

УДК 537.8

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ РЯДАМИ

С.П. Баутин^{1,*}, А.Г. Обухов^{2,**}

¹Снежинский физико-технический институт НИЯУ МИФИ, Снежинск, 456776, Россия

²Тюменский индустриальный университет, Тюмень, 625000, Россия

*e-mail: spbautin@mail.ru

**e-mail: agobukhov@inbox.ru

Поступила в редакцию: 15.05.2024

После доработки: 15.05.2024

Принята к публикации: 05.07.2024

В работе в случае двух независимых пространственных переменных рассматривается полная система уравнений Навье-Стокса, решения которой описывают движения сжимаемого вязкого теплопроводного газа. Для нее в квадрате на плоскости xOy ставится задача Коши с непрерывными начальными данными. После соответствующего продолжения этих данных на большой квадрат решение задачи Коши представляется в виде соответствующих тригонометрических рядов по пространственным переменным. Коэффициенты рядов являются искомыми функциями от времени. Для этих коэффициентов приведена бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений с соответствующими начальными условиями. Построены конечные отрезки тригонометрических сумм, приближенно передающие решения рассматриваемых задач Коши.

Ключевые слова: полная система уравнений Навье-Стокса, задача Коши, тригонометрические ряды, приближенные решения.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.349

EDN KPTPWQ

ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день основным способом построения решений начально-краевых задач для нелинейных уравнений с частными производными являются разностные методы, при которых численно определяется конечное число значений искомых функций в отдельных изолированных точках. Но очень часто под вопросом остаются надежность и адекватность получаемых разностными методами численных результатов.

Среди аналитических методов получения решений нелинейных уравнений с частными производными одним из основных методов является использование конечных или бесконечных представлений с применением различных систем базисных функций для разных функциональных пространств.

На протяжении более чем двухсотлетней истории исследований уравнений с частными производными одним из востребованных функциональных базисов является базис из тригонометрических функций. Хотя в 1804 г. при первых

изложениях предложенного Ж.Б.Ж. Фурье подхода к решению линейного уравнения теплопроводности современники ставили чуть не в вину ему то, что он не использует степенные ряды. Заметим, что через семьдесят лет, в 1874 г., С.В. Ковалевская привела свой знаменитый контрпример, показывающий, что линейное уравнение теплопроводности может не иметь решения в виде сходящегося ряда по степеням времени [1, 2]. К сожалению, эффективность тригонометрических рядов Фурье и более поздних обобщений этого подхода имеет место только при решении линейных задач.

Чуть более десяти лет назад, т.е. спустя двести лет после первых работ Ж.Б.Ж. Фурье, методика применения бесконечных тригонометрических рядов была эффективно применена для математического моделирования одномерных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа при построении решений нелинейной системы уравнений с частными производными смешанного типа [3]. Но доказать сходимость используемых тригонометрических рядов тогда не удалось.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ РЯДАМИ

Проведенные численные расчеты [3] показали «машинную» сходимость используемых представлений: при увеличении числа слагаемых в конечных отрезках тригонометрических рядов, используемых для приближенного описания решений, отличия в разных приближениях фактически стремились к нулю.

Недавно, применяя описанную методику представления с помощью тригонометрического ряда решения задачи Коши для уравнения Бюргерса

$$u_t + uu_x = \mu_0 u_{xx}; \quad u(t, x) \Big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^0 \sin(kx),$$

являющегося нелинейным уравнением с частными производными, удалось доказать сходимость построенного тригонометрического ряда [4].

Также и в случае нелинейной системы уравнений движения построены [5, 6] сходящиеся тригонометрические ряды, задающие решения соответствующих задач Коши.

Эти факты и послужили отправной точкой для исследований, представленных в данной работе: в случае двух независимых пространственных переменных построение в виде тригонометрических рядов течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа.

1. ПОЛНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

Рассматривается полная система уравнений Навье-Стокса, решения которой в безразмерном виде описывают движения сжимаемого вязкого теплопроводного политропного газа [2]:

$$\begin{cases} \rho_t + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \\ \rho \left[\mathbf{V}_t + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] + \frac{1}{\gamma} (T \nabla \rho + \rho \nabla T) = \\ = \mu_0 \left[\frac{1}{4} \nabla (\operatorname{div} \mathbf{V}) + \frac{3}{4} \Delta \mathbf{V} \right], \\ \rho (T_t + \mathbf{V} \cdot \nabla T) + (\gamma - 1) \rho T \operatorname{div} \mathbf{V} = \\ = \kappa_0 \Delta T + \Phi(\gamma, \mu_0, \mathbf{V}), \end{cases} \quad (1.1)$$

где ρ – плотность газа; $\mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3)$ – вектор скорости газа в декартовых переменных; T – температура; μ_0, κ_0 – положительные постоянные коэффициенты вязкости и теплопроводности;

$\gamma = \text{const} > 1$; $\Phi(\gamma, \mu_0, \mathbf{V})$ – диссипативная функция:

$$\begin{aligned} \Phi = \frac{\mu_0 \gamma (\gamma - 1)}{2} & \left\{ \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} - \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right)^2 \right] + \frac{3}{2} \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Система уравнений (1.1) в дифференциальной форме передает законы сохранения массы, импульса и энергии. Константа

$$\gamma = 1 + \frac{R}{c_{vo}} > 1$$

есть показатель политропы (или показатель адиабаты) газа.

