

УДК 517.929+517.95

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА С ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В.Г. Сорокин

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия
e-mail: vsesor@gmail.com

Поступила в редакцию 28.06.2024

После доработки: 28.06.2024

Принята к публикации: 09.07.2024

Рассматриваются нелинейные уравнения переноса с пропорциональным запаздыванием, допускающие точные решения. Описано более тридцати уравнений с пропорциональным запаздыванием и постоянным коэффициентом переноса либо с зависящим от искомой функции коэффициентом переноса степенного, экспоненциального или логарифмического вида. Кинетические функции всех рассматриваемых уравнений содержат свободные параметры и в большинстве случаев также содержат произвольные функции. Получены точные решения с аддитивным, мультипликативным, обобщенным и функциональным разделением переменных, а также решения типа бегущей волны и автомодельные решения. Большинство точных решений содержат свободные параметры. Приводятся также свыше двадцати более сложных нелинейных уравнений переноса с произвольными аргументами, допускающих точные решения. Все рассматриваемые уравнения и их точные решения могут быть использованы в формулировках тестовых задач для оценки точности численных методов.

Ключевые слова: нелинейные уравнения переноса с пропорциональным запаздыванием, нелинейные уравнения переноса с произвольными аргументами, функционально-дифференциальные уравнения, уравнения математической физики с запаздыванием, точные решения, решения с разделением переменных, решения типа бегущей волны, автомодельные решения.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.351

EDN OHSXWJ

ВВЕДЕНИЕ

Уравнения переноса с пропорциональным запаздыванием применяются в биологии и биомедицине для описания процесса пролиферации клеток, т.е. процесса одновременного роста и деления клеток некоторой ткани организма. Переменная x называется «переменной созревания» (от англ. «maturation variable») и отвечает не за пространственное расположение клетки, а за некоторое количественное свойство, характеризующее ее зрелость, например, массу клетки, содержание ДНК, содержание гемоглобина и т.п.

В [1] рассматривается модель пролиферации клеток, основанная на линейном уравнении с пропорциональным запаздыванием

$$u_t + au_x = p^2bw - bu - \mu u, \quad w = u(px, t), \quad (1)$$

где $u = u(x, t)$ – плотность популяции клеток зрелости x в момент времени t ; $a > 0$, $b > 0$, $\mu > 0$ – скорости созревания, деления и гибели

клеток соответственно; p – коэффициент пропорциональности.

Коэффициент пропорциональности $p > 1$ показывает, на сколько дочерних клеток зрелости x/p делится родительская клетка (обычно $p = 2$). В [1] показано, что аналитическое решение начально-краевой задачи с произвольными начальными данными для уравнения (1) может быть получено путем сведения рассматриваемой задачи к последовательности более простых задач Коши.

Модель, основанная на нелинейном уравнении переноса с пропорциональным запаздыванием по x и постоянным запаздыванием по t , предложена в [2]:

$$u_t + a(x)u_x = cw(1 - w) - \delta u, \quad (2) \\ w = u(px, t - \tau),$$

где $a(x) > 0$ – переменная скорость созревания (рассматривается случай $a(x) = rx$, $r > 0$ – некоторая константа); $\delta > 0$ и $c > 0$ – некоторые константы; $\tau > 0$ – время запазды-

вания, $p > 0$ – коэффициент пропорциональности.

В [2] изучается существование и локальная устойчивость решений различного вида для различных начальных данных и значений параметров уравнения (2). Похожие модели рассматриваются также в [3, 4]. Численный метод для решения уравнений вида (2) разрабатывается в [5]. В [6] рассматривается модель с более сложным нелинейным уравнением с произвольным аргументом по x и постоянным запаздыванием по t :

$$u_t + a(x)u_x = f(t, u, w), \quad w = u(\xi(x), t - \tau),$$

где $0 \leq \xi(x) < x$.

Точность численных и приближенных аналитических методов интегрирования уравнений переноса с запаздыванием можно проверять путем сопоставления численных решений с решениями тестовых задач. Для формулировок тестовых задач используются уравнения, которые содержат произвольные функции и допускают точные решения со свободными параметрами. Такие уравнения и точные решения позволяют легко формулировать большой набор тестовых задач, которые в том числе дают возможность наблюдать и сравнивать работу методов в обычных и особых случаях, например, в устойчивых и неустойчивых областях.

