

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕАКЦИОННО-ДИФФУЗИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ: МЕТОД ПОИСКА ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ В НЕЯВНОЙ ФОРМЕ

© 2019 г. А. Д. Полянин^{1,2,3,*}

¹ Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, 119526, Москва, Россия

² Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", 115409, Москва, Россия

³ Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, 105009, Москва, Россия

*e-mail: polyanin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 25.12.2018 г.

После доработки 25.12.2018 г.

Принята к публикации 16.01.2019 г.

Рассматриваются различные классы нелинейных уравнений реакционно-диффузионного типа с переменными коэффициентами $c(x)u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)g(u)$, которые допускают точные решения. Излагается новый метод поиска точных решений таких и более сложных нелинейных уравнений математической физики, который основан на представлении решения в неявной форме $\int h(u)du = \xi(x)\omega(t) + \eta(x)$, где $h(u)$, $\xi(x)$, $\eta(x)$, $\omega(t)$ — искомые функции, конкретный вид которых определяется в ходе дальнейшего анализа возникающих функционально-дифференциальных уравнений. Приведены примеры конкретных нелинейных уравнений реакционно-диффузионного типа и их точных решений. Основное внимание уделяется нелинейным уравнениям достаточно общего вида, которые содержат несколько произвольных функций, зависящих от искомой функции u и пространственной переменной x . Описано много новых точных решений типа обобщенной бегущей волны и решений с функциональным разделением переменных. Важно отметить, что решения подобного типа обычно являются неинвариантными (т.е. они не могут быть получены с помощью методов классического группового анализа дифференциальных уравнений).

Ключевые слова: нелинейные реакционно-диффузионные уравнения, нелинейные уравнения с переменными коэффициентами, точные решения в неявном виде, решения типа обобщенной бегущей волны, решения с функциональным разделением переменных

DOI: 10.1134/S2304487X1903009X

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Краткий обзор литературы

Преобразования и точные решения различных классов нелинейных уравнений конвективного тепло- и массопереноса

$$u_t = [f_1(u)u_x]_x + f_2(u)u_x + f_3(u) \quad (1)$$

и некоторых других нелинейных уравнений, не зависящих явно от переменных x , t , рассматривались во многих работах (см., например, [1–19] и цитируемую в них литературу). Для построения точных решений чаще всего использовались классический и неклассические методы исследования симметрий [1–3, 5, 7, 10, 14, 15, 17–19], методы обобщенного и функционального разделения переменных [9, 11, 14, 16, 17], метод дифференциальных связей [6, 13, 14, 16, 17].

В общем случае уравнение (1) допускает решения типа бегущей волны $u = U(kx + \lambda t)$ [2] и при

$f_2(u) = f_3(u) = 0$ имеет автомodelное решение $u = U(xt^{-1/2})$ [1]. Помимо указанных случаев известны также уравнения вида (1), в которых по крайней мере одна из функций $f_n(u)$ является произвольной, допускающие другие точные решения [6, 17].

В [8, 17, 20–24] рассматривались нелинейные уравнения реакционно-диффузионного типа с переменными коэффициентами автономного вида

$$c(x)u_t = [a(x)f_1(u)u_x]_x + b(x)f_2(u). \quad (2)$$

В табл. 1 собраны некоторые уравнения вида (2), содержащие одну или две произвольные функции пространственной переменной и/или искомой величины, допускающие точные решения.

Замечание 1. Уравнения и решения, приведенные в табл. 1 с номерами 5–7, обобщают реакционно-диффузионные уравнения со степенными и экспоненциальными нелинейностями и их инва-

Таблица 1. Нелинейные уравнения реакционно-диффузионного типа, зависящие от произвольных функций, которые допускают точные решения. Здесь $a(x)$, $b(x)$, $f(u)$, $g(u)$ — произвольные функции, b_1 , b_2 , k , λ — свободные параметры

№	Уравнение	Вид решения или пояснение	Литература
1	$u_t = [a(x)u^k u_x]_x + b(x)u^{k+1}$	$u = \varphi(x)\psi(t)$	[8, 12]
2	$u_t = [a(x)e^{\lambda u} u_x]_x + b(x)e^{\lambda u}$	$u = \varphi(x) + \psi(t)$	[8, 12]
3	$u_t = [a(x)u_x]_x + b_1 u \ln u + b_2 u$	$u = \varphi(x)\psi(t)$	[12]
4	$u_t = (u^{-4/3} u_x)_x + b(x)u^{-1/3}$	уравнение приводится к виду $v_t = (v^{-4/3} v_z)_z$	[8, 12]
5	$u_t = [x^k f(u)u_x]_x + x^{k-2} g(u)$	$u = U(z)$, $z = xt^{1/(k-2)}$, $k \neq 2$	см. замечание 1
6	$u_t = [x^2 f(u)u_x]_x + g(u)$	$u = U(z)$, $z = \lambda t + \ln x$	см. замечание 1
7	$u_t = [e^{\lambda x} f(u)u_x]_x + e^{\lambda x} g(u)$	$u = U(z)$, $z = \lambda x + \ln t$, $\lambda \neq 0$	см. замечание 1
8	$u_t = [a(x)u_x]_x + [x^2/a(x)]g(u)$	$u = U(z)$, $z = t + \int [x/a(x)]dx$	[24]
9	$u_t = u_{xx} + \tanh^2(kx)g(u)$	$u = U(z)$, $z = t + k^{-2} \operatorname{Incosh}(kx)$	[24]

риантные решения, которые рассматривались в [20–22].

В [6, 17] были рассмотрены четыре уравнения вида

$$u_t = x^{-n} [x^n f_1(u)u_x]_x + f_2(u), \quad (3)$$

где функции $f_1(u)$ и $f_2(u)$ выражались через произвольную функцию $\varphi(u)$ (n — любое), допускающие точные решения с функциональным разделением переменных. Уравнение (3) заменами $z = (n+1)^{-n-1} x^{n+1}$ (при $n \neq -1$) и $z = -2 \ln(x/2)$ (при $n = -1$) приводится к уравнению вида (2) со степенной и экспоненциальной зависимостями от пространственной координаты:

$$u_t = [z^k f_1(u)u_z]_z + f_2(u), \quad k = 2n/(n+1) \quad (n \neq -1);$$

$$u_t = [e^z f_1(u)u_z]_z + f_2(u) \quad (n = -1).$$

В [20–22] для анализа и построения точных решений уравнений вида (2) со степенными и экспоненциальными нелинейностями использовались методы группового анализа.

В [25–29] исследовались симметрии и были приведены некоторые точные решения нелинейных уравнений конвективно-диффузионного типа с переменными коэффициентами автономно-го вида

$$c(x)u_t = [a(x)f_1(u)u_x]_x + b(x)f_2(u)u_x.$$

Другие родственные и более сложные нелинейные эволюционные уравнения рассматривались в [17, 30–32]. В [17, 33] описано много систем уравнений реакционно-диффузионного типа, до-

пускающих точные решения (в цитируемых книгах приведен обширный список публикаций на эту тему).

Отметим также, что в последнее время большое внимание уделяется изучению наследственных систем, которые моделируются реакционно-диффузионными уравнениями

$$u_t = au_{xx} + f(u, w), \quad w = u(x, t - \tau),$$

где $\tau > 0$ — время запаздывания. Точные решения таких и более сложных уравнений получены в [34–42].

В данной статье будут рассматриваться допускающие точные решения нелинейные уравнения реакционно-диффузионного типа, которые зависят от одной или нескольких произвольных функций.

1.2. Используемая терминология

В данной статье термин *точное решение* будет использоваться в отношении нелинейных уравнений с частными производными, если его решение выражается:

- (i) в элементарных функциях;
- (ii) в замкнутом виде с использованием определенных или/и неопределенных интегралов;
- (iii) через решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) или систем таких уравнений.

Допускаются также комбинации случаев (i)–(iii).

2. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИОННО-ДИФФУЗИОННОГО ТИПА. МЕТОД ПОИСКА ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ

2.1. Класс рассматриваемых нелинейных уравнений с переменными коэффициентами.