В системе (1.1) и в уравнениях состояния стандартным образом введены безразмерные переменные [2]

$$f = \frac{\tilde{f}}{f_{00}},$$

где f – безразмерное значение величины $\tilde{f}$; f_{00} – ее масштабное значение. При этом для всех пространственных переменных выбирается одно и то же масштабное значение x_{00} , а для всех компонент вектора скорости – одно и то же масштабное значение v_{00} . При выбранных значениях $\rho_{00}, T_{00}, x_{00}$ за масштабные значения v_{00}, t_{00}, p_{00} выбирают такие значения, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{aligned} v_{00} &= \sqrt{R\gamma T_{00}}, \quad t_{00} = \frac{x_{00}}{v_{00}}, \quad p_{00} = R\rho_{00}T_{00}, \\ e_{00} &= c_{vo}T_{00}. \end{aligned}$$

Из приведенных равенств следует, что за масштабные значения скорости, давления и внутренней энергии выбраны, соответственно, скорость звука, давление и внутренняя энергия газа с параметрами ρ_{00}, T_{00} .

При этом значения положительных констант μ_0 и κ_0 будут такими:

$$\mu_0 = \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho_{00} v_{00} x_{00}}, \quad \kappa_0 = \frac{\kappa}{c_{vo} \rho_{00} v_{00} x_{00}}.$$

При исследовании течений вязкого теплопроводного газа часто вводят числа Рейнольдса и Прандтля:

$$Re = \frac{\rho_{00} v_{00} x_{00}}{\mu}, \quad Pr = \frac{c_{vo} \gamma \mu}{\kappa}.$$

Тогда

$$\mu_0 = \frac{4}{3Re}$$

и

$$\begin{aligned} Pr &= c_{vo} \gamma \frac{\mu}{\kappa} = \frac{3}{4} c_{vo} \gamma \frac{\frac{3}{4} \rho_{00} v_{00} x_{00} \mu_0}{c_{vo} \rho_{00} v_{00} x_{00} \kappa_0} = \\ &= \frac{3}{4} c_{vo} \gamma \frac{\mu_0}{c_{vo} \kappa_0} = \frac{3}{4} \gamma \frac{\mu_0}{\kappa_0}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\kappa_0 = \frac{3}{4} \gamma \frac{\mu_0}{Pr}.$$

Для воздуха обычно полагают $Pr = 0.72$, $\gamma = 1.4$ и тогда

$$\kappa_0 = \frac{0.75 \cdot 1.4}{0.72} \mu_0 \approx 1.458333 \mu_0.$$

Далее рассматривается случай двумерных течений:

$$\frac{\partial}{\partial x_3} = v_3 = 0.$$

Поскольку система (1.1) не разрешена относительно производных по времени (что и затрудняет аналитическое исследование ее решений), в качестве искомым берутся: удельный объем $\delta = 1/\rho$ и давление p . Тогда полная система уравнений Навье-Стокса имеет следующий вид [2]:

$$\begin{cases} \delta_t + u \delta_x + v \delta_y - \delta (u_x + v_y) = 0, \\ u_t + u u_x + v u_y + \frac{1}{\gamma} \delta p_x = \mu_0 \delta \left(\frac{1}{4} v_{xy} + u_{xx} + \frac{3}{4} u_{yy} \right), \\ v_t + u v_x + v v_y + \frac{1}{\gamma} \delta p_y = \mu_0 \delta \left(\frac{1}{4} u_{xy} + v_{yy} + \frac{3}{4} v_{xx} \right), \\ p_t + u p_x + v p_y + \gamma p (u_x + v_y) = \kappa_0 p (\delta_{xx} + \delta_{yy}) + \\ + 2 \kappa_0 (p_x \delta_x + p_y \delta_y) + \kappa_0 \delta (p_{xx} + p_{yy}) + \\ + \mu_0 \gamma (\gamma - 1) \left[(u_x^2 - u_x v_y + v_y^2) + \frac{3}{4} (u_y + v_x)^2 \right], \end{cases} \quad (1.2)$$

а четвертое уравнение системы (1.1) (т.е. уравнение для $v_3 = w$) выполняется тождественно. В рассматриваемом случае уравнения состояния такие [2]:

$$T = \delta p, \quad e = \delta p.$$

В системе (1.2) использованы следующие обозначения: $x = x_1$, $y = x_2$, e – внутренняя энергия.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ КОШИ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЕЕ РЕШЕНИЙ

На плоскости xOy задается некоторый квадрат и, не нарушая общности рассмотрения, полагается, что он такой:

$$\{0 \leq x \leq \pi; 0 \leq y \leq \pi\}.$$

Для системы (1.2), решения которой описывают двумерные нестационарные течения сжимаемого вязкого теплопроводного политропного газа в указанном квадрате, задаются непрерывные начальные условия, разделенные по пространственным переменным:

$$\begin{cases} \delta(t, x, y) \Big|_{t=0} = 1 + \delta_1^o(x) + \delta_2^o(y), \\ u(t, x, y) \Big|_{t=0} = u_1^o(x) + u_2^o(y), \\ v(t, x, y) \Big|_{t=0} = v_1^o(x) + v_2^o(y), \\ p(t, x, y) \Big|_{t=0} = 1 + p_1^o(x) + p_2^o(y). \end{cases}$$

Функции $\delta_1^o(x)$, $p_1^o(x)$, $\delta_2^o(y)$, $p_2^o(y)$ продолжаются четным образом: первые две на отрезок $\{-\pi \leq x \leq 0\}$, вторые две функции – на отрезок $\{-\pi \leq y \leq 0\}$.