Большой объем литературы посвящен построению точных решений уравнений математической физики с запаздыванием второго порядка. Выделяются методы группового анализа [7–9], метод функциональных связей [10–17] и метод структурной аналогии решений [18–23]. Результаты последних лет по точным решениям уравнений математической физики второго порядка с постоянным, пропорциональным и переменным запаздыванием обобщены и структурированно изложены в монографии [24].

При этом, на данный момент известна лишь одна статья о построении точных решений уравнений переноса с запаздыванием. В [25] проводится полная групповая классификация уравнения переноса с постоянным запаздыванием

$$u_t + g(u)u_x = f(u, w), \quad w = u(x, t - \tau). \quad (3)$$

Для $g(u) = u$ получено четыре уравнения, которые допускают точные решения: одно уравнение с произвольной функцией, допускающее решение типа бегущей волны, одно линейное уравнение и два уравнения со

степенными нелинейностями. Полученные решения содержат произвольные функции и свободные параметры.

В данной статье мы рассматриваем нелинейные уравнения переноса с пропорциональным запаздыванием и произвольными аргументами. Точные решения построены методом функциональных связей и с помощью принципа структурной аналогии решений.

Термин «точное решение нелинейного уравнения переноса с пропорциональным запаздыванием (с произвольными аргументами)» применяется в случаях, когда решение выражается в элементарных функциях, и/или через неопределенные интегралы, и/или через решения ОДУ или систем ОДУ, и/или через решения ОДУ или систем ОДУ с пропорциональным запаздыванием (с произвольными аргументами).

Во втором разделе статьи приводятся точные решения уравнений переноса с пропорциональным запаздыванием и постоянным коэффициентом переноса:

$$u_t + au_x = f(u, w), \quad w = u(px, t). \quad (4)$$

Так как уравнение (4) симметрично относительно аргументов x и t (с точностью до переобозначений константы a и кинетической функции f), точные решения для уравнений с пропорциональным запаздыванием по t могут быть легко выписаны и в статье не приводятся. Рассматриваются также уравнения с запаздываниями по обоим переменным, когда $w = u(px, qt)$.

Третий раздел статьи содержит точные решения более сложных уравнений переноса с пропорциональным запаздыванием и зависящим от u коэффициентом переноса:

$$u_t + h(u)u_x = f(u, w), \quad w = u(px, t). \quad (5)$$

Рассматриваются также уравнения с запаздыванием по t , когда $w = u(x, qt)$, и уравнения с запаздываниями по обоим переменным, когда $w = u(px, qt)$.

В четвертом разделе статьи представлена таблица, которая содержит нелинейные уравнения переноса с произвольными аргументами вида (4) и (5), где $w = u(\xi(x), t)$, или $w = u(x, \eta(t))$, или $w = u(\xi(x), \eta(t))$. Точные решения этих уравнений получены с помощью решений уравнений с пропорциональным запаздыванием (4) и (5) с помощью принципа структурной аналогии решений [26].

Замечание 1. Точным решениям уравнений математической физики первого, второго и более старших порядков без запаздывания посвящена книга [27], которая содержит более четырех с половиной тысяч уравнений, допускающих точные решения.

УРАВНЕНИЯ С ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И ПОСТОЯННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПЕРЕНОСА

Уравнение 1. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием:

$$u_t + au_x = bw^{1/p}, \quad w = u(px, t), \quad (6)$$

допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = (a\lambda)^{\frac{p}{1-p}} e^{-\lambda x} \left(A e^{\frac{(p-1)a\lambda}{p} t} - b \right)^{\frac{p}{p-1}},$$

где λ, A – произвольные постоянные.

Уравнение 2. Рассмотрим нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием:

$$\begin{aligned} u_t + au_x &= u(b \ln u + c \ln w + d), \\ w &= u(px, t). \end{aligned} \quad (7)$$

1°. Уравнение (7) допускает точное решение с обобщенным разделением переменных:

$$u = \sum_{n=0}^N t^n \varphi_n(x),$$

где N – любое натуральное число, а функции $\varphi_n = \varphi_n(x)$ ($0 \leq n \leq N$) определяются из системы ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$\begin{aligned} a\varphi'_0 &= b\varphi_0 + c\bar{\varphi}_0 - \varphi_1 + d, \\ a\varphi'_n &= b\varphi_n + c\bar{\varphi}_n - (n+1)\varphi_{n+1}, \\ 1 \leq n &\leq N-1, \\ a\varphi'_N &= b\varphi_N + c\bar{\varphi}_N, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\bar{\varphi}_n = \varphi_n(px)$ ($0 \leq n \leq N$).