Предварительные замечания

Будем рассматривать одномерные нелинейные уравнения реакционно-диффузионного типа с переменными коэффициентами

$$c(x)u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)g(u). \quad (4)$$

Далее основное внимание будет уделено уравнениям достаточно общего вида, которые зависят от одной или двух произвольных функций.

Замечание 2. При $a(x) = c(x) = x^n$ уравнение (4) описывает реакционно-диффузионные процессы с радиальной симметрией в плоском (при $n = 1$) и трехмерном (при $n = 2$) случаях (x — радиальная координата).

Рассмотрим сначала наиболее простое нелинейное уравнение данного вида

$$u_t = [f(u)u_x]_x, \quad (5)$$

которое содержит произвольную функцию $f(u)$. Поскольку коэффициенты этого уравнения не зависят явно от x и t , оно допускает точное решение типа бегущей волны

$$u = u(z), \quad z = \lambda t + kx, \quad (6)$$

где k и λ — произвольные постоянные. Подставив (6) в (5), получим ОДУ $\lambda u'_z = k^2 [f(u)u'_z]_z$. Интегрируя, находим его решение в неявном виде

$$k^2 \int \frac{f(u)du}{\lambda u + C_1} = \lambda t + kx + C_2, \quad (7)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. В правой части (7) была сделана замена z на исходные переменные с помощью (6).

Ниже будет описан новый метод поиска точных решений нелинейных уравнений математической физики, основанный на обобщении решения (7).

2.2. Общее описание метода поиска точных решений в неявном виде

Точные решения нелинейного дифференциального уравнения в частных производных

$$G(x, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) = 0, \quad (8)$$

ищутся в неявном виде

$$\int h(u)du = \xi(x)\omega(t) + \eta(x), \quad (9)$$

где функции $h(u)$, $\xi(x)$, $\eta(x)$, $\omega(t)$ определяются в ходе дальнейшего анализа. Представление решения в виде (9) основано на естественном обобщении

решения (7), которое осуществляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{k^2 f(u)}{\lambda u + C_1} &\Rightarrow h(u), \quad \lambda \Rightarrow \xi(x), \\ t &\Rightarrow \omega(t), \quad kx + C_2 \Rightarrow \eta(x). \end{aligned}$$

Далее аргументы функций $a = a(x)$, $b = b(x)$, $c = c(x)$, $f = f(u)$, $g = g(u)$, $h = h(u)$, $\xi = \xi(x)$, $\eta = \eta(x)$, $\omega = \omega(t)$, которые входят в уравнение (4) и решение (9), часто будут опускаться.

Опишем процедуру построения точного решения в неявном виде. Сначала, используя (9), вычисляются производные u_x , u_t , u_{xx} , ..., которые выражаются в терминах функций h , ξ , η , ω и их производных. Затем полученные выражения для производных подставляются в уравнение (8), после чего исключается переменная t с помощью (9). В результате (при подходящем выборе функции ω , см. далее) приходим к функционально-дифференциальному уравнению билинейного вида

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \phi_j[x] \psi_j[u] &= 0, \\ \phi_j[x] &\equiv \phi_j(x, \xi, \eta, \xi'_x, \eta'_x, \xi''_{xx}, \eta''_{xx} \dots), \\ \psi_j[u] &\equiv \psi_j(u, h, h'_u, h''_{uu}, \dots). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $\phi_j[x]$ и $\psi_j[u]$ — дифференциальные формы (в некоторых случаях функциональные коэффициенты), зависящие соответственно только от x и u . Считается, что все $\phi_j[u]$ для любых $h = h(u)$ одновременно не обращаются в нуль. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение. Функционально-дифференциальные уравнения вида (10) могут допускать решения только в тех случаях, когда формы $\psi_j[u]$ ($j = 1, \dots, N$) связаны линейными соотношениями [14, 17]:

$$\sum_{j=1}^{m_i} k_{ij} \psi_j[u] = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (11)$$

где k_{ij} — некоторые постоянные, $2 \leq m_i \leq N$, $1 \leq n \leq N - 1$. При этом надо рассматривать также вырожденные случаи, когда помимо линейных соотношений отдельные дифференциальные формы $\psi_j[u]$ обращаются в нуль.

Аналогичное утверждение справедливо также для форм $\phi_j[x]$.

В разд. 3 и 4 сформулированное утверждение будет использовано для построения точных решений некоторых функционально-дифференциальных уравнений вида (10), которые возникают при поиске решений соответствующих нелиней-

ных уравнений реакционно-диффузионного типа (4).

Замечание 3. Поиск решения в неявном виде с интегральным членом в левой части (9) часто приводит к уравнениям для определения функции h более низкого порядка, чем при поиске точных решений в явном виде. Кроме того, неявная форма записи решения обычно приводит к более простым явным представлениям функций g и f через h (при поиске точных решений в явном виде функции g и f нередко выражаются через h в параметрической форме [17]). Отметим также, что различные линейные соотношения вида (11) в случае общего положения соответствуют различным решениям рассматриваемого уравнения.

2.3. Вывод функционально-дифференциального уравнения

Дифференцируя (9) по t и x , имеем

$$\begin{aligned} hu_t &= \xi \omega'_t \Rightarrow u_t = \frac{\xi \omega'_t}{h}; \\ hu_x &= \xi'_x \omega + \eta'_x \Rightarrow u_x = \frac{\xi'_x \omega + \eta'_x}{h}; \\ (afu_x)_x &= \left[(a\xi'_x \omega + a\eta'_x) \frac{f}{h} \right]_x = \\ &= [(a\xi'_x)'_x \omega + (a\eta'_x)'_x] \frac{f}{h} + a(\xi'_x \omega + \eta'_x)^2 \frac{1}{h} \left(\frac{f}{h} \right)'_u. \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (4), получим функционально-дифференциальное уравнение

$$\omega'_t = \Phi_1(x, u)\omega^2 + \Phi_2(x, u)\omega + \Phi_3(x, u), \quad (12)$$

где функции Φ_n не зависят явно от t и определяются формулами

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, u) &= \frac{a(\xi'_x)^2}{c\xi} \left(\frac{f}{h} \right)'_u, \\ \Phi_2(x, u) &= \frac{1}{c\xi} \left[(a\xi'_x)'_x f + 2a\xi'_x \eta'_x \left(\frac{f}{h} \right)'_u \right], \\ \Phi_3(x, u) &= \frac{1}{c\xi} \left[(a\eta'_x)'_x f + a(\eta'_x)^2 \left(\frac{f}{h} \right)'_u + bgh \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Уравнение (12)–(13) зависит от трех переменных t , x , u , которые связаны одним соотношением (9), и содержит искомые функции и их производные, зависящие от разных аргументов. Это уравнение является более сложным, чем уравнение вида (10).

Далее будут описаны несколько различных путей построения точных решений функционально-дифференциального уравнения (12)–(13).

3. ПРЯМАЯ РЕДУКЦИЯ, ПРИВОДЯЩАЯ К ОДУ ДЛЯ ФУНКЦИИ ω

3.1. Описание метода. Анализ уравнения в невырожденном случае

Прямая редукция заключается в том, что в уравнении (12) полагается

$$\Phi_1(x, u) = A_1, \quad \Phi_2(x, u) = A_2, \quad \Phi_3(x, u) = A_3, \quad (14)$$

где A_n — свободные постоянные. В результате приходим к автономному обыкновенному дифференциальному уравнению для функции $\omega = \omega(t)$:

$$\omega'_t = A_1 \omega^2 + A_2 \omega + A_3. \quad (15)$$

Перейдем к анализу переопределенной системы (14), состоящей из трех функционально-дифференциальных уравнений.

1°. *Невырожденный случай.* Рассмотрим сначала невырожденный случай, соответствующий значению $A_1 \neq 0$. Разделяя переменные в первом уравнении (14), после интегрирования получим

$$f = B_1 u h + B_2 h, \quad \xi = \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_1}{B_1}} \int \sqrt{\frac{c}{a}} dx + B_3 \right)^2, \quad (16)$$

где B_1 , B_2 , B_3 — произвольные постоянные. Из второго уравнения (14) с учетом первого соотношения (16) находим $f = C_1$ и $h = C_1(B_1 u + B_2)^{-1}$, где C_1 — произвольная постоянная. Из третьего уравнения (14) следует, $g = C_2(B_1 u + B_2)$. Таким образом, невырожденный случай неинтересен, поскольку приводит к линейному уравнению.