Четыре другие функции из начальных условий: $u_1^o(x)$, $v_1^o(x)$, $u_2^o(y)$, $v_2^o(y)$ – продолжаются нечетным образом: на отрезок $\{-\pi \leq x \leq 0\}$ первая пара, на отрезок $\{-\pi \leq y \leq 0\}$ вторая пара.

После такого продолжения для системы (1.2) при $\{-\pi \leq x \leq \pi\}$ и при $\{-\pi \leq y \leq \pi\}$ начальные

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ РЯДАМИ

условия с учетом их четности могут быть представлены в виде

$$\left\{ \begin{aligned} \delta(t, x, y) \Big|_{t=0} &= \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\delta_{k,1}^0 \cos(kx) + \delta_{k,2}^0 \cos(ky) \right], \\ u(t, x, y) \Big|_{t=0} &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[u_{k,1}^0 \sin(kx) + u_{k,2}^0 \sin(ky) \right], \\ v(t, x, y) \Big|_{t=0} &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[v_{k,1}^0 \sin(kx) + v_{k,2}^0 \sin(ky) \right], \\ p(t, x, y) \Big|_{t=0} &= \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[p_{k,1}^0 \cos(kx) + p_{k,2}^0 \cos(ky) \right], \end{aligned} \right. \quad (2.1)$$

где вследствие непрерывности функций $f_1^0(x)$, $f_2^0(y)$ выписанные тригонометрические ряды сходятся при всех x, y . Здесь символ f принимает значения δ, u, v, p .

Смысл двойных индексов следующий: первый индекс задает частоту гармоник, перед которой стоит данный коэффициент тригонометрического ряда; второй индекс равен единице, если гармоника зависит от первой пространственной переменной x ; второй индекс равен двойке, если гармоника зависит от второй пространственной переменной y .

Решение задачи (1.2), (2.1) ищется в виде

$$\begin{aligned} \delta(t, x, y) &= \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\delta_{k,1}(t) \cos(kx) + \delta_{k,2}(t) \cos(ky) \right]; \\ u(t, x, y) &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[u_{k,1}(t) \sin(kx) + u_{k,2}(t) \sin(ky) \right]; \\ v(t, x, y) &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[v_{k,1}(t) \sin(kx) + v_{k,2}(t) \sin(ky) \right]; \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$p(t, x, y) =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[p_{k,1}(t) \cos(kx) + p_{k,2}(t) \cos(ky) \right],$$

с неизвестными коэффициентами

$$\delta_{k,1}(t), \delta_{k,2}(t), u_{k,1}(t), u_{k,2}(t), v_{k,1}(t), v_{k,2}(t), p_{k,1}(t), p_{k,2}(t),$$

зависящими от t , и для которых заданы начальные условия при $x=0, y=0$

$$f_{k,1}(0) = f_{k,1}^0; \quad f_{k,2}(0) = f_{k,2}^0.$$

Здесь символ f также принимает значения δ, u, v, p , переменная k принимает целые положительные значения.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ СИСТЕМЫ (1.2)

Для первого уравнения системы (1.2) все требуемые преобразования ниже выписаны подробно.

Сначала по представлениям (2.2) определяются частные производные, входящие в первое уравнение системы (1.2). А потом в это уравнение подставляются представления (2.2) и найденные выражения для производных. В полученном соотношении раскрываются скобки, и оно расписывается через двойные суммы

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} \delta'_{k,1}(t) \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} \delta'_{k,2}(t) \cos(ky) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{k,1}(t) m \delta_{m,1}(t) \sin(kx) \sin(mx) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{k,2}(t) m \delta_{m,1}(t) \sin(ky) \sin(mx) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} v_{k,1}(t) m \delta_{m,2}(t) \sin(kx) \sin(my) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} v_{k,2}(t) m \delta_{m,2}(t) \sin(ky) \sin(my) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} k u_{k,1}(t) \cos(kx) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{k,1}(t) m u_{m,1}(t) \cos(kx) \cos(mx) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{k,2}(t) m u_{m,1}(t) \cos(ky) \cos(mx) + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} k v_{k,2}(t) \cos(ky) + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{k,1}(t) m v_{m,2}(t) \cos(kx) \cos(my) + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{k,2}(t) m v_{m,2}(t) \cos(ky) \cos(my).
 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Полученное уравнение проецируется на базис

$$\{\cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots\},$$

т.е. это уравнение последовательно умножается на $\cos(lx)$, $l=1, 2, \dots$ и интегрируется по x и y на отрезках от $-\pi$ до $+\pi$. Далее учитываются значения конкретных определенных интегралов и также вводятся две константы

$$\begin{aligned}
 a_{kml} &= \begin{cases} 1, & \text{если } l=k+m \text{ или } l=|k-m|; \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \\
 b_{kml} &= \begin{cases} 1, & \text{если } l=|k-m|; \\ -1, & \text{если } l=k+m; \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}
 \end{aligned}$$

