm{exact}}-I_h\right\|_{L_*},$$

где I_h – численное решение с шагом сетки h. Далее в табл. 1–6 приводятся результаты исследования численной сходимости в формате «абсолютная погрешность (относительная погрешность %)» в широко используемых нормах L_1, L_2, L_∞. Также приводятся порядки численной сходимости и погрешность разности $\Delta I^+=\left(I^+_{\mathrm{exact}}-I^+_h\right)/I^+_{\mathrm{exact}}\cdot 100\ \%$.

Таблица 1. Результаты для St-схемы

$1/h$	$\|\delta I_h\|_{L_1}$	$\|\delta I_h\|_{L_2}$	$\|\delta I_h\|_{L\infty}$	α_{L_1}	α_{L_2}	α_{L_∞}	ΔI^+
10	279.45 (14.21 %)	401.48 (12.96 %)	1121.34 (57.03 %)	–	–	–	–157.37 %
20	155.89 (7.86 %)	237.82 (7.56 %)	824.97 (41.63 %)	0.84	0.76	0.44	–71.11 %
40	82.60 (4.16 %)	128.98 (4.08 %)	505.24 (25.45 %)	0.92	0.88	0.71	–33.47 %
80	42.55 (2.14 %)	67.11 (2.12 %)	280.57 (14.12 %)	0.96	0.94	0.85	–16.19 %
160	21.60 (1.08 %)	34.23 (1.08 %)	147.99 (7.45 %)	0.98	0.97	0.92	–7.95 %

Таблица 2. Результаты для DD-схемы

$1/h$	$\|\delta I_h\|_{L_1}$	$\|\delta I_h\|_{L_2}$	$\|\delta I_h\|_{L\infty}$	α_{L_1}	α_{L_2}	α_{L_∞}	ΔI^+
10	38.73 (1.97 %)	72.19 (2.33 %)	211.99 (10.78 %)	–	–	–	10.26 %
20	9.58 (0.48 %)	18.32 (0.58 %)	63.92 (3.23 %)	2.02	1.98	1.73	2.59 %
40	2.39 (0.12 %)	4.60 (0.15 %)	17.63 (0.89 %)	2.0	1.99	1.86	0.65 %
80	0.60 (0.03 %)	1.15 (0.04 %)	4.64 (0.23 %)	2.0	2.0	1.93	0.16 %
160	0.15 (0.01 %)	0.29 (0.01 %)	1.19 (0.06 %)	2.0	2.0	1.96	0.04 %

Таблица 3. Результаты для LC-схемы

$1/h$	$\|\delta I_h\|_{L_1}$	$\|\delta I_h\|_{L_2}$	$\|\delta I_h\|_{L_\infty}$	α_{L_1}	α_{L_2}	α_{L_∞}	ΔI^+
10	20.54 (1.04%)	32.37 (1.04%)	81.38 (4.14%)	–	–	–	0.0 %
20	5.16 (0.26%)	8.20 (0.26%)	23.00 (1.16%)	1.99	1.98	1.82	0.0 %
40	1.29 (0.07%)	2.06 (0.07%)	6.12 (0.31%)	2.0	2.0	1.91	0.0 %
80	0.32 (0.02%)	0.51 (0.02%)	1.58 (0.08%)	2.0	2.0	1.96	0.0 %
160	0.08 (0.001%)	0.13 (0.002%)	0.40 (0.02%)	2.0	2.0	1.98	0.0 %

Таблица 4. Результаты для TVD$^+$(CO)-схемы

$1/h$	$\|\delta I_h\|_{L_1}$	$\|\delta I_h\|_{L_2}$	$\|\delta I_h\|_{L_\infty}$	α_{L_1}	α_{L_2}	α_{L_∞}	ΔI^+
10	87.76 (4.46 %)	129.03 (4.17 %)	258.39 (13.14 %)	–	–	–	26.4 %
20	13.43 (0.68 %)	17.57 (0.56 %)	56.04 (2.83 %)	1.96	1.76	1.19	5.6 %
40	3.42 (0.17 %)	4.54 (0.14 %)	16.71 (0.84 %)	2.13	2.01	1.6	1.3 %
80	0.86 (0.04 %)	1.15 (0.04 %)	4.53 (0.23 %)	2.13	2.1	1.8	0.3 %
160	0.28 (0.01 %)	0.52 (0.02 %)	2.87 (0.14 %)	2.09	2.1	1.9	0.08 %