2°. *Вырожденные случаи.* При $A_1 = 0$ получим уравнение $\Phi_1 = 0$, которое определяет два вырожденных случая: (i) $\xi'_x = 0$ и (ii) $(f/h)'_u = 0$. Без ограничения общности в этих случаях можно положить (i) $\xi = 1$ и (ii) $h = f$. Вырожденные случаи рассмотрим далее поочередно в разд. 3.2 и 3.3.

3.2. Точные решения типа обобщенной бегущей волны в вырожденном случае при $\xi = 1$

Полагая $\xi = 1$ в (13), имеем $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$. В этом случае уравнение (12) представляет собой уравнение с разделенными переменными (левая часть зависит от t , а правая — от x и u), что дает $\omega(t) = kt$, где $k = A_3$ — произвольная постоянная. Рассматриваемая ситуация соответствует решению типа обобщенных бегущих волн, заданных в неявной форме

$$\int h(u) du = kt + \int \theta(x) dx. \quad (17)$$

Здесь подынтегральные функции $h(u)$ и $\theta(x) = \eta'_x(x)$ будут определяться в ходе дальнейшего анализа из функционально-дифференциального уравне-

ния (12), которое можно представить в следующем виде:

$$(a\theta)'_x f + a\theta^2 \left(\frac{f}{h}\right)'_u + bgh - kc = 0. \quad (18)$$

Уравнение (18) относится к функционально-дифференциальным уравнениям билинейного вида (10).

Решение 1. Уравнению (18) можно удовлетворить, если положить

$$f = A, \quad g = \frac{1}{h} \left(\frac{f}{h}\right)'_u, \quad A(a\theta)'_x - kc = 0, \quad b = -a\theta^2, \quad (19)$$

где A — произвольная постоянная.

Из формул (19), полагая в них $c(x) = 1$, $A = k = 1$, в частности, можно получить нелинейное уравнение реакционно-диффузионного типа

$$u_t = [a(x)u_x]_x - \frac{x^2}{a(x)} g(u), \quad (20)$$

где $a(x)$ — произвольная функция, а функция $g(u)$ следующим образом выражается через произвольную функцию $h = h(u)$:

$$g(u) = -h^{-3} h'_u. \quad (21)$$

Уравнение (20) при условии (21) допускает точное решение

$$\int h(u) du = t + \int \frac{x dx}{a(x)} + C_1. \quad (22)$$

Разрешив (21) относительно h , имеем $h(u) = \left(2 \int g(u) du + C_2\right)^{-1/2}$. Исключив с помощью полученного выражения функцию h в (22), представим решение уравнения (20) в виде

$$\int \left(2 \int g(u) du + C_2\right)^{-1/2} du = t + \int \frac{x dx}{a(x)} + C_1. \quad (23)$$

Здесь $a(x)$ и $g(u)$ — произвольные функции, C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Пример 1. Точные решения уравнения

$$u_t = (x^n u_x)_x - x^{2-n} g(u)$$

определяются по формуле (23) при $a(x) = x^n$.

Замечание 4. Уравнение (20) и его решение (23), содержащие две произвольные функции, из других соображений были получены в [24].

Решение 2. Уравнению (18) можно удовлетворить, если положить

$$Af = \left(\frac{f}{h}\right)'_u, \quad g = \frac{1}{h}, \quad (a\theta)'_x + Aa\theta^2 = 0, \quad b = kc, \quad (24)$$

где A — произвольная постоянная. Полагая $c = 1$ в (24), можно получить нелинейное уравнение реакционно-диффузионного типа

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + g(u), \quad (25)$$

где $a(x)$ — произвольная функция, а функции $f(u)$ и $g(u)$ следующим образом выражаются через произвольную функцию $h = h(u)$:

$$f(u) = Bh \exp\left(A \int h du\right), \quad g(u) = \frac{k}{h}. \quad (26)$$

Уравнение (25)–(26) допускает точное решение

$$\int h(u) du = kt + \frac{1}{A} \ln\left(C_1 \int \frac{dx}{a(x)} + C_2\right). \quad (27)$$

В формулы (26) и (27) входят произвольные функции $a(x)$, $h(u)$ и произвольные постоянные A , B , C_1 , C_2 , k .

Пример 2. Полагая $h = 1/u$, $A = m + 1$, $B = 1$ в (26) и (27), получим реакционно-диффузионное уравнение со степенной нелинейностью

$$u_t = [a(x)u^m u_x]_x + ku, \quad m \neq -1, \quad (28)$$

точное решение которого имеет вид

$$u = e^{kt} \left(C_1 \int \frac{dx}{a(x)} + C_2\right)^{1/(m+1)},$$

где C_1 , C_2 — произвольные постоянные.

Замечание 6. Уравнение

$$u_t = [a(x)e^{\lambda u} u_x]_x + k \quad (29)$$

имеет точное решение

$$u = kt + \frac{1}{\lambda} \ln\left(C_1 \int \frac{dx}{a(x)} + C_2\right).$$

Решение 3. Уравнению (18) можно удовлетворить, если положить

$$\left(\frac{f}{h}\right)'_u - A = 0, \quad g = -\frac{f}{h}, \quad Aa\theta^2 = kc, \quad (a\theta)'_x = b, \quad (30)$$

где A — произвольная постоянная. Полагая $c(x) = 1$ можно получить нелинейное реакционно-диффузионное уравнение

$$u_t = [a(x)F(u)u_x]_x \mp \frac{a'_x(x)}{\sqrt{a(x)}} G(u), \quad (31)$$

где функции $F(u)$ и $G(u)$ следующим образом выражаются через произвольную функцию $h = h(u)$:

$$F(u) = (Au + B)h(u), \quad G(u) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{A}} (Au + B). \quad (32)$$

Уравнения (31)–(32) допускают точные решения

$$\int h(u) du = kt \pm \sqrt{\frac{k}{A}} \int \frac{dx}{\sqrt{a(x)}} + C. \quad (33)$$

В формулы (32) и (33) входят произвольные постоянные A , B , C .

Пример 3. Полагая в (31)–(33) $A = 1$, $B = 0$, $k = 4$, находим $F(u) = uh(u)$, $G(u) = u$. С учетом этого, заменяя h на F/u в (33), а затем переобозначая F на f , получим уравнения

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x \mp \frac{a'_x(x)}{\sqrt{a(x)}}u, \quad (34)$$

которые содержат две произвольные функции $a(x)$ и $f(u)$ и допускают следующие точные решения в неявном виде:

$$\int \frac{f(u)}{u} du = 4t \pm 2 \int \frac{dx}{\sqrt{a(x)}} + C. \quad (35)$$

Полагая в (34) $a(x) = \frac{1}{4}\alpha^2\beta^{-2}x^{2\beta}$ и $a(x) = \frac{1}{4}\alpha^2\beta^{-2}e^{2\beta x}$, получим уравнения

$$u_t = [x^{2\beta}f_1(u)u_x]_x + \alpha x^{\beta-1}u, \quad f_1(u) = \frac{1}{4}\alpha^2\beta^{-2}f(u),$$

$$u_t = [e^{2\beta x}f_1(u)u_x]_x + \alpha e^{\beta x}u, \quad f_1(u) = \frac{1}{4}\alpha^2\beta^{-2}f(u),$$

точные решения которых находятся по формуле (35).

Решение 4. Рассмотрим теперь вырожденный случай, соответствующий обращению в нуль дифференциальной формы $(f/h)'_u$ в (18). В этом случае уравнение (18) имеет решения при выполнении условий

$$h = f, \quad g = A + \frac{B}{f}, \quad (36)$$

$$(a\theta)'_x + Ab = 0, \quad Bb - kc = 0,$$

где A и B – произвольные постоянные. Из соотношений (36) при $b(x) = c(x) = 1$ следует, что уравнение

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + A + \frac{k}{f(u)}, \quad (37)$$

которое содержит две произвольные функции $a(x)$ и $f(u)$, имеет точное решение типа обобщенной бегущей волны

$$\int f(u)du = kt - A \int \frac{xdx}{a(x)} + C_1 \int \frac{dx}{a(x)} + C_2, \quad (38)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. В частном случае $a(x) = 1$ уравнение (37) и его решение (38) переходят в уравнение и решение, полученные в [6].