с помощью которых вычисляются такие интегралы:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(kx) \cos(mx) \cos(lx) dx &= \frac{\pi}{2} a_{kml}, \\
 \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(kx) \sin(mx) \cos(lx) dy &= \frac{\pi}{2} b_{kml}.
 \end{aligned}$$

В результате получается бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений и после деления каждого уравнения на $2\pi^2$ эта система имеет нормальную форму:

$$\begin{aligned}
 \delta'_{l,1}(t) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} m u_{k,1}(t) \delta_{m,1}(t) b_{kml} + l u_{l,1}(t) + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} m u_{k,1}(t) \delta_{m,1}(t) a_{kml}; \quad l=1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Для построения приближенных решений системы (1.2) используются конечные суммы

$$\begin{aligned}
 f(t, x, y) &= \\
 &= 1 + \sum_{k=1}^K \left[f_{k,1}(t) \cos(kx) + f_{k,2}(t) \cos(ky) \right], \\
 g(t, x, y) &= \sum_{k=1}^K \left[g_{k,1}(t) \cos(kx) + g_{k,2}(t) \cos(ky) \right],
 \end{aligned}$$

где K – выбранное значение числа слагаемых в конечных отрезках рядов; значок f принимает значения δ , p , а значок g – u , v .

Тогда бесконечные системы обыкновенных дифференциальных уравнений перейдут в конечные системы следующего вида:

$$\begin{aligned}
 \delta'_{l,1}(t) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^K m u_{k,1}(t) \delta_{m,1}(t) b_{kml} + l u_{l,1}(t) + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^K m u_{k,1}(t) \delta_{m,1}(t) a_{kml}; \quad l=1, 2, \dots, K.
 \end{aligned}$$

Учет значений констант a_{kml} , b_{kml} приводит к следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям для коэффициентов $\delta_{l,1}(t)$.

При $l=1$:

$$\begin{aligned}
 \delta'_{1,1}(t) &= \sum_{j=1}^{K-1} \left[j u_{j+1,1}(t) \delta_{j,1}(t) + \right. \\
 & \left. + (j+1) u_{j,1}(t) \delta_{j+1,1}(t) \right] + u_{1,1}(t).
 \end{aligned} \quad (3.2)$$

При $2 \leq l \leq K-1$:

$$\begin{aligned}
 \delta'_{l,1}(t) &= \sum_{j=1}^{K-l} \left[j u_{j+l,1}(t) \delta_{j,1}(t) + \right. \\
 & \left. + (j+l) u_{j,1}(t) \delta_{j+l,1}(t) \right] + l u_{l,1}(t).
 \end{aligned} \quad (3.3)$$

При $l=K$:

$$\begin{aligned}
 \delta'_{K,1}(t) &= \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{K-1} (K-2j) u_{K-j,1}(t) \delta_{j,1}(t) + K u_{K,1}(t).
 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Затем первое уравнение системы (1.2) проецируется на базис

$$\{\cos y, \cos 2y, \cos 3y, \dots\},$$

т.е. это уравнение последовательно умножается на $\cos(ly)$, $l=1, 2, \dots, K$ и интегрируется по x и y на отрезках от $-\pi$ до $+\pi$.

После соответствующих преобразований получается следующая конечная система обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов $\delta_{l,2}(t)$.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ РЯДАМИ

При $l=1$:

$$\delta'_{1,2}(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{K-1} (2j+1) \left[v_{j,2}(t) \delta_{j+1,2}(t) + v_{j+1,2}(t) \delta_{j,2}(t) \right] + u_{1,2}(t). \quad (3.5)$$

При $2 \leq l \leq K-1$:

$$\delta'_{l,2}(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{K-l} (2j+l) \left[v_{j,2}(t) \delta_{j+l,2}(t) + v_{j+l,2}(t) \delta_{j,2}(t) \right] + l u_{l,2}(t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{l-1} (l-2j) v_{l-j,2}(t) \delta_{j,2}(t). \quad (3.6)$$

При $l=K$:

$$\delta'_{K,2}(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{K-1} (K-2j) v_{K-j,2}(t) \delta_{j,2}(t) + K u_{K,2}(t). \quad (3.7)$$

Построение соответствующих приближений остальных искоемых функций задачи (1.2), (2.1) также сводится к получению соответствующих конечных систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$f'_{l,i}(t) = F_{l,i}(f_{j,i}(t)); \quad l=1,2, \dots, K; \quad i=1,2. \quad (3.8)$$

Значок f принимает значения u, v, p . Данные системы достаточно громоздкие, и поэтому их вид здесь не приводится.

4. ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СИСТЕМЫ (1.2)

Численное построение решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений (3.2)–(3.8) позволяет построить начальные отрезки тригонометрических рядов (2.2) и тем самым получить приближенные решения задачи (1.2)–(2.1).

В рассмотренном ниже примере взяты следующие начальные условия

$$\begin{cases} \delta|_{t=0} = 1, & u|_{t=0} = 0, & v|_{t=0} = 0, \\ p|_{t=0} = 1 + 0.2 \cos x + 0.2 \cos y, \end{cases} \quad (4.1)$$

и число слагаемых в тригонометрических суммах есть $K=90$. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений решались численно с точностью 10^{-4} . В системе (1.2) положено $\mu_0 = 0.001$, $\kappa_0 = 1.458333\mu_0$.

По результатам расчетов сделан фильм¹, в котором представлено поведение с течением времени всех газодинамических параметров. На рис. 1–3 даны поверхности давления в различные моменты времени.

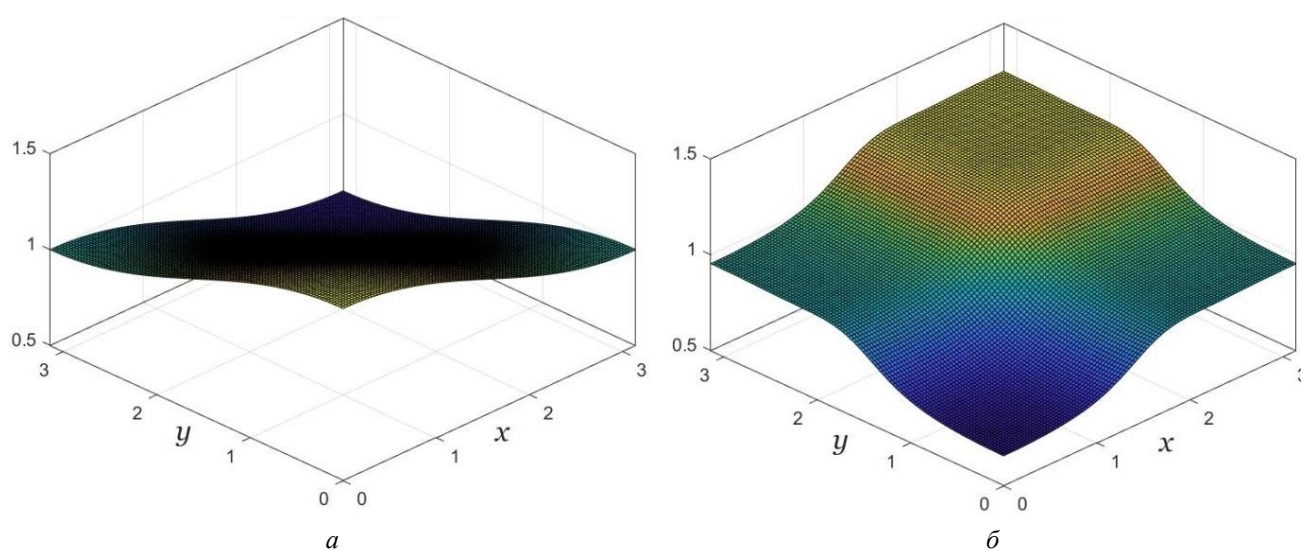


Рис. 1. Поверхности давления в моменты времени $t=0$ (а) и $t=20$ (б)

¹ Баутин С.П., Обухов А.Г. Результаты расчетов // https://vk.com/wall-71669107_3941

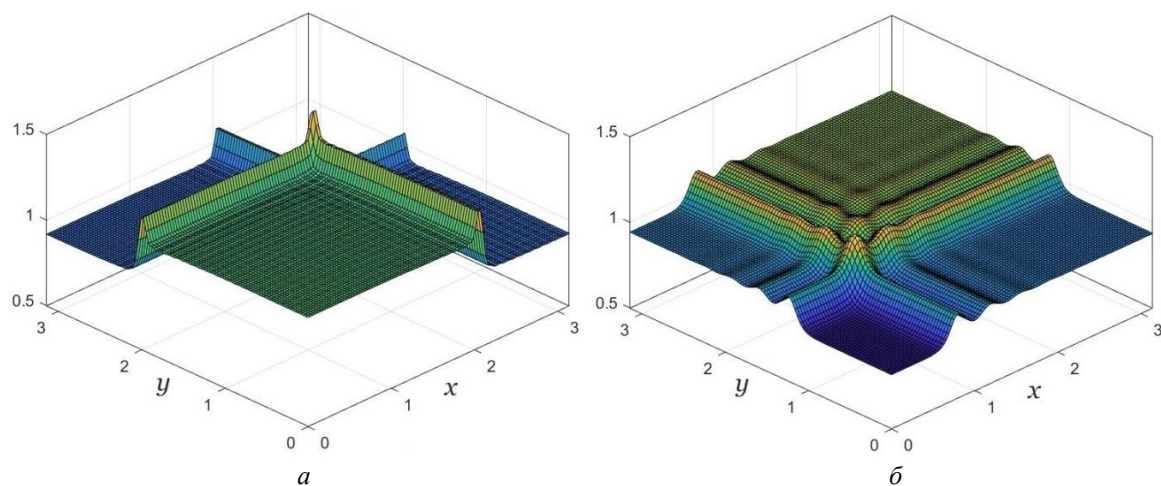


Рис. 2. Поверхности давления в моменты времени $t = 39$ (а) и $t = 83$ (б)