2°. Уравнение (7) допускает также точное решение вида

$$u = \exp[\varphi_1(x)e^{ct} + \varphi_2(x)],$$

где функции $\varphi_i = \varphi_i(x)$ ($i = 1, 2$) удовлетворяют линейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$\begin{aligned} a\varphi'_1 &= (b-c)\varphi_1 + c\bar{\varphi}_1, \\ a\varphi'_2 &= b\varphi_2 + c\bar{\varphi}_2 + d, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\bar{\varphi}_i = \varphi_i(px)$ ($i = 1, 2$).

Уравнение 3. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t + au_x = f(u-w), \quad w = u(px, t), \quad (10)$$

где f – произвольная функция, допускает точное решение вида

$$u = At + \varphi(x),$$

где A – произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$a\varphi' = f(\varphi - \bar{\varphi}) - A, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px). \quad (11)$$

Уравнение 4. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t + au_x = bu + f(u-w), \quad w = u(px, t), \quad (12)$$

допускает точное решение с аддитивным разделением переменных вида

$$u = Ae^{bt} + \varphi(x),$$

где A – произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$a\varphi' = b\varphi + f(\varphi - \bar{\varphi}), \quad \bar{\varphi} = \varphi(px). \quad (13)$$

Уравнение 5. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t + au_x = uf\left(\frac{w}{u}\right), \quad w = u(px, t), \quad (14)$$

допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных вида

$$u = e^{\lambda t} \varphi(x),$$

где λ – произвольная постоянная, а функция $\varphi = \varphi(x)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$a\varphi' + \lambda\varphi - \varphi f\left(\frac{\bar{\varphi}}{\varphi}\right) = 0, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px). \quad (15)$$

Уравнение 6. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t + au_x = bu \ln u + uf\left(\frac{w}{u}\right), \quad w = u(px, t), \quad (16)$$

допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных вида

$$u = \exp(Ae^{bt} + B/b) \varphi(x),$$

где A, B – произвольные постоянные, а функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$a\varphi' = \varphi \left[B + b \ln \varphi + f\left(\frac{\bar{\varphi}}{\varphi}\right) \right], \quad \bar{\varphi} = \varphi(px). \quad (17)$$

Замечание 2. Описанные выше уравнения переноса с пропорциональным запаздыванием по переменной x и постоянным коэффициентом переноса (6), (7), (10), (12), (14), (16) симметричны относительно аргументов x и t (с точностью до переобозначений константы a и кинетической функции f). Поэтому точные решения для уравнений с пропорциональным запаздыванием по переменной t могут быть легко записаны и в статье не приводятся.

Уравнение 7. Рассмотрим нелинейное уравнение переноса с пропорциональными запаздываниями по обоим переменным:

$$u_t + au_x = bw^k, \quad w = u(px, qt), \quad (18)$$

1°. Уравнение (18) допускает автомodelное точное решение вида

$$u = t^{\frac{1}{1-k}} \theta(z), \quad z = xt^{-1},$$

где функция $\theta = \theta(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$(z - a)\theta' + \frac{1}{k-1}\theta + bq^{\frac{k}{1-k}}\bar{\theta}^k = 0, \\ \bar{\theta} = \theta(sz), \quad s = pq^{-1}.$$

2°. Уравнение (18) при $q = p$ допускает точное решение типа бегущей волны:

$$u = \theta(z), \quad z = kx - \lambda t,$$

где k, λ – произвольные постоянные, а функция $\theta = \theta(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$(\lambda - ak)\theta' + b\bar{\theta}^k = 0, \quad \bar{\theta} = \theta(pz).$$

Уравнение 8. Рассмотрим нелинейное уравнение переноса с пропорциональными запаздываниями по обоим переменным:

$$u_t + au_x = bu^m w^k, \quad w = u(px, qt). \quad (19)$$

1°. Уравнение (19) допускает автомodelное точное решение:

$$u = t^{\frac{1}{1-k-m}} \theta(z), \quad z = xt^{-1},$$

где функция $\theta = \theta(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$(z - a)\theta' + \frac{1}{k+m-1}\theta + bq^{\frac{k}{1-k-m}}\theta^m \bar{\theta}^k = 0, \\ \bar{\theta} = \theta(sz), \quad s = pq^{-1}.$$