Замечание 7. Прямой проверкой можно убедиться, что более общее, чем (37), уравнение

$$\zeta = \begin{cases} C_2 \cos(mx) + C_3 \sin(mx) & \text{при } A_1 k(A_2 A_3 - A_1 A_4) > 0, \\ C_2 \cosh(mx) + C_3 \sinh(mx) & \text{при } A_1 k(A_2 A_3 - A_1 A_4) < 0, \end{cases} \quad (46)$$

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x) + \frac{k}{f(u)},$$

которое содержит три произвольные функции $a(x)$, $b(x)$, $f(u)$, допускает точное решение в неявном виде

$$\int f(u)du = kt - \int \frac{1}{a(x)} \left(\int b(x)dx \right) dx + C_1 \int \frac{dx}{a(x)} + C_2.$$

Решение 5. Уравнению (18) можно удовлетворить, если положить

$$g = A_1 \frac{f}{h} + A_2 \frac{1}{h}, \quad \left(\frac{f}{h} \right)'_u = A_3 f + A_4, \quad (39)$$

$$(a\theta)'_x + A_3 a\theta^2 + A_1 b = 0, \quad A_4 a\theta^2 - kc + A_2 b = 0, \quad (40)$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 – произвольные постоянные. Из уравнений (39) получим представления функций g и f через h :

$$f = hE \left(A_4 \int \frac{du}{E} + C_1 \right), \quad E = \exp \left(A_3 \int hdu \right), \quad (41)$$

$$g = A_1 C_1 E + A_1 A_4 E \int \frac{du}{E} + A_2 \frac{1}{h},$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Уравнения (40) при заданных зависимостях $a = a(x)$ и $c = c(x)$ позволяют найти функции $b(x)$ и $\theta(x)$. Умножим первое уравнение (40) на A_2 , а второе – на $-A_1$ и сложим. В результате для функции θ получим ОДУ первого порядка с квадратичной нелинейностью

$$A_2 a\theta'_x + (A_2 A_3 - A_1 A_4) a\theta^2 + A_2 a'_x \theta + A_1 kc = 0, \quad (42)$$

которое является уравнением Риккати [43]. С помощью подстановки

$$\theta = \lambda \frac{\zeta'_x}{\zeta}, \quad \lambda = \frac{A_2}{A_2 A_3 - A_1 A_4} \quad (A_2 A_3 - A_1 A_4 \neq 0) \quad (43)$$

оно приводится к линейному ОДУ второго порядка

$$A_2 \lambda (a\zeta'_x)'_x + A_1 kc \zeta = 0. \quad (44)$$

Точные решения уравнения (44) для некоторых функций $a = a(x)$ и $c = c(x)$ можно найти в [43, 44].

Используя последнее соотношение (40), можно выразить функциональный коэффициент b через θ :

$$b = -\frac{1}{A_2} (A_4 a\theta^2 - kc). \quad (45)$$

Пример 4. При $a(x) = c(x) = 1$ общее решение уравнения (44) имеет вид

где C_2 и C_3 — произвольные постоянные, $m = \sqrt{|A_1 k|/|A_2 \lambda|}$. В частности, полагая $A_1 = A_2 = A_4 = 1$, $A_3 = 2$, $C_2 = 1$, $C_3 = 0$, $k = -1$ в формулах (43), (45) и (47), получим $m = \lambda = 1$, $\zeta = \cosh x$, $\theta = \tanh x$, $b = -(1 + \tanh^2 x)$.

3.3. Точные решения типа обобщенной бегущей волны в вырожденном случае при $h = f$

При $h = f$ в системе (14), где Φ_n определяются формулами (13), первое уравнение удовлетворяется тождественно при $A_1 = 0$, а два других уравнения принимают вид

$$(a\xi'_x)'_x f = A_2 c \xi, \quad (a\eta'_x)'_x f + bfg = A_3 c \xi. \quad (47)$$

Анализ показывает, что надо рассмотреть три ситуации, которые приводят к разным результатам.

В невырожденном случае при $(a\xi'_x)'_x \neq 0$ из уравнений (47) следует, что $f = \text{const}$ и $g = \text{const}$. Этот случай неинтересен, поскольку соответствует линейному уравнению (4).

Решение 6. В вырожденном случае, который соответствует значению $A_2 = 0$, без ограничения общности можно положить $A_3 = 1$. Тогда решением уравнения (15) является линейная функция $\omega(t) = t$, а первое уравнение системы (47) принимает вид

$$(a\xi'_x)'_x = 0. \quad (48)$$

Интегрируя (48), находим связь между функциями $a = a(x)$ и $\xi = \xi(x)$:

$$\xi = C_1 \int \frac{dx}{a(x)} + C_2, \quad (49)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Второе уравнение (47) в вырожденном случае (48) имеет точные решения при выполнении условий

$$g = k_1 + k_2 f^{-1}, \quad (a\eta'_x)'_x + k_1 b = 0, \quad k_2 b - c \xi = 0, \quad (50)$$

где k_1 и k_2 — произвольные постоянные. Из соотношений (49), (50) следует, что нелинейное реакционно-диффузионное уравнение

$$c(x)u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + c(x)\xi(x) \left[k + \frac{1}{f(u)} \right], \quad k = \frac{k_1}{k_2}, \quad (51)$$

где $a(x)$, $c(x)$, $f(u)$ — произвольные функции, а функция $\xi = \xi(x)$ определяется по формуле (49), допускает точное решение типа обобщенной бегущей волны в неявном виде

$$\int f(u)du = \xi(x)t + \eta(x), \quad \eta(x) = -k \int \frac{1}{a(x)} \left(\int c(x)\xi(x)dx \right) dx + C_3 \int \frac{dx}{a(x)} + C_4, \quad (52)$$

C_3 и C_4 — произвольные постоянные.

Пример 5. Положим $a(x) = c(x) = 1$ в уравнении (51) и $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ — в формулах (49) и (52). В результате получим уравнение

$$u_t = [f(u)u_x]_x + x \left[k + \frac{1}{f(u)} \right], \quad (53)$$

которое содержит произвольную функцию $f(u)$ и произвольную постоянную k и допускает точное решение типа обобщенной бегущей волны

$$\int f(u)du = xt - \frac{1}{6} kx^3 + C_3 x + C_4.$$

В частном случае $f(u) = e^u$ уравнение (53) принимает вид

$$u_t = (e^u u_x)_x + x(k + e^{-u}).$$

Его точное решение выражается в явном виде $u = \ln \left(xt - \frac{1}{6} kx^3 + C_3 x + C_4 \right)$.

4. МОДИФИЦИРОВАННЫЕ РЕДУКЦИИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ДРУГИМ ОДУ ДЛЯ ФУНКЦИИ ω

4.1. Предварительные замечания

Полученные в разд. 3 точные решения не исчерпывают все решения вида (9) нелинейного реакционно-диффузионного уравнения (4). Другие решения могут быть получены путем различных модификаций определяющего функционально-дифференциального уравнения (12), основанных на использовании соотношения (9).

4.2. Модифицированная редукция, приводящая к $\omega = I$

В слагаемом $\Phi_2(x, u)\omega$ в правой части уравнения (12) исключим ω с помощью (9). В результате приходим к модифицированному функционально-дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} \omega'_t &= \Phi_1(x, u)\omega^2 + \Psi_1(x, u), \\ \Psi_1(x, u) &= \Phi_2(x, u) \left[\frac{H(u) - \eta(x)}{\xi(x)} \right] + \Phi_3(x, u), \\ H(u) &= \int h(u)du, \end{aligned} \quad (54)$$

где функции $\Phi_n = \Phi_n(x, u)$ определены в (13).