Таблица 5. Результаты для TVD$^+$(VA)-схемы

$1/h$	$\|\delta I_h\|_{L_1}$	$\|\delta I_h\|_{L_2}$	$\|\delta I_h\|_{L_\infty}$	α_{L_1}	α_{L_2}	α_{L_∞}	ΔI^+
10	64.11 (3.26 %)	93.32 (3.01 %)	218.01 (11.09 %)	–	–	–	0.27 %
20	15.15 (0.76 %)	28.04 (0.89 %)	97.57 (4.92 %)	2.08	1.73	1.16	1.12 %
40	3.23 (0.16 %)	6.87 (0.22 %)	32.63 (1.64 %)	2.23	2.03	1.58	0.46 %
80	0.71 (0.04 %)	1.56 (0.05 %)	9.44 (0.48 %)	2.19	2.14	1.79	0.14 %
160	0.16 (0.01 %)	0.35 (0.01 %)	2.54 (0.13 %)	2.12	2.15	1.89	0.04 %

Таблица 6. Результаты для TVD^{+}(SB)-схемы

$1/h$	$\|\delta I_h\|_{L_1}$	$\|\delta I_h\|_{L_2}$	$\|\delta I_h\|_{L_\infty}$	α_{L_1}	α_{L_2}	α_{L_∞}	ΔI^{+}
10	115.48 (5.87 %)	158.88 (5.13 %)	288.01 (14.65 %)	–	–	–	49.27 %
20	32.72 (1.65 %)	50.53 (1.61 %)	129.32 (6.53 %)	1.82	1.65	1.16	10.89 %
40	3.23 (0.16 %)	6.87 (0.22 %)	32.63 (1.64 %)	1.99	1.9	1.58	2.64 %
80	8.22 (0.41 %)	13.55 (0.43 %)	43.48 (2.19 %)	2.03	1.99	1.79	0.65 %
160	2.01 (0.1 %)	0.84 (0.03 %)	3.40 (0.17 %)	2.03	2.01	1.89	0.16 %

Далее на рисунках 1–6 логарифмическом масштабе приводятся численные порядки сходимости этих схем в абсолютных нормах L_1, L_2, L_∞. На рисунках обозначено: пунктирная линия – норма L_1, штрихпунктирная линия – норма L_2, сплошная линия – норма L_∞.