2°. Уравнение (19) при $q = p$ допускает точное решение типа бегущей волны:

$$u = \theta(z), \quad z = kx - \lambda t,$$

где k, λ – произвольные постоянные, а функция $\theta = \theta(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$(\lambda - ak)\theta' + b\theta^m \bar{\theta}^k = 0, \quad \bar{\theta} = \theta(pz).$$

3°. Уравнение (19) при $m = 1 - kq$ допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = e^{\lambda t} \varphi(x),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$a\varphi' = b\varphi^{1-kq}\bar{\varphi}^k - \lambda\varphi, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px).$$

4°. Уравнение (19) при $m = 1 - kp$ допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = e^{\lambda x} \psi(t),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$\psi' = b\psi^{1-kp}\bar{\psi}^k - a\lambda\psi, \quad \bar{\psi} = \psi(qt).$$

Уравнение 9. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональными запаздываниями по обоим переменным

$$u_t + au_x = be^{\mu u + \lambda w}, \quad w = u(px, qt),$$

допускает точное решение вида

$$u = \theta(z) - \frac{1}{\mu + \lambda} \ln t, \quad z = xt^{-1},$$

где функция $\theta = \theta(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$(z - a)(\mu + \lambda)\theta' + \\ + b(\mu + \lambda)q^{-\frac{\lambda}{\mu + \lambda}} e^{\mu\theta + \lambda\bar{\theta}} + 1 = 0, \\ \bar{\theta} = \theta(sz), \quad s = pq^{-1}.$$

Уравнение 10. Рассмотрим нелинейное уравнение переноса с пропорциональными запаздываниями по обоим переменным:

$$u_t + au_x = u(b \ln u + c \ln w + d), \quad (20) \\ w = u(px, qt).$$

1°. Уравнение (20) допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных вида

$$u = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются нелинейными ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$\begin{aligned} a\varphi' &= (b\ln\varphi + c\ln\bar{\varphi} - A)\varphi, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px), \\ \psi' &= (b\ln\psi + c\ln\bar{\psi} + d + A)\psi, \quad \bar{\psi} = \psi(qt), \end{aligned} \quad (21)$$

где A – произвольная постоянная.

2°. Уравнение (20) при $q = p$ допускает точное решение типа бегущей волны:

$$u = \theta(z), \quad z = kx - \lambda t,$$

где k, λ – произвольные постоянные, а функция $\theta = \theta(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$(\lambda - ak)\theta' + (b \ln \theta + c \ln \bar{\theta} + d)\theta = 0, \\ \bar{\theta} = \theta(pz).$$

Уравнение 11. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональными запаздываниями по обоим переменным

$$u_t + au_x = e^{\lambda u} f(u - w), \quad w = u(px, qt),$$

допускает точное решение вида

$$u = \theta(z) - \frac{1}{\lambda} \ln t, \quad z = xt^{-1},$$

где функция $\theta = \theta(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$(z - a)\theta' + e^{\lambda \theta} f\left(\theta - \bar{\theta} + \frac{1}{\lambda} \ln q\right) + \frac{1}{\lambda} = 0, \\ \bar{\theta} = \theta(sz), \quad s = pq^{-1}.$$

УРАВНЕНИЯ С ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И ЗАВИСЯЩИМ ОТ ИСКОМОЙ ФУНКЦИИ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПЕРЕНОСА

Уравнение 12. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t + au^k u_x = uf(w/u), \quad w = u(px, t),$$

допускает точное решение вида

$$u = e^{\lambda t} \theta(z), \quad z = e^{-k\lambda t} x,$$

где λ – произвольная постоянная, а функция $\theta = \theta(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$(k\lambda z - a\theta^k)\theta' + \theta f(\bar{\theta}/\theta) - \lambda\theta = 0, \quad \bar{\theta} = \theta(pz).$$

Уравнение 13. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t + au^k u_x = u^{k+1} f(w/u), \quad w = u(px, t),$$

допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных вида

$$u = t^{-1/k} \varphi(x),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ удовлетворяет нелинейному обыкновенному функционально-дифференциальному уравнению:

$$a\varphi' = \varphi f(\bar{\varphi}/\varphi) + \frac{1}{k} \varphi^{1-k}, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px). \quad (22)$$

Уравнение 14. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t + au^k u_x = bu^{-k} + f(u^{k+1} - w^{k+1}), \\ w = u(px, t),$$

допускает точное решение с функциональным разделением переменных вида

$$u = [\varphi(x) + b(k+1)t]^{\frac{1}{k+1}},$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$a\varphi' = (k+1)f(\varphi - \bar{\varphi}), \quad \bar{\varphi} = \varphi(px). \quad (23)$$