Модифицированная редукция заключается в том, что в уравнении (54) полагается

$$\Phi_1(x, u) = A_1, \quad \Psi_1(x, u) = A_2, \quad (55)$$

где A_1 и A_2 — свободные постоянные. В результате приходим к автономному обыкновенному дифференциальному уравнению для функции $\omega = \omega(t)$:

$$\omega_t' = A_1 \omega^2 + A_2. \quad (56)$$

Далее рассмотрим только вырожденные случаи, которые реализуются при $A_1 = 0$ в (55) и (56) и определяют две возможности: (i) $\xi = 1$ или (ii) $h = f$. Рассмотрим их по порядку.

(i) При $\xi = 1$ получим тем же самые решения, которые описаны в разд. 3.2.

(ii) При $f = h$ в уравнении (56) можно положить $A_2 = 1$, что дает $\omega(t) = t$. Второе уравнение (55) в этом случае приводится к виду

$$\xi(a\eta_{|x}')_x - \eta(a\xi_x')_x + b\xi g - c\xi^2 f^{-1} + (a\xi_x')_x F = 0, \quad F = \int f(u)du, \quad (57)$$

и является частным случаем уравнения (10) при $N = 5$.

Решение 7. Функционально-дифференциальное уравнение (57) допускает решения при выполнении условий

$$g = k_1 + k_2 f^{-1} + k_3 F, \quad F = \int f(u)du, \quad (58)$$

$$\xi(a\eta_{|x}')_x - \eta(a\xi_x')_x + k_1 b \xi = 0, \quad (59)$$

$$k_2 b - c\xi = 0, \quad (60)$$

$$(a\xi_x')_x + k_3 b \xi = 0, \quad (61)$$

где $f(u)$ — произвольная функция, а k_1, k_2, k_3 — произвольные постоянные. Считая заданными функции $a = a(x)$ и $c = c(x)$ и исключая b из уравнений (60) и (61), приходим к уравнению типа Эмдена—Фаулера для определения функции ξ :

$$(a\xi_x')_x + \frac{k_3}{k_2} c \xi^2 = 0. \quad (62)$$

Уравнение (59) является линейным неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением относительно функции η , которое допускает частное решение $\eta_p = -k_1/k_3$ (при подстановке этого значения уравнение (59) совпадает с уравнением (61)). Укороченное однородное уравнение (59), соответствующее значению $k_1 = 0$, имеет частное решение $\eta_0 = \xi$. Поэтому порядок этого уравнения может быть понижен [43, 44]. Используя указанные обстоятельства, находим общее решение уравнения (59):

$$\eta = C_1 \xi + C_2 \xi \int \frac{dx}{a\xi^2} - \frac{k_1}{k_3}, \quad (63)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Функциональный коэффициент b определяется из уравнения (60).

Подводя итоги, получим нелинейное уравнение реакционно-диффузионного типа

$$c(x)u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + c(x)\xi(x) \left[k_1 + \frac{1}{f(u)} + k_3 \int f(u)du \right], \quad (64)$$

где $a(x)$, $c(x)$, $f(u)$ — произвольные функции, а функция $\xi = \xi(x)$ удовлетворяет уравнению (62) при $k_2 = 1$, допускающее точное решение вида

$$\int f(u)du = \xi(x)t + \eta(x), \quad (65)$$

в котором функция $\eta(x)$ определяется формулой (63).

Замечание 8. Уравнение (64) является обобщением уравнения (51).

Пример 6. При $a(x) = c(x) = k_2 = 1$ уравнение (62) имеет точное решение $\xi = -(6/k_3)x^{-2}$. Соответствующая этим решениям функция η (63) принимает вид $\eta = A_1 x^{-2} + A_2 x^3 - (k_1/k_3)$, где A_1 и A_2 — произвольные постоянные, которые можно выразить через C_1, C_2 и k_3 .

4.3. Простейшая редукция при $\omega = ke^{\lambda t}$. Решения с обобщенным разделением переменных

Вернемся к рассмотренному в разд. 3.2 уравнению, которое было получено подстановкой $\xi = 1$ в (13). В этом случае $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ и уравнение (12) можно было путем разделения переменных привести к виду

$$\omega_t' = \frac{1}{c} \left[(a\eta_{|x}')_x f + a(\eta_{|x}')^2 \left(\frac{f}{h} \right)_u + bgh \right]. \quad (66)$$

В разделе разд. 3.2 исследовался простейший случай линейной зависимости $\omega(t) = kt$, что сразу приводило к функционально-дифференциальному уравнению с двумя переменными типа (10).

В формулу (9) искомая функция $\omega(t)$ входит линейным образом. Если положить $\omega(t) = ke^{\lambda t}$ (k — произвольная постоянная), то решение принимает вид

$$H(u) = ke^{\lambda t} + \eta(x), \quad H(u) = \int h(u)du \quad (67)$$

и функцию $e^{\lambda t}$ можно исключить из уравнения (66) с помощью (67). В результате приходим к функционально-дифференциальному уравнению вида (10) при $N = 5$:

$$\lambda\eta - \lambda H + \frac{(a\eta'_x)'}{c}f + \frac{a(\eta'_x)^2}{c}\left(\frac{f}{h}\right)' + \frac{b}{c}gh = 0. \quad (68)$$

Замечание 9. Уравнение (68) можно вывести из других соображений. Действительно, представив (9) в виде соотношения

$$\xi\omega/(H - \eta) = 1, \quad (69)$$

умножим правую часть уравнения (66) на $\xi\omega/(H - \eta)$. В результате после элементарных преобразований с учетом равенства $\xi = 1$, имеем

$$\frac{\omega'_t}{\omega} = \frac{1}{c(H - \eta)} \left[(a\eta'_x)'_x f + a(\eta'_x)^2 \left(\frac{f}{h}\right)'_u + bgh \right]. \quad (70)$$

В уравнении (70) переменные разделены: его левая часть зависит только от t , а правая — от x и u . Приравняв обе части (70) константе λ , получим два уравнения. Левая часть (70) дает уравнение $\omega'_t/\omega = \lambda$, которое имеет решение $\omega = ke^{\lambda t}$. Правая часть (70) приводит к уравнению (68).

Решение 8. Уравнению (68) можно удовлетворить, если положить

$$f = C_1 u h + C_2 h, \quad g = \lambda \frac{H}{h} - C_1 C_3 u - C_2 C_3, \quad (71)$$

$$b = c, \quad (a\eta'_x)'_x = C_3 c, \quad C_1 a(\eta'_x)^2 + \lambda c \eta = 0,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. В соотношения (71) входят две произвольные функции h и c , а функции f, g, a, η через них выражаются.

Общее решение системы, состоящей из двух последних уравнений (71), имеет вид

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{C_5}{c(x)} \left[C_3 \int c(x) dx + C_4 \right]^{2+\lambda/(C_1 C_3)}, \\ \eta(x) &= -\frac{C_1}{C_5 \lambda} \left[C_3 \int c(x) dx + C_4 \right]^{-\lambda/(C_1 C_3)}, \end{aligned} \quad (72)$$

где C_4, C_5 — произвольные постоянные.

Пример 7. Полагая в (72) $c(x) = 1$, $C_1 = C_3 = C_5 = 1$, $C_2 = C_4 = 0$, $\lambda = n - 2$, получим $a(x) = x^n$, $\eta(x) = x^{2-n}/(2-n)$. Поэтому уравнение реакционно-диффузионного типа

$$\begin{aligned} u_t &= [x^n f(u) u_x]_x + g(u), \\ f &= u h(u), \quad g = \frac{(n-2)}{h(u)} \int h(u) du - u, \end{aligned} \quad (73)$$

где $h(u)$ — произвольная функция, $n \neq 2$ — произвольная постоянная, допускает точное решение с обобщенным разделением переменных в неявном виде

$$\int h(u) du = k e^{(n-2)t} + \frac{x^{2-n}}{2-n}, \quad (74)$$

k — произвольная постоянная. Уравнение (73) с учетом соотношения $h = f/u$ можно представить в явной форме

$$u_t = [x^n f(u) u_x]_x - u + \frac{(n-2)u}{f(u)} \int \frac{f(u)}{u} du,$$

а его решение записывается так:

$$\int \frac{f(u)}{u} du = k e^{(n-2)t} + \frac{x^{2-n}}{2-n}.$$

Решение 9. Уравнению (68) можно удовлетворить другим способом, если положить

$$f = 1, \quad g = \lambda \frac{H}{h} + C_1 \frac{h'_u}{h^3}, \quad (75)$$

$$b = c, \quad (a\eta'_x)'_x + \lambda c \eta = 0, \quad a(\eta'_x)^2 - C_1 c = 0,$$

где C_1 — произвольная постоянная. В соотношения (75) входят две произвольные функции h и c , а функции g, a, η через них выражаются.