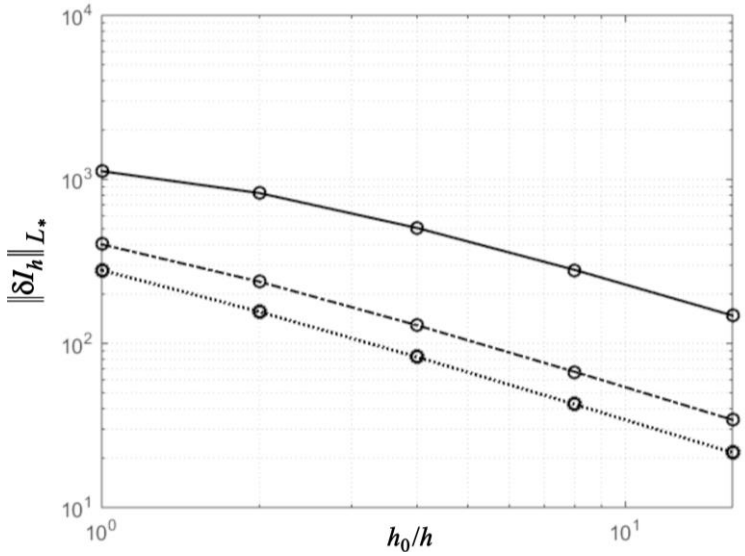

Рис. 1. Порядок численной сходимости для St-схемы

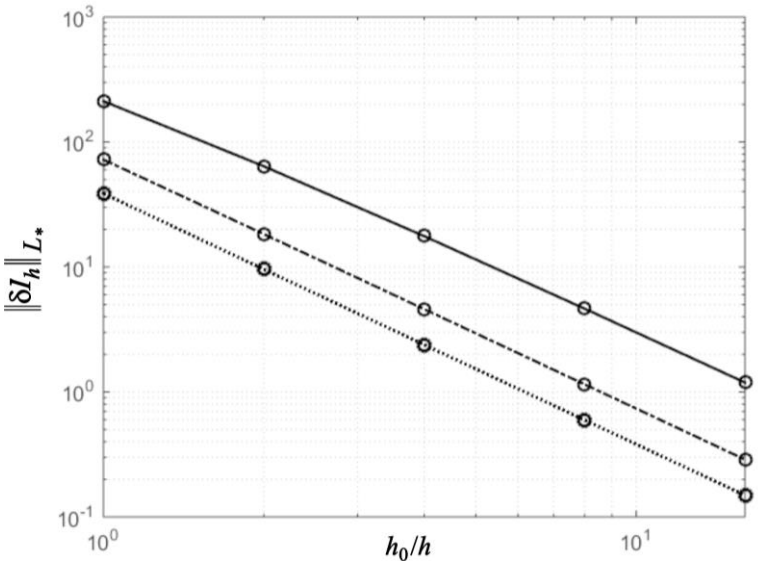

Рис. 2. Порядок численной сходимости для LC-схемы

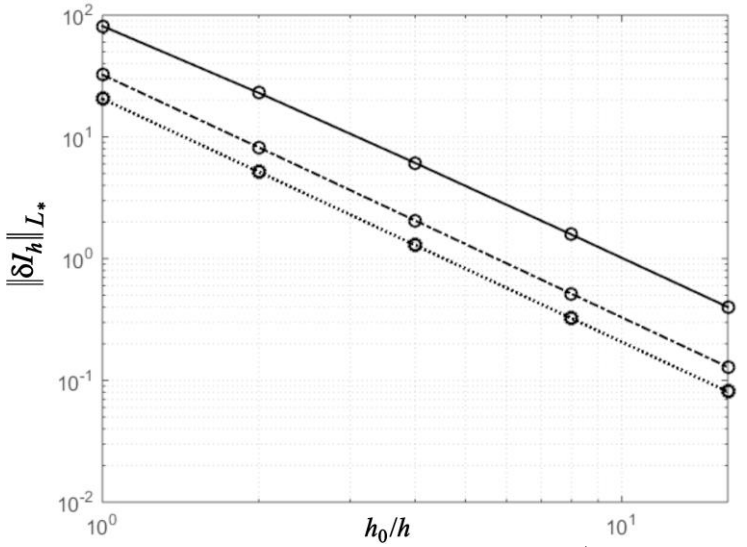

Рис. 3. Порядок численной сходимости для TVD$^+$(CO)-схемы

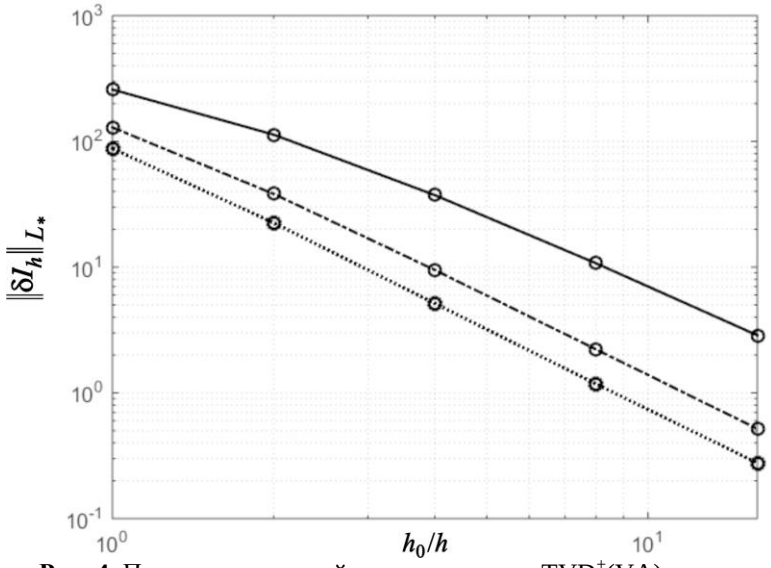

Рис. 4. Порядок численной сходимости для TVD$^+$(VA)-схемы

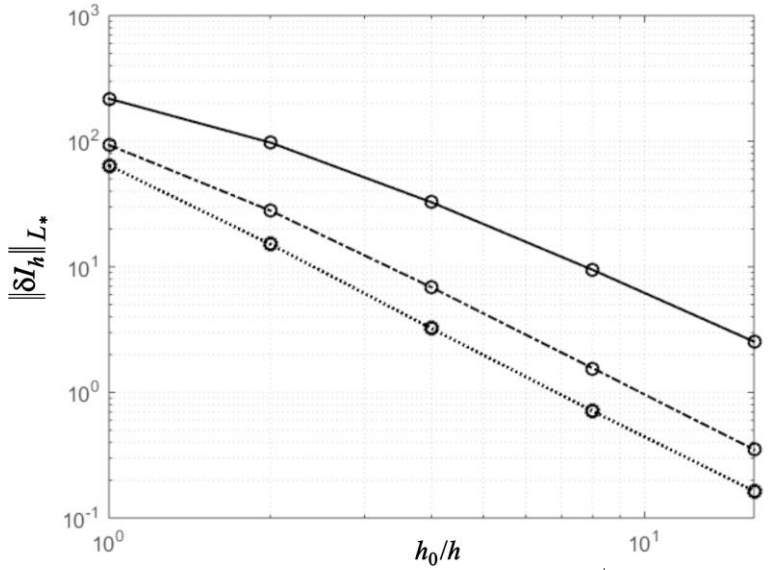

Рис. 5. Порядок численной сходимости для TVD$^+$(SB)-схемы

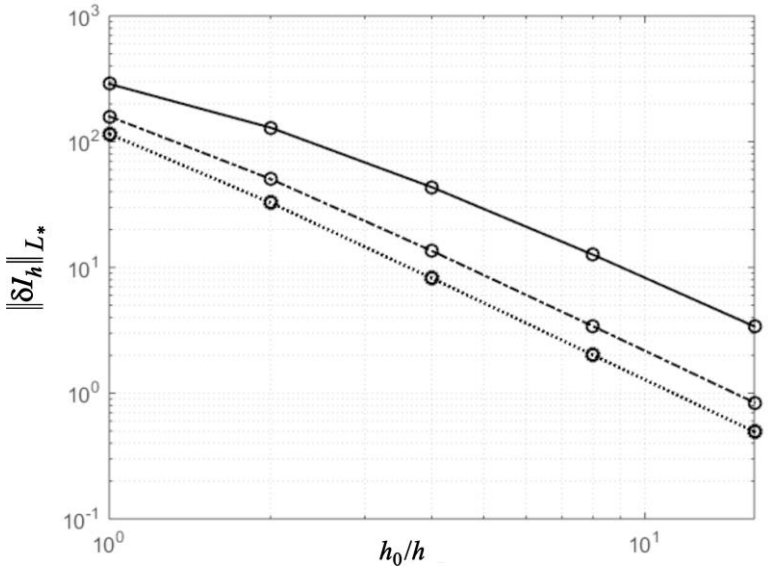

Рис 6. Численная сходимость в сеточных нормах L_* для TVD$^+$(SB) схемы

Из анализа результатов следует, что на гладком решении порядок численной сходимости St схемы меньше 1, для DD, LC схем близок к 2, что вполне соответствует ожиданиям. Схема TVD$^+$ показала сопоставимые результаты со схемами повышенного порядка точности для рассмотренных ограничителей. Выбор ограничителей обусловлен исключительно предпочтениями автора и практическим опытом. Ее сходимость несколько хуже немонотонных и неположительных схем LC и DD. Однако, например, для DD схемы условие положительности $\frac{\alpha_c \Delta z}{2|\mu|} > 1$ является достаточно обременительным. Обращает на себя внимание результат LC схемы для величины I^+, которая вычисляется точно. Это объясняется тем, что в конечно-разностном представлении решения (3) экспонента присутствует явно, а не в приближенном виде [1]. Отметим, что ранее аналогичные результаты в норме L_1 схема TVD$^+$ продемонстрировала в [10] на двух тестовых задачах в двумерной осесимметричной геометрии.

ЗАМЕЧАНИЕ