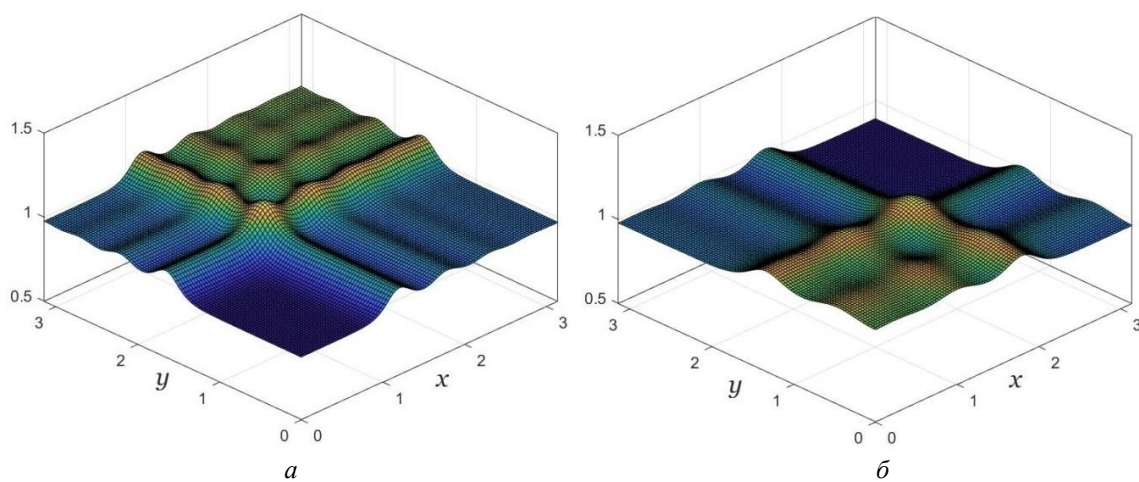


Рис. 3. Поверхности давления в моменты времени $t = 120$ (а) и $t = 151$ (б)

Видно, что вначале течение изменяется плавно, а затем в нем образуются волновые структуры. Можно сделать вывод о том, что наличие осциллирующих участков перед фрон-

тами и за ними никак не связано с выбранным конкретным и достаточно большим числом K .

Поверхности, задающие остальные газодинамические параметры δ , u , v в момент времени $t = 20$, приведены на рис. 4–6.