Общее решение системы, состоящей из двух последних уравнений (75), имеет вид

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{C_4^2}{C_1 c(x)} \exp\left(-\frac{\lambda}{C_1} \eta^2\right), \\ \int \exp\left(-\frac{\lambda}{2C_1} \eta^2\right) d\eta &= \frac{C_1}{C_4} \int c(x) dx + C_5, \end{aligned} \quad (76)$$

где C_4, C_5 — произвольные постоянные (это решение можно представить в терминах функции, обратной интегралу вероятностей).

Замечание 10. Если в последних двух уравнениях (75) считать заданной функцию $\eta = \eta(x)$, то ее решение дается формулами

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{C_4}{\eta'_x(x)} \exp\left(-\frac{\lambda}{2C_1} \eta^2\right), \\ c(x) &= \frac{C_4}{C_1} \eta'_x(x) \exp\left(-\frac{\lambda}{2C_1} \eta^2\right). \end{aligned}$$

4.4. Модифицированная редукция, приводящая к $\omega = e^{\lambda t}$. Решение с обобщенным разделением переменных

Поскольку (9) можно представить в виде равенства (69) заменим в (12) член Φ_3 на $\xi\omega\Phi_3/(H - \eta)$. В результате приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \omega'_t &= \Phi_1(x, u)\omega^2 + [\Phi_2(x, u) + \Psi_2(x, u)]\omega, \\ \Psi_2(x, u) &= \frac{\xi(x)\Phi_3(x, u)}{H(u) - \eta(x)}, \quad H(u) = \int h(u) du, \end{aligned} \quad (77)$$

где функции $\Phi_n = \Phi_n(x, u)$ определены в (13).

Далее ограничимся анализом вырожденного случая $h = f$, что соответствует $\Phi_1 = 0$. Поскольку в полученном укороченном уравнении (77) переменные разделяются, находим $\omega = e^{\lambda t}$. В результате уравнение (77) преобразуется к виду

$$\frac{\lambda}{f} = \frac{(a\xi'_x)'_x}{c\xi} + \left[\frac{(a\eta'_x)'_x}{c} + \frac{b}{c}g \right] \frac{1}{F - \eta}, \quad F = \int f du. \quad (78)$$

Уравнению (78) можно удовлетворить, если положить

$$\begin{aligned} (a\xi'_x)'_x &= -k_1 c \xi, & \eta &= -k_2, \\ b &= c, & g &= \left(\frac{\lambda}{f} + k_1 \right) (F + k_2), \end{aligned} \quad (79)$$

где k_1 и k_2 — произвольные постоянные.

Решение 10. Из соотношений (79) следует, что нелинейное реакционно-диффузионное уравнение

$$\begin{aligned} c(x)u_t &= [a(x)f(u)u_x]_x + \\ &+ c(x) \left[\frac{\lambda}{f(u)} + k_1 \right] \left[\int f(u)du + k_2 \right], \end{aligned} \quad (80)$$

где $a(x)$, $c(x)$, $f(u)$ — произвольные функции, а k_1 , k_2 , λ — произвольные постоянные, допускает точное решение с обобщенным разделением переменных в неявной форме

$$\int f(u)du = \xi(x)e^{\lambda t} - k_2. \quad (81)$$

Здесь функция $\xi = \xi(x)$ определяется путем решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения $[a(x)\xi'_x]'_x + k_1 c(x)\xi = 0$.

4.5. Модифицированная редукция, приводящая к $\omega = t^\beta$. Решение с обобщенным разделением переменных

Учитывая равенство (69), заменим в (12) два последних члена Φ_2 и Φ_3 соответственно на $\Phi_2[\xi\omega/(H - \eta)]^{n-1}$ и $\Phi_3[\xi\omega/(H - \eta)]^n$, где $n \neq 1$ — произвольная постоянная. В результате приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \omega'_r &= \Phi_1(x, u)\omega^2 + \Theta(x, u)\omega^n, \\ \Theta(x, u) &= \Phi_2(x, u) \left[\frac{\xi(x)}{H(u) - \eta(x)} \right]^{n-1} + \\ &+ \Phi_3(x, u) \left[\frac{\xi(x)}{H(u) - \eta(x)} \right]^n, \end{aligned} \quad (82)$$

где функции $\Phi_n = \Phi_n(x, u)$ определены в (13).

Как и ранее, ограничимся анализом вырожденного случая $h = f$, что соответствует $\Phi_1 = 0$. Поскольку в полученном укороченном уравне-

нии (82) переменные разделяются, можно положить $\omega = t^{1/(1-n)}$. В результате уравнение (82) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n-1)f} &= \frac{(a\xi'_x)'_x}{c\xi^{2-n}} \frac{1}{(F - \eta)^{n-1}} + \\ &+ \left[\frac{(a\eta'_x)'_x}{c\xi^{1-n}} + \frac{b}{c\xi^{1-n}}g \right] \frac{1}{(F - \eta)^n}, \end{aligned} \quad (83)$$

где $F = \int f du$. Уравнению (83) можно удовлетворить, если положить

$$\begin{aligned} (a\xi'_x)'_x &= -k_1 c \xi^{2-n}, & \eta &= -k_2, & b &= c \xi^{1-n}, \\ g &= k_1(F + k_2) + \frac{(F + k_2)^n}{(n-1)f}, \end{aligned} \quad (84)$$

где k_1 и k_2 — произвольные постоянные.

Решение 11. Из соотношений (84) следует, что нелинейное реакционно-диффузионное уравнение

$$\begin{aligned} c(x)u_t &= [a(x)f(u)u_x]_x + \\ &+ c(x)\xi^{1-n} \left\{ k_1[F(u) + k_2] + \frac{[F(u) + k_2]^n}{(n-1)f(u)} \right\}, \end{aligned} \quad (85)$$

где $a(x)$, $c(x)$, $f(u)$ — произвольные функции, а k_1 , k_2 , λ — произвольные постоянные, $F(u) = \int f(u)du$, допускает точное решение с обобщенным разделением переменных в неявной форме

$$\int f(u)du = \xi(x)t^{1/(1-n)} - k_2. \quad (86)$$

Здесь функция $\xi = \xi(x)$ в (85) и (86) описывается нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$[a(x)\xi'_x]'_x + k_1 c(x)\xi^{2-n} = 0. \quad (87)$$

Отметим, что при $n = 2$ общее решение уравнения (87) имеет вид

$$\xi = -k_1 \int \frac{1}{a(x)} \left(\int c(x)dx \right) dx + C_1 \int \frac{dx}{a(x)} + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Пример 8. Полагая в (85)–(87) $a(x) = c(x) = 1$, $k_1 = 0$, $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, получим уравнение

$$\begin{aligned} u_t &= [f(u)u_x]_x + x^{1-n} \frac{[F(u) + k_2]^n}{(n-1)f(u)}, \\ F(u) &= \int f(u)du, \end{aligned} \quad (88)$$

которое допускает точное решение в неявном виде $\int f(u)du = xt^{1/(1-n)} - k_2$. Это решение является инвариантным решением автомодельного ви-

да, которое обращает в нуль слагаемое $[f(u)u_x]_x$ в уравнении (88).

5. КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Описаны различные классы нелинейных уравнений реакционно-диффузионного типа с переменными коэффициентами, которые допускают точные решения. Решения ищутся в виде неявной зависимости, которая содержит несколько свободных функций (эти функции определяются в ходе дальнейшего анализа). Особое внимание уделено нелинейным реакционно-диффузионным уравнениям общего вида, которые зависят от одной или нескольких произвольных функций. Получено много новых точных решений типа обобщенной бегущей волны и решений с функциональным разделением переменных.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310385-6) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10025).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности // Доклады АН СССР. 1959. Т. 125. № 3. С. 492–495.
2. Дородницын В.А. Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1982. Т. 22. № 6. С. 1393–1400.
3. Galaktionov V.A., Dorodnitsyn V.A., Yelenin G.G., Kurdyumov S.P., Samarskii A.A. A quasilinear equation of heat conduction with a source: peaking, localization, symmetry, exact solutions, asymptotic behavior, structures // J. Soviet Math. 1988. V. 41. № 5. P. 1222–1292.
4. Kudryashov N.A. On exact solutions of families of Fisher equations // Theor. Math. Phys. 1993. V. 94. № 2. P. 211–218.
5. Clarkson P.A., Mansfield E.L. Symmetry reductions and exact solutions of a class of nonlinear heat equations // Phys. D. 1994. V. 70. P. 250–288.
6. Galaktionov V.A. Quasilinear heat equations with first-order sign-invariants and new explicit solutions // Nonlinear Anal. Theory. Methods. Appl. 1994. V. 23. P. 1595–621.
7. Ibragimov N.H. (Editor). CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Symmetries, Exact solutions and Conservation Laws, Vol. 1. Boca Raton: CRC Press, 1994.
8. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными: Точные решения. М.: Международная программа образования, 1996.
9. Doyle Ph.W., Vassiliou P.J. Separation of variables for the 1-dimensional non-linear diffusion equation // Int. J. Non-Linear Mech. 1998. V. 33. № 2. P. 315–326.
10. Hood S. On direct, implicit reductions of a nonlinear diffusion equation with an arbitrary function – generalizations of Clarkson’s and Kruskal’s method // IMA J. Appl. Math. 2000. V. 64. № 3. P. 223–244.
11. Estevez P.G., Qu C., Zhang S. Separation of variables of a generalized porous medium equation with nonlinear source // J. Math. Anal. Appl. 2002. V. 275. P. 44–59.
12. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2002.
13. Kaptsov O.V., Verevkin I.V. Differential constraints and exact solutions of nonlinear diffusion equations // J. Phys. A: Math. Gen. 2003. V. 36. P. 1401–1414.
14. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005.
15. Cherniha R.M., Plukhin O. New conditional symmetries and exact solutions of nonlinear reaction–diffusion–convection equations // J. Physics A: Math. Theor. 2007. V. 40. № 33. P. 10049–10070.
16. Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R. Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2007.
17. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition. Boca Raton: CRC Press, 2012 (see also 1st Edition, 2004).
18. Cherniha R.M., Plukhin O. New conditional symmetries and exact solutions of reaction–diffusion–convection equations with exponential nonlinearities // J. Math. Anal. Appl. 2013. V. 403. P. 23–37.
19. Cherniha R., Serov M., Plukhin O. Nonlinear Reaction–Diffusion–Convection Equations: Lie and Conditional Symmetry, Exact Solutions and Their Applications. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2018.
20. Vaneeva O.O., Johnpillai A.G., Popovych R.O., Sophocleous C. Extended group analysis of variable coefficient reaction–diffusion equations with power nonlinearities // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 330. № 2. P. 1363–1386.
21. Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C. Enhanced group analysis and exact solutions of variable coefficient semilinear diffusion equations with a power source // Acta Applicandae Mathematicae. 2009. V. 106. № 1. P. 1–46.
22. Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C. Extended group analysis of variable coefficient reaction–diffusion equations with exponential nonlinearities // J. Math. Anal. Appl. 2012. V. 396. P. 225–242.
23. Vaneeva O., Zhalij A. Group classification of variable coefficient quasilinear reaction–diffusion equations // Publications de L’Institut Mathématique (Nouvelle série). 2013. V. 94. № 108. P. 81–90.
24. Polyanin A.D. Functional separable solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with variable coefficients // Appl. Math. Comput. 2019. V. 347. P. 282–292.
25. Gandarias M.L., Romero J.L., Díaz J.M. Nonclassical symmetry reductions of a porous medium equation with convection // J. Phys. A: Math. Gen. 1999. V. 32. P. 1461–1473.

26. *Popovych R.O., Ivanova N.M.* New results on group classification of nonlinear diffusion–convection equations // *J. Physics A: Math. General.* 2004. V. 37. № 30. P. 7547–7565.
27. *Ivanova N.M., Sophocleous C.* On the group classification of variable-coefficient nonlinear diffusion-convection equations // *J. Comput. Applied Math.* 2006. V. 197. № 2. P. 322–344.
28. *Ivanova N.M.* Exact solutions of diffusion-convection equations // *Dynamics of PDE.* 2008. V. 5. № 2. P. 139–171.
29. *Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C.* Group analysis of variable coefficient diffusion-convection equations. I. Enhanced group classification // *Lobachevskii J. Mathematics.* 2010. V. 31. № 2. P. 100–122.
30. *Basarab-Horwath P., Lahno V., Zhdanov R.* The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations // *Acta Appl. Math.* 2001. V. 69. P. 43–94.
31. *Лагно В.И., Спичак С.В., Стогний В.И.* Симметричный анализ уравнений эволюционного типа. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
32. *Jia H., Zhao W.X.X., Li Z.* Separation of variables and exact solutions to nonlinear diffusion equations with x -dependent convection and absorption // *J. Math. Anal. Appl.* 2008. V. 339. P. 982–995.
33. *Cherniha R., Davydovych V.* Nonlinear Reaction-Diffusion Systems: Conditional Symmetry, Exact Solutions and Their Applications in Biology. Springer, 2017.
34. *Meleshko S.V., Moyo S.* On the complete group classification of the reaction–diffusion equation with a delay // *J. Math. Anal. Appl.* 2008. V. 338. P. 448–466.
35. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Exact solutions of linear and non-linear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2013. V. 54. P. 115–126.
36. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Exact separable solutions of delay reaction-diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2014. V. 19. № 3. P. 409–416.
37. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2014. V. 19. № 3. P. 417–430.
38. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* New generalized and functional separable solutions to non-linear delay reaction-diffusion equations // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2014. V. 59. P. 16–22.
39. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Nonlinear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients: Exact methods and new solutions // *Appl. Math. Letters* 2014. V. 37. P. 43–48.
40. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2014. V. 67. P. 267–277.
41. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Nonlinear delay reaction-diffusion equations: Traveling-wave solutions in elementary functions // *Appl. Math. Letters* 2015. V. 46. P. 38–43.
42. *Polyanin A.D.* Generalized traveling-wave solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with delay and variable coefficients // *Appl. Math. Letters* 2019. V. 90. P. 49–53.
43. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations, 2nd Edition. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2003.
44. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems. Boca Raton: CRC Press, 2018.

Vestnik Nacional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta "MIFI", 2019, vol. 8, no. 3, pp. 323–336

Nonlinear Reaction–Diffusion Equations with Variable Coefficients: Method for Finding Exact Solutions in an Implicit Form

A. D. Polyanin^{a,b,c,#}

^a *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia*

^b *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia*

^c *Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005 Russia*

[#]*e-mail: polyanin@ipmnet.ru*

Received December 21, 2018; accepted January 16, 2019

Abstract—Various classes of nonlinear reaction–diffusion equations with variable coefficients $c(x)u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)g(u)$, which admit exact solutions, have been considered. A new method has been presented for finding exact solutions of such and more complex nonlinear equations of mathematical physics, which is based on the representation of the solution in the implicit form $\int h(u)du = \xi(x)\omega(t) + \eta(x)$,

where the functions $h(u)$, $\xi(x)$, $\eta(x)$, and $\alpha(t)$ are determined during the study of arising functional differential equations. Examples of specific reaction–diffusion equations and their exact solutions are given. The main attention is paid to nonlinear equations of a sufficiently general form, which contain several arbitrary functions that depend on the desired function u and the spatial variable x . Many new generalized traveling-wave solutions and functional separable solutions are described. It is important to note that solutions of such types are usually noninvariant (i.e., they cannot be obtained by classical Lie group analysis of differential equations).