Полагая в кинетическом уравнении $\frac{\partial I}{\partial t} = 0$, мы получим квазистационарный (стационарный в случае нейтронов) режим. Если предположить, что рассматриваемое уравнение (1) имеет асимптотическое решение в форме

$$I = \tilde{I} e^{\lambda t}, \quad \lambda = \frac{\partial \ln\left(\int\limits_{\mathbf{\Omega}} I d\mathbf{\Omega}\right)}{\partial t},$$

то тогда решение нестационарного уравнения выходит на регулярный режим, где параметр λ может быть определен как предел логарифмической производной от интегральной функции распределения частиц по времени. В этом случае получаем

$$\mathbf{\Omega} \nabla \tilde{I} + \left(\alpha + \frac{\lambda}{c}\right) \tilde{I} = \frac{\alpha_s}{4\pi} \int\limits_{\mathbf{\Omega}} \tilde{I} d\mathbf{\Omega}. \qquad (4)$$

При этом краевые условия остаются в силе с точностью до переобозначения. Так как асимптотическое решение (4) имеет экспоненциальный характер, функция $\tilde{I}(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$ гораздо слабее зависит от времени, чем решение $I(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t)$. Уравнение переноса в регулярном режиме (4) занимает промежуточное положение между нестационарным и квазистационарным режимами [2]. Это позволяет существенно экономить память компьютера, так как не нужно хранить величины с предыдущего шага. В этом случае можно также использовать схему TVD$^+$, применив в лимитере величины с предыдущей итерации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для численного моделирования процессов переноса излучения в кинетической модели для многомерной геометрии ранее была предложена