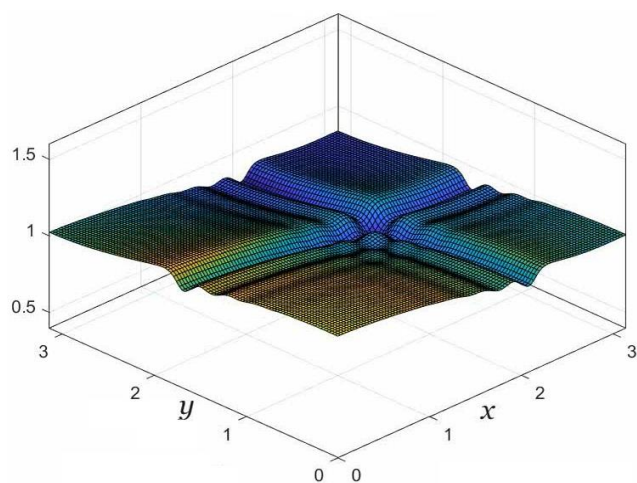


Рис. 4. Поверхность функции δ в момент времени $t = 20$

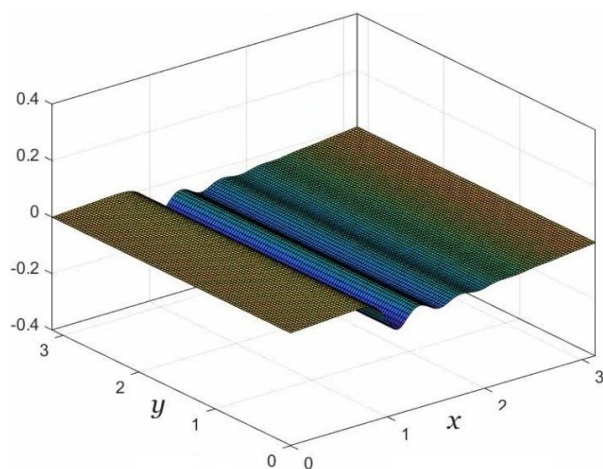


Рис. 5. Поверхность функции u в момент времени $t = 20$

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ РЯДАМИ

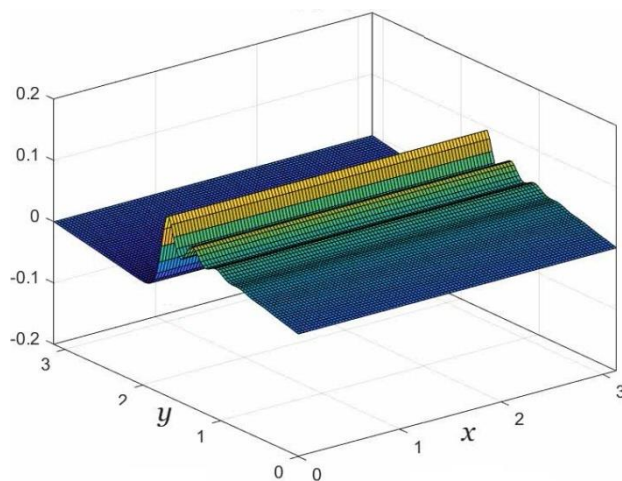


Рис. 6. Поверхность функции v в момент времени $t = 20$

На рис. 7 приведены мгновенные линии тока построенного течения в моменты времени $t = 5$ и $t = 20$.

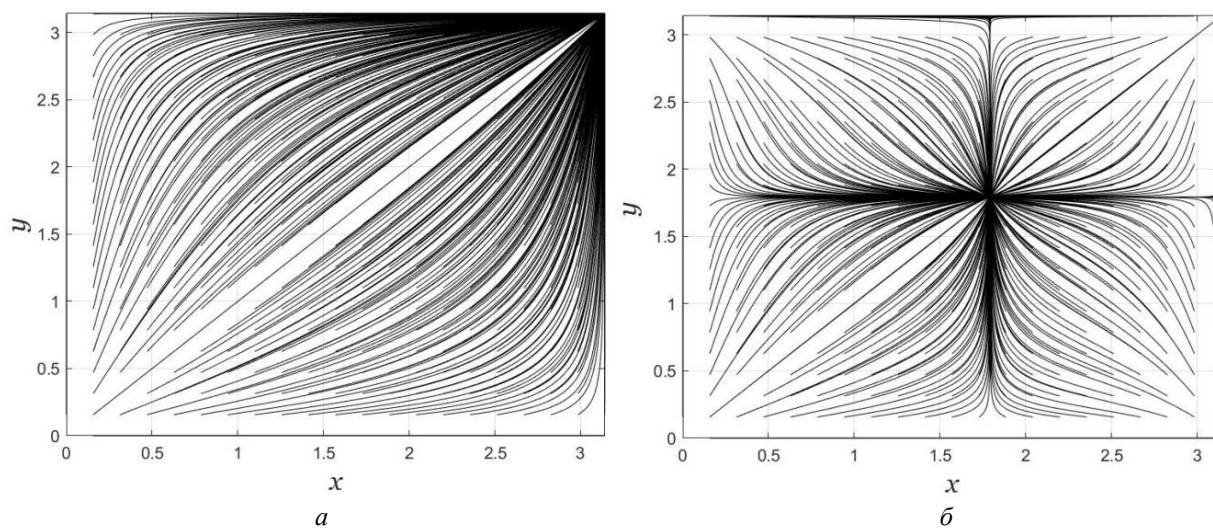


Рис. 7. Мгновенные линии тока в моменты времени $t = 5$ (а) и $t = 20$ (б)

На рис. 8 представлены мгновенные линии тока построенного течения в моменты времени $t = 35$ и $t = 65$.

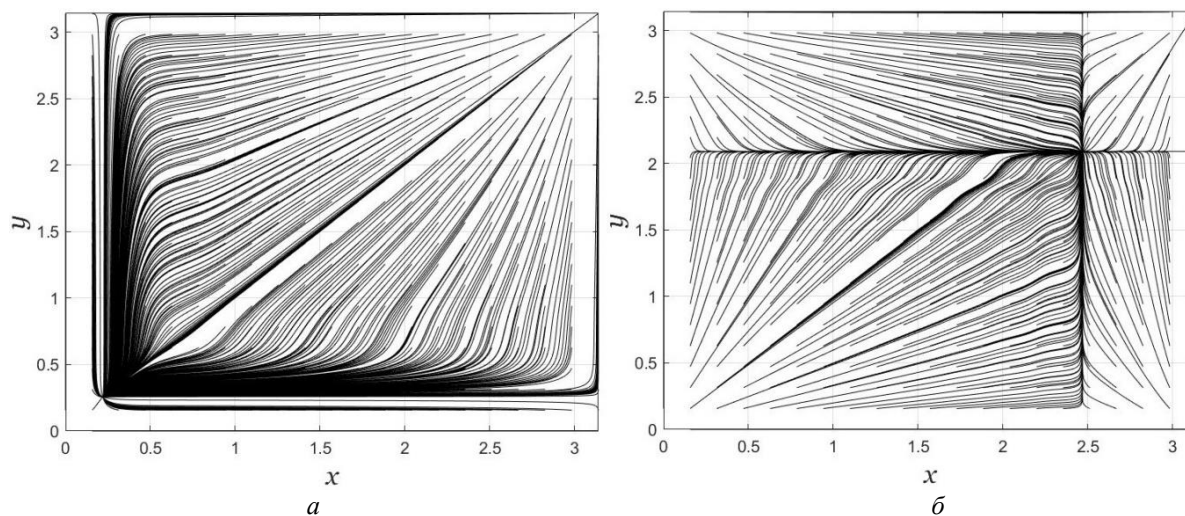


Рис. 8. Мгновенные линии тока в моменты времени $t = 35$ (а) и $t = 65$ (б)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, показано, что методика решения нелинейных уравнений с частными производными с помощью тригонометрических сумм эффективно применяется для описания течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ковалевская С.В. Научные труды. К теории дифференциальных уравнений с частными производными. М.: Изд-во АН СССР, 1948. 368 с.