Keywords: nonlinear reaction–diffusion equations, nonlinear equations with variable coefficients, exact solutions in an implicit form, generalized traveling-wave solutions, functional separable solutions

DOI: 10.1134/S2304487X1903009X

REFERENCES

1. Ovsiannikov L.V., Gruppovye svoystva uravneniy nelineynoy teploprovodnosti (Group properties of nonlinear heat equations), *Doklady Acad. Nauk USSR*, 1959, vol. 125, no. 3, pp. 492–495 (in Russian).
2. Dorodnitsyn V.A., Ob invariantnykh resheniyakh uravneniya nelineynoy teploprovodnosti s istochnikom (On invariant solutions of the nonlinear heat equation with a source), *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, 1982, vol. 22, no. 6, pp. 1393–1400 (in Russian).
3. Galaktionov V.A., Dorodnitsyn V.A., Yelenin G.G., Kurdyumov S.P., Samarskii A.A., A quasilinear equation of heat conduction with a source: peaking, localization, symmetry, exact solutions, asymptotic behavior, structures, *J. Soviet Math.*, 1988, vol. 41, no. 5, pp. 1222–1292.
4. Kudryashov N.A., On exact solutions of families of Fisher equations, *Theor. Math. Phys.*, 1993, vol. 94, no. 2, pp. 211–218.
5. Clarkson P.A., Mansfield E.L., Symmetry reductions and exact solutions of a class of nonlinear heat equations, *Phys. D*, 1994, vol. 70, pp. 250–288.
6. Galaktionov V.A., Quasilinear heat equations with first-order sign-invariants and new explicit solutions, *Nonlinear Anal. Theory. Methods. Appl.*, 1994, vol. 23, pp. 1595–621.
7. Ibragimov N.H. (Ed.), *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Symmetries, Exact solutions and Conservation Laws*, vol. 1, Boca Raton: CRC Press, 1994.
8. Zaitsev V.F., Polyanin A.D., *Spravochnik po differentsial'nym uravneniyam s chastnymi proizvodnymi: tochnyye resheniya* (Handbook of Partial Differential Equations: Exact Solutions), Moscow, International Program of Education, 1996 (in Russian).
9. Doyle Ph.W., Vassiliou P.J., Separation of variables for the 1-dimensional non-linear diffusion equation, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 1998, vol. 33, no. 2, pp. 315–326.
10. Hood S., On direct, implicit reductions of a nonlinear diffusion equation with an arbitrary function – generalizations of Clarkson's and Kruskal's method, *IMA J. Appl. Math.*, 2000, vol. 64, no. 3, pp. 223–244.
11. Estevez P.G., Qu C., Zhang S., Separation of variables of a generalized porous medium equation with nonlinear source, *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, vol. 275, pp. 44–59.
12. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., *Spravochnik po nelineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki* (Handbook of nonlinear equations of mathematical physics), Moscow, Fizmatlit, 2002 (in Russian).
13. Kaptsov O.V., Verevkin I.V., Differential constraints and exact solutions of nonlinear diffusion equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2003, vol. 36, pp. 1401–1414.
14. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., Zhurov A.I., *Metody resheniya nelineynykh uravnenii matematicheskoi fiziki i mekhaniki* (Solution methods for nonlinear equations of mathematical physics and mechanics), Moscow, Fizmatlit, 2005 (in Russian).
15. Cherniha R.M., Pliukhin O., New conditional symmetries and exact solutions of nonlinear reaction–diffusion–convection equations, *J. Physics A: Math. Theor.*, 2007, vol. 40, no. 33, pp. 10049–10070.
16. Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R., *Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics*, Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2006.
17. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, 2nd Ed., Boca Raton: CRC Press, 2012 (see also 1st Edition, 2004).
18. Cherniha R.M., Pliukhin O., New conditional symmetries and exact solutions of reaction–diffusion–convection equations with exponential nonlinearities, *J. Math. Anal. Appl.*, 2013, vol. 403, pp. 23–37.
19. Cherniha R., Serov M., Pliukhin O., *Nonlinear Reaction-Diffusion-Convection Equations: Lie and Conditional Symmetry, Exact Solutions and Their Applications*, Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2018.
20. Vaneeva O.O., Johnpillai, A.G., Popovycha R.O., Sophocleous C., Extended group analysis of variable coefficient reaction–diffusion equations with power nonlinearities, *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, vol. 330, no. 2, pp. 1363–1386.
21. Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C., Enhanced group analysis and exact solutions of variable coefficient semilinear diffusion equations with a power source, *Acta Applicandae Mathematicae*, 2009, vol. 106, no. 1, pp. 1–46.
22. Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C., Extended group analysis of variable coefficient reaction–diffusion equations with exponential nonlinearities, *J. Math. Anal. Appl.*, 2012, vol. 396, pp. 225–242.
23. Vaneeva O., Zhalij A., Group classification of variable coefficient quasilinear reaction–diffusion equations,

- Publications de L'Institut Mathématique (Nouvelle série)*, 2013, vol. 94, no. 108, pp. 81–90.
24. Polyanin A.D., Functional separable solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with variable coefficients, *Appl. Math. Comput.*, 2019, vol. 347, pp. 282–292.
 25. Gandarias M.L., Romero J.L., Díaz J.M., Nonclassical symmetry reductions of a porous medium equation with convection, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1999, vol. 32, 1461–1473.
 26. Popovych R.O., Ivanova N.M., New results on group classification of nonlinear diffusion–convection equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2004, vol. 37, no. 30, pp. 7547–7565.
 27. Ivanova N.M., Sophocleous C., On the group classification of variable-coefficient nonlinear diffusion–convection equations, *J. Comput. Applied Math.*, 2006, vol. 197, no. 2, pp. 322–344.
 28. Ivanova N.M., Exact solutions of diffusion–convection equations, *Dynamics of PDE*, 2008, vol. 5, no. 2, pp. 139–171.
 29. Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C., Group analysis of variable coefficient diffusion–convection equations. I. Enhanced group classification, *Lobachevskii J. Mathematics*, 2010, vol. 31, no. 2, pp. 100–122.
 30. Basarab-Horwath P., Lahno V., Zhdanov R., The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations, *Acta Appl. Math.*, 2001, vol. 69, pp. 43–94.
 31. Lagno V.I., Spichak S.V., Stognii V.I., *Simmetriyny analiz uravneniy evolyutsionnogo tipa* (Symmetry analysis of evolution type equations), Moskva–Izhevsk: Institute of Computer Sciences, 2004 (in Russian).
 32. Jia H., Zhao W.X.X., Li Z., Separation of variables and exact solutions to nonlinear diffusion equations with x -dependent convection and absorption, *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, vol. 339, pp. 982–995.
 33. Cherniha R., Davydovych V., *Nonlinear Reaction-Diffusion Systems: Conditional Symmetry, Exact Solutions and Their Applications in Biology*, Springer, 2017.
 34. Meleshko S.V., Moyo S., On the complete group classification of the reaction–diffusion equation with a delay, *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, vol. 338, pp. 448–466.
 35. Polyanin A.D., Zhurov A.I., Exact solutions of linear and non-linear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2013, vol. 54, pp. 115–126.
 36. Polyanin A.D., Zhurov A.I., Exact separable solutions of delay reaction–diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, vol. 19, no. 3, pp. 409–416.
 37. Polyanin A.D., Zhurov A.I., Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction–diffusion equations and more complex nonlinear equations, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, vol. 19, no. 3, pp. 417–430.
 38. Polyanin A.D., Zhurov A.I., New generalized and functional separable solutions to non-linear delay reaction–diffusion equations, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014, vol. 59, pp. 16–22.
 39. Polyanin A.D., Zhurov A.I., Nonlinear delay reaction–diffusion equations with varying transfer coefficients: Exact methods and new solutions, *Appl. Math. Letters*, 2014, vol. 37, pp. 43–48.
 40. Polyanin A.D., Zhurov A.I., The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction–diffusion equations with varying transfer coefficients, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014, vol. 67, pp. 267–277.
 41. Polyanin A.D., Sorokin V.G., Nonlinear delay reaction–diffusion equations: Traveling-wave solutions in elementary functions, *Appl. Math. Letters*, 2015, vol. 46, pp. 38–43.
 42. Polyanin A.D., Generalized traveling-wave solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with delay and variable coefficients, *Appl. Math. Letters*, 2019, vol. 90, pp. 49–53.
 43. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, 2nd Ed., Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2003.
 44. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., *Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems*, Boca Raton: CRC Press, 2018.