абсолютно устойчивая консервативная нелинейная схема с лимитером. Впоследствии она была использована для решения гиперболических систем уравнений, являющимися следствиями исходной системы. В статье приведены ее краткая характеристика, обзор источников и показан реальный численный порядок сходимости для типовой модельной задачи. Она не требует дополнительных затрат по памяти, положительна и квазимонотонна, но на практике ее немонотонность проявляется чрезвычайно редко. Вообще говоря, даже схемы, принадлежащие к классу TVD, могут демонстрировать немонотонность [20]. Схема использует для нахождения основных величин двухточечный сеточный шаблон на искомом временном шаге и более широкий шаблон для TVD реконструкции основных величин и их производных с предыдущего шага, что важно для решения кинетического уравнения переноса в многомерном случае ввиду большого числа направлений. Такая аппроксимация позволяет пользоваться экономичными численными методами, в которых число арифметических операций пропорционально количеству узлов разностной сетки. Для повышения порядка аппроксимации применяется ограничитель, который использует информацию на трехточечном шаблоне в каждом направлении. В результате, в граничных ячейках может несколько понижаться точность расчета. Во избежание этого эффекта в таких ячейках разумно применять другие схемы. Лимитер вполне можно брать даже с предыдущего временного шага, что обычно приемлемо понижает точность. Также к достоинствам можно отнести следующие качества. Простота реализации – повышение точности достигается при незначительном усложнении алгоритма St схемы и обеспечивает второй порядок аппроксимации по пространству кроме отдельных точек с экстремумами. Сопоставимое со St схемой число итераций за счет монотонного поведения численного решения и отсутствия переключений, применяего в гибридных схемах, например DD/St [15]. Это очень важно поскольку, как правило, для кинетического уравнения переноса правая часть зависит от решения и необходимо использовать итерационные методы. Во многих случаях это оказывается чрезвычайно обременительным ввиду большой размерности и сильной нелинейности в случае переноса фотонов. Автором неоднократно применялась возможность использования в лимитере величин с предыдущей итерации. Это, как правило, несколько повышает точность, но может приводить к увеличению числа итераций и, соответственно, времени расчета. Некоторым недостатком предлагаемого подхода является неоднозначность выбора лимитера, что в зависимости от задачи может влиять на результаты численных расчетов.

Приведенные в статье расчеты на тестовой задаче, описывающей базовый закон Бугера-Ламберта для задач переноса излучения и многолетний опыт эксплуатации в РФЯЦ-ВНИИТФ показывают практическую эффективность схемы.

Очевидно, рассмотренная схема может применяться и для моделирования других явлений, но автором она применялась только для переноса излучения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Басс Л.П., Волощенко А.М., Гермогенова Т.А.* Методы дискретных ординат в задачах о переносе излучения. М.: ИПМ АН СССР, 1986. 231 с.

2. *Pomraning G.C.* The Equations of Radiation Hydrodynamics. New York, Dover Publications Inc., 2005. 286 p.

3. *Годунов С.К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Математический сборник, 1959. Т. 47(89). № 3. С. 271–306.

4. *Гаджиев А.Д., Завьялов В.В., Шестаков А.А.* Применение TVD подхода к DSn методу решения уравнения переноса теплового излучения // ВАНТ; сер.: Математическое моделирование физических процессов, 2009. Вып. 2. С. 37–48.

5. *Гаджиев А.Д., Завьялов В.В., Шестаков А.А.* Применение TVD подхода к DSn методу решения уравнения переноса теплового излучения в осесимметричной RZ геометрии // ВАНТ; сер.: Математическое моделирование физических процессов, 2010. Вып. 2. С. 30–39.

6. *Арсентьев А.П., Писарев В.Н.* Особенности применения TVD подхода к DSn методу решения трехмерного уравнения переноса нейтронов в криволинейной системе координат // ВАНТ; сер.: Математическое моделирование физических процессов, 2011. Вып. 1. С. 25–39.

7. *Шестаков А.А.* TVDR схемы для решения системы уравнений переноса теплового излучения // ВАНТ; сер.: Математическое моделирование физических процессов, 2019. Вып. 2. С. 17–36.