2. Баутин С.П. Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 2009. 368 с.

3. Баутин С.П., Замыслов В.Е., Скачков П.П. Математическое моделирование тригонометрическими рядами одномерных течений вязкого теплопроводного газа. Новосибирск: Наука, Екатеринбург: УрГУПС, 2014. 91 с.

4. Баутин С.П., Замыслов В.Е. Представление решений уравнения Бюргерса тригонометрическими рядами // Вестник НИЯУ МИФИ, 2022. Т. 11. № 4. С. 305-318. DOI: 10.26583/vestnik.2022.238.

5. Баутин С.П., Карелина О.А., Обухов А.Г. Представление решений системы уравнений движения с помощью тригонометрических рядов // Вестник НИЯУ МИФИ, 2023. Т. 12. № 1. С. 39-51. DOI:10.26583/vestnik.2023.251.

6. Баутин С.П., Карелина О.А., Обухов А.Г. Некоторые нестационарные двумерные течения газа, определяемые с помощью тригонометрических рядов // Вестник НИЯУ МИФИ, 2023. Т. 12. № 4. С. 223-232. DOI: 10.26583/vestnik.2023.295.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2024, vol. 13, no. 4, pp. 232-241

REPRESENTATION OF VISCOUS HEAT-CONDUCTING GAS FLOWS TRIGONOMETRIC SERIES

S.P. Bautin^{1,*}, A.G. Obukhov^{2,**}

¹ National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Snezhinsk, 456776, Russia

² Tyumen Industrial University, Tyumen, 625000, Russia

*e-mail: spbautin@mail.ru

**e-mail: agobukhov@inbox.ru

Received May 15, 2024; revised May 15, 2024; accepted June 05, 2024

In the paper, in the case of two independent spatial variables, a complete system of equations is considered Navier-Stokes, whose solutions describe the movements of a compressible viscous heat-conducting gas. For it, the Cauchy problem with continuous initial data is posed squared on the xOy plane. After a corresponding continuation of these data on the second square, the solution of the Cauchy problem is presented in the form of corresponding trigonometric series for spatial variables. The coefficients of the series are the desired functions of time. An infinite system of ordinary differential equations with corresponding initial conditions is given for these coefficients. Finite segments of trigonometric sums are constructed, approximating the solutions of the Cauchy problem under consideration.

Keywords: the complete system of Navier-Stokes equations, the Cauchy problem, trigonometric series, approximate solutions.

REFERENCE

1. Kovalevskaya S.V. Nauchnye trudy. K teorii differentsial'nyh uravnenij s chastnymi proizvodnymi. [Research Works. To the Theory of Differential Equations with Partial Derivatives] Moscow, Izd-vo AN SSSR Publ., 1948. 368 p.

2. Bautin S. P. Harakteristicheskaya zadacha Koshi i ee prilozheniya v gazovoj dinamike. [The characteristic

problem of the Koshi and its applications in gas dynamics] Novosibirsk, Nauka Publ., 2009. 368 p.

3. Bautin S.P., Zamyaslov V.E., Skachkov P.P. Matematicheskoe modelirovanie trigonometricheskimi ryadami odnomernykh techenij vyazkogo teploprovodnogo gaza. [Mathematical modeling by trigonometric series of onedimensional flows of viscous heat conducting gas] Novosibirsk, Nauka Publ., Ekaterinburg, UrGUPS Publ., 2014. 91 p.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ РЯДАМИ

4. *Bautin S.P., Zamyslov V.E.* Predstavlenie reshenii uravneniya Byurgersa trigonometricheskimi ryadami. [Representation of solutions of the Burgers equation by trigonometric series]. Vestnik NIYaU MIFI, 2022. Vol. 11. No. 4. Pp. 305–318 (in Russian). DOI: 10.26583/vestnik.2022.238.

5. *Bautin S.P., Karelina O.A., Obuhov A.G.* Predstavlenie reshenii sistemy uravneniya dvizeniay s pomoshuy trigonometricheskih ryadov. [Representation of solutions to a system of equations of motion using

trigonometric series]. Vestnik NIYaU MIFI, 2023. Vol. 12. No. 1. Pp. 39–51 (in Russian). DOI: 10.26583/vestnik.2023.251.

6. *Bautin S.P., Karelina O.A., Obuhov A.G.* Neco-torye nestacionarnye dvumernye techeniay gaza, opredelajemye s pomoshuy trigonometricheskih ryadov. [Some unsteady two-dimensional gas flows determined using trigonometric series]. Vestnik NIYaU MIFI, 2023. Vol. 12. No. 4. Pp. 223–232 (in Russian). DOI: 10.26583/vestnik.2023.295.