Уравнение 15. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t + ae^{\lambda u} u_x = e^{\lambda u} f(u - w), \quad w = u(px, t),$$

допускает точное решение с аддитивным разделением переменных вида

$$u = \varphi(x) - \frac{1}{\lambda} \ln t,$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$a\varphi' = e^{\lambda \varphi} f(\varphi - \bar{\varphi}) + \frac{1}{\lambda}, \quad \bar{\varphi} = \varphi(px). \quad (24)$$

Уравнение 16. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t + f'_u u_x = \frac{a}{f'_u} + g[f(u) - f(w)], \\ w = u(px, t),$$

допускает точное решение в неявном виде:

$$f(u) = at + \varphi(x),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$\varphi' = g(\varphi - \bar{\varphi}), \quad \bar{\varphi} = \varphi(px). \quad (25)$$

Уравнение 17. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t + au^k u_x = uf(w/u), \quad w = u(x, qt),$$

допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных вида

$$u = (Ax + B)^{1/k} \psi(t),$$

где A, B – произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$\psi' = \psi f(\bar{\psi}/\psi) - \frac{Aa}{k} \psi^{k+1}, \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \quad (26)$$

Уравнение 18. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t + au^k u_x = bu^{k+1} + uf(w/u), \quad w = u(x, qt),$$

допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных вида

$$u = e^{bx/a} \psi(t),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$\psi' = \psi f(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \quad (27)$$

Уравнение 19. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t + au^k u_x = u^{k+1} f(w/u), \quad w = u(x, qt),$$

допускает точное решение вида

$$u = t^{-\frac{1}{k}} \theta(z), \quad z = x + \lambda \ln t,$$

где λ – произвольная постоянная, а функция $\theta = \theta(z)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ с постоянным запаздыванием:

$$k(\lambda + a\theta^k)\theta' = k\theta^{k+1}f\left(\frac{q^{-\frac{1}{k}}\bar{\theta}}{\theta}\right) + \theta, \\ \bar{\theta} = \theta(z + \sigma), \quad \sigma = \lambda \ln q.$$

Уравнение 20. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t + au^k u_x = b + u^{-k} f(u^{k+1} - w^{k+1}), \\ w = u(x, qt),$$

допускает точное решение с функциональным разделением переменных:

$$u = [\psi(t) + b(k+1)x/a]^{\frac{1}{k+1}},$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$\psi' = (k+1)f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \quad (28)$$

Уравнение 21. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t + ae^{\lambda u} u_x = f(u - w), \quad w = u(x, qt),$$

допускает точное решение с аддитивным разделением переменных:

$$u = \frac{1}{\lambda} \ln(Ax + B) + \psi(t),$$

где A, B – произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$\psi' = f(\psi - \bar{\psi}) - \frac{aA}{\lambda} e^{\lambda \psi}, \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \quad (29)$$

Уравнение 22. Рассмотрим нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием:

$$u_t + ae^{\lambda u} u_x = be^{\lambda u} + f(u - w), \\ w = u(x, qt). \quad (30)$$

1°. Уравнение (30) допускает точное решение с аддитивным разделением переменных:

$$u = \frac{1}{\lambda} \ln(Ae^{b\lambda x/a} + B) + \psi(t),$$

где A, B – произвольные постоянные, а функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$\psi' = Bbe^{\lambda \psi} + f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \quad (31)$$

2°. Уравнение (30) допускает другое точное решение с аддитивным разделением переменных:

$$u = \psi(t) + bx/a,$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$\psi' = f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \quad (32)$$

Уравнение 23. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t + ae^{\lambda u} u_x = b + e^{-\lambda u} f(e^{\lambda u} - e^{\lambda w}), \\ w = u(x, qt),$$

допускает точное решение с функциональным разделением переменных:

$$u = \frac{1}{\lambda} \ln[\psi(t) + b\lambda x/a],$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$\psi' = \lambda f(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \quad (33)$$

Уравнение 24. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t + (a \ln u + b)u_x = cu \ln u + uf\left(\frac{w}{u}\right), \\ w = u(x, qt),$$

допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = e^{cx/a} \psi(t),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$a\psi' = a\psi f(\bar{\psi}/\psi) - b\psi, \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \quad (34)$$

Уравнение 25. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t + af'_u u_x = b + \frac{1}{f'_u} g[f(u) - f(w)], \\ w = u(x, qt),$$