8. *Гаджиев А.Д., Кошутин Д.А., Шестаков А.А.* DSn метод с TVD реконструкцией и синтетическим P1SA методом ускорения итераций для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в осесимметричной RZ геометрии // ВАНТ; сер.: Математическое моделирование физических процессов, 2016. Вып. 4. С. 13–19.

9. *Гаджиев А.Д., Грабовенская С.А., Завьялов В.В., Шестаков А.А.* Применение TVD подхода к решению уравнения переноса теплового излучения квазидиффузионным методом // ВАНТ; сер.: Математическое моделирование физических процессов, 2010. Вып. 3. С. 3–14.

10. *Грабовенская С.А., Завьялов В.В., Шестаков А.А.* О двух подходах эффективного понижения размерности для задач переноса теплового излучения в многомерной геометрии // Математическое моделирование, 2021. Т. 33. № 9. С. 35–46.

11. *Егорова А.С., Карлыханов Н.Г.* Решение кинетического уравнения переноса излучения методом усредненных косинусов // ВАНТ; сер.: Математическое моделирование физических процессов, 2011. Вып. 3. С. 29–38.

12. *Исакова А.С., Карлыханов Н.Г.* Сравнительный анализ квазидиффузионного подхода и метода усредненных косинусов для решения кинетического уравнения переноса излучения // ВАНТ; сер.: Математическое моделирование физических процессов, 2013. Вып. 3. С. 16–29.

13. *Вершинская А.С., Гаджиев А.Д., Грабовенская С.А., Шестаков А.А.* Применения TVD подхода к решению уравнения переноса теплового излучения в P1 приближении // ВАНТ; сер.: Математическое моделирование физических процессов, 2009. Вып. 2. С. 21–36.

14. *Гаджиев А.Д., Чубарешко И.С., Шестаков А.А.* Неявный конечно-объемный TVD метод для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в P1 приближении // ВАНТ; сер.: Математическое моделирование физических процессов, 2017. Вып. 2. С. 18–29.

15. *Барабанов С. К.* Схемы типа TVD для численного решения двумерного кинетического уравнения переноса в декартовой системе координат на неструктурированных сетках // Сборник докладов 16-й научно-технической конференции «Молодежь в науке», Саров, 2017. Т. 1. С. 45–50.

16. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. 656 с.

17. *Yee H.C.* A Class of High-Resolution Explicit and Implicit Shock-Capturing Methods. NASA Ames Research Center Computational Fluid Dynamics Branch, California, 94035 USA, 1989. 218 p.

18. *Чирков Д.В., Черный С.Г.* Сравнение точности и сходимости некоторых TVD схем // Вычислительные технологии, 2000. Т. 5. № 5. С. 86–107.

19. *Гаджиев А.Д., Кондаков И.А., Писарев В.Н., Стародумов О.И., Шестаков А.А.* Метод дискретных ординат с искусственной диссипацией (DDAD-схема) для численного решения уравнения переноса нейтронов // ВАНТ; сер.: Математическое моделирование физических процессов, 2003. Вып. 4. С. 13–24.

20. *Хакимзянов Г.С., Шокина Н.Ю.* Некоторые замечания о схемах, сохраняющих монотонность численного решения // Вычислительные технологии, 2012. Т. 17. № 2. С.78–98.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2024, vol. 13, no. 4, pp. 221–231

A NONLINEAR FINITE-DIFFERENCE SCHEME WITH A LIMITER FOR RADIATION TRANSPORT SIMULATION

V.V. Zavyialov

FSUE «RFNC-VNIITF named after Academ. E.I. Zababakhin», Snezhinsk, Chelyabinsk region, 456770, Russia

e-mail: v.v.zaviyalov@vniitf.ru

Received March 25, 2024; revised August 5, 2024; accepted August 6, 2024

Numerical modeling of non-stationary radiation transfer process in the kinetic model is a very labor-intensive task. The complexity is caused by the large dimension of the problem and, additionally, for radiant energy transfer problems – by strong nonlinearity. For deterministic approaches based on discretization of the particle flight direction, it is necessary to solve a system of hyperbolic equations of large dimension. Accordingly, it is desirable that the schemes used for numerical modeling are economical both in terms of memory use and calculation time and show acceptable results for a wide range of Courant numbers. In the case of radiant transfer, the situation is aggravated by the strong nonlinearity of the problem being solved, which leads to a significant change in the properties of the medium at time steps. This imposes increased requirements for the monotonicity of the schemes with a change in optical thickness. According to Godunov's theorem, among two-layer linear schemes in time, there are no monotonic schemes of a higher approximation order. One of the directions of solving this problem is the development of NFC (Nonlinear Flux Correction) schemes of end-to-end counting, in which an increased order of accuracy on smooth solutions and monotonicity are achieved due to nonlinear correction of flows. The numerical solution is monotonized using a special algorithm in the vicinity of large gradients of the exact solution. The paper provides a brief overview

and characteristics of the finite-difference scheme developed and successfully used for many years at RFNC-VNIITF to solve radiation transfer problems. The TVD (Total Variation Diminishing) methodology is used to monotonize the scheme.

Keywords: kinetic transport equation, TVD, finite-difference scheme, numerical method.

REFERENCES

1. *Bass L.P., Voloshhenko A.M., Germogenova T.A.* Metody diskretnyh ordinat v zadachah o perenose izlucheniya [Methods of Discrete Ordinates in Radiation Transport Problems]. Moscow, IPM AN USSR Publ., 1986. 231 p. (in Russian).

2. *Pomraning G.C.* The Equations of Radiation Hydrodynamics. New York, Dover Publications Inc., 2005, 286 p.

3. *Godunov S.K.* Raznostnyj metod chislennogo rascheta razryvnyh reshenij uravnenij gidrodinamiki [Difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of hydrodynamic equations]. Matematicheskij sbornik, 1959. Vol. 47(89). No. 3. Pp. 271–306. (in Russian).

4. *Gadzhiev A.D., Zaviyalov V.V., Shestakov A.A.* Primenenie TVD podhoda k DSn metodu resheniya uravneniya perenosa teplovogo izlucheniya [Application of the TVD Approach to the DSn Method for Solving the Thermal Radiation Transfer Equation]. VANT, Seriya «Matematicheskoe modelirovanie fizicheskih processov», 2009. Iss. 2. Pp. 37–48 (in Russian).

5. *Gadzhiev A.D., Zaviyalov V.V., Shestakov A.A.* Primenenie TVD podhoda k DSn metodu resheniya uravneniya perenosa teplovogo izlucheniya v osesimmetrichnoj RZ geometrii [Application of the TVD Approach to the DSn Method for Solving the Equation of Thermal Radiation Transfer in Axisymmetric RZ Geometry]. VANT, Seriya «Matematicheskoe modelirovanie fizicheskih processov», 2010. Iss. 2. Pp. 30–39 (in Russian).

6. *Arsent`ev A.P., Pisarev V.N.* Osobennosti primeneniya TVD podhoda k DSn metodu resheniya trekhmernogo uravneniya perenosa nejtronov v krivolinejnoj sisteme koordinat [Features of the Application of the TVD Approach to the DSn Method for Solving the Three-dimensional Neutron Transport Equation in a Curvilinear Coordinate System]. VANT, Seriya «Matematicheskoe modelirovanie fizicheskih processov», 2011. Iss. 1. Pp. 25–39 (in Russian).

7. *Shestakov A.A.* TVDR skhemy dlya resheniya sistemy uravnenij perenosa teplovogo izlucheniya [TVDR Schemes to Solve a System of Radiative Heat Transfer Equations]. VANT, Seriya «Matematicheskoe modelirovanie fizicheskih processov», 2019. Iss. 2. Pp. 17–36 (in Russian).

8. *Gadzhiev A.D., Koshutin D.A., Shestakov A.A.* DSn metod s TVD rekonstrukciej i sinteticheskim P1SA metodom uskoreniya iteracij dlya chislennogo resheniya dvumernogo uravneniya perenosa teplovogo izlucheniya v osesimmetrichnoj RZ geometrii [DSn Method with TVD Reconstruction and Synthetic P1SA Iteration Acceleration Method for the Numerical Solution of the Two Dimensional Equation of Thermal Radiation Transfer in Axisymmetric RZ Geometry]. VANT, Seriya «Matematicheskoe modelirovanie fizicheskih processov», 2016. Iss. 4. Pp. 13–19 (in Russian).

9. *Gadzhiev A.D., Grabovenskaya S.A., Zaviyalov V.V., Shestakov A.A.* Primenenie TVD podhoda k resheniyu uravneniya perenosa teplovogo izlucheniya kvazidiffuzionnym metodom [Application of the TVD Approach to Solving the Equation of Thermal Radiation Transfer Using the Quasidiffusion Method]. VANT, Seriya «Matematicheskoe modelirovanie fizicheskih processov», 2010. Iss. 3. Pp. 3–14 (in Russian).

10. *Grabovenskaya S.A., Zaviyalov V.V., Shestakov A.A.* O dvuh podhodah effektivnogo ponizheniya razmernosti dlya zadach perenosa teplovogo izlucheniya v mnogomernoj geometrii [Two Approaches to Effectively Reduce the Size tf Radiative Heat Transfer Problems in Multidimensional Geometry]. Matematicheskoe modelirovanie, 2021. Vol. 33. No. 9. Pp. 35–46.

11. *Egorova A.S., Karlyhanov N.G.* Reshenie kineticheskogo uravneniya perenosa izlucheniya metodom usrednennyh kosinusov [Solution of the Kinetic Equation of Radiation Transfer by the Averaged Cosine Method]. VANT, Seriya «Matematicheskoe modelirovanie fizicheskih processov», 2011. Iss. 3. Pp. 29–38 (in Russian).

12. *Isakova A.S., Karlyhanov N.G.* Sravnitel'nyj analiz kvazidiffuzionnogo podhoda i metoda usrednennyh kosinusov dlya resheniya kineticheskogo uravneniya perenosa izlucheniya [Comparative Analysis of the Quasidiffusion Approach and the Averaged Cosine Method for Solving the Kinetic Equation of Radiative Transfer]. VANT, Seriya «Matematicheskoe modelirovanie fizicheskih processov», 2013. Iss. 3. Pp. 16–29 (in Russian).

13. *Vershinskaya A.S., Gadzhiev A.D., Grabovenskaya S.A., Shestakov A.A.* Primeneniya TVD podhoda k resheniyu uravneniya perenosa teplovogo izlucheniya v P1 priblizhenii [Applications of the TVD Approach to Solving the Thermal Radiation Transfer Equation in the P1 Approximation]. VANT, Seriya «Matematicheskoe modelirovanie fizicheskih processov», 2009. Iss. 2. Pp. 21–36 (in Russian).

14. *Gadzhiev A.D., Chubareshko I.S., Shestakov A.A.* Neyavnyj konechno-ob"emnyj TVD metod dlya chislennogo resheniya dvumernogo uravneniya perenosa teplovogo izlucheniya v P1 priblizhenii [Implicit Finite Volume TVD Method for the Numerical Solution of the 2D Thermal Radiation Transport Equation in the P1 Approximation]. VANT, Seriya «Matematicheskoe mod-

elirovanie fizicheskih processov», 2017. Iss. 2. Pp. 18–29 (in Russian).

15. *Barabanov S. K.* Sxemy tipa TVD dlya chislennogo resheniya dvumernogo kineticheskogo uravneniya perenosa v dekartovoj sisteme koordinat na nestrukturirovannyh setkah [TVD-type schemes for the numerical solution of the two-dimensional kinetic transport equation in a Cartesian coordinate system on unstructured grids]. Cbornik dokladov 16-j nauchno-tehnicheskoj konferencii «Molodezh v nauke», Sarov, 2017. Vol. 1. Pp. 45–50 (in Russian).

16. *Kulikovskij A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu.* Matematicheskie voprosy chislennogo resheniya giperbolicheskih sistem uravnenij [Mathematical Problems of Numerical Solution of Hyperbolic Systems]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2012. 656 p. (in Russian).

17. *Yee N.S.* A Class of High-Resolution Explicit and Implicit Shock-Capturing Methods. NASA Ames Research Center Computational Fluid Dynamics Branch, California, 94035 USA, 1989. 218 p.

18. *Chirkov D.V., Chernyj S.G.* Sravnenie tochnosti i skhodimosti nekotoryh TVD skhem. [Comparison of Accuracy and Convergence of Some TVD Schemes]. Vychislitel'nye tekhnologii, 2000. Vol. 5. No. 5. Pp. 86–107 (in Russian).

19. *Gadzhiev A.D., Kondakov I.A., Pisarev V.N., Starodumov O.I., Shestakov A.A.* Metod diskretnyh ordinat s iskusstvennoj dissipaciej (DDAD-skhema) dlya chislennogo resheniya uravneniya perenosa nejtronov [Discrete Ordinate Method with Artificial Dissipation (DDAD-scheme) for Numerical Solution of the Neutron Transport Equation]. VANT, Seriya «Matematicheskoe modelirovanie fizicheskih processov», 2003. Iss. 4. Pp. 13–24 (in Russian).

20. *Hakimzyanov G.S., Shokina N.Yu.* Nekotorye zamechaniya o skhemah, sohranyayushchih monotonnost' chislennogo resheniya [Some Notes on Monotonicity Preserving Schemes]. Vy`chislitel`ny`e texnologii, 2012. Vol. 17. No. 2. Pp. 78–98 (in Russian).