где f и g – произвольные функции, допускает точное решение в неявном виде:

$$f(u) = \psi(t) + bx/a,$$

где функция $\psi = \psi(t)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$\psi' = g(\psi - \bar{\psi}), \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \quad (35)$$

Уравнение 26. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t + af'_u u_x = bf(u) + \frac{f(u)}{f'_u} g\left[\frac{f(w)}{f(u)}\right], \\ w = u(x, qt),$$

допускает точное решение в неявном виде:

$$f(u) = e^{bx/a} \psi(t),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$\psi' = \psi g(\bar{\psi}/\psi), \quad \bar{\psi} = \psi(qt). \quad (36)$$

Уравнение 27. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t = u^k F\left(\frac{u_x}{u}, \frac{w}{u}, \frac{w_x}{u}\right), \quad w = u(x, qt),$$

допускает точное решение вида

$$u = t^{\frac{1}{1-k}} \theta(z), \quad z = x + \lambda \ln t,$$

где функция $\theta = \theta(z)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ с постоянным запаздыванием:

$$(k-1)\lambda\theta' = \\ = \theta + (k-1)\theta^k F\left(\frac{\theta'}{\theta}, q^{\frac{1}{1-k}} \frac{\bar{\theta}}{\theta}, q^{\frac{1}{1-k}} \frac{\bar{\theta}'}{\theta}\right), \\ \bar{\theta} = \theta(z + \sigma), \quad \sigma = \lambda \ln q.$$

Уравнение 28. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t = au + bw + F(x, u_x, w_x) + G(t, u - w), \\ w = u(x, qt),$$

где F и G – произвольные функции, допускает точное решение с аддитивным разделением переменных:

$$u = \varphi(x) + \psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ описываются нелинейным ОДУ и нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$F(x, \varphi', \varphi') + (a+b)\varphi = C, \\ \psi' = a\psi + b\bar{\psi} + G(t, \psi - \bar{\psi}) + C, \quad (37) \\ \bar{\psi} = \psi(qt),$$

C – произвольная постоянная.

Уравнение 29. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональным запаздыванием

$$u_t = au \ln u + uF\left(x, \frac{u_x}{u}\right) + uG\left(t, \frac{w}{u}\right), \\ w = u(x, qt),$$

допускает точное решение с мультипликативным разделением переменных:

$$u = \varphi(x)\psi(t),$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ удовлетворяют нелинейному ОДУ и нелинейному ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$F(x, \varphi'/\varphi) + a \ln \varphi = C, \\ \psi' = C\psi + a\psi \ln \psi + \psi G\left(t, \frac{\bar{\psi}}{\psi}\right), \quad (38) \\ \bar{\psi} = \psi(qt),$$

C – произвольная постоянная.

Уравнение 30. Рассмотрим нелинейное уравнение переноса с пропорциональными запаздываниями по обоим переменным:

$$u_t + au^k u_x = u^n f(w/u), \quad w = u(px, qt). \quad (39)$$

1°. Уравнение (39) допускает автомодельное точное решение:

$$u = t^{\frac{1}{1-n}} \theta(z), \quad z = xt^{\frac{n-k-1}{1-n}},$$

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА С ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

где функция $\theta = \theta(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$\left[\frac{n-k-1}{n-1} z - a\theta^k \right] \theta' + \\ + \theta^n f(q^{\frac{1}{1-n}} \bar{\theta} / \theta) + \frac{1}{n-1} \theta = 0, \\ \bar{\theta} = \theta(sz), \quad s = pq^{\frac{n-k-1}{1-n}}.$$

2°. Уравнение (39) при $q = p$ допускает точное решение типа бегущей волны:

$$u = \theta(z), \quad z = kx - \lambda t,$$

где k, λ – произвольные постоянные, а функция $\theta = \theta(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$(\lambda - ak\theta^k) \theta' + \theta^n f\left(\frac{\bar{\theta}}{\theta}\right) = 0, \\ \bar{\theta} = \theta(pz).$$

Уравнение 31. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональными запаздываниями по обоим переменным

$$u_t + ae^{\lambda u} u_x = e^{\mu u} f(u - w), \\ w = u(px, qt),$$

допускает точное решение вида

$$u = \theta(z) - \frac{1}{\mu} \ln t, \quad z = xt^{\frac{\lambda-\mu}{\mu}},$$

где функция $\theta = \theta(z)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$\left(\frac{\lambda-\mu}{\mu} z + ae^{\lambda \theta} \right) \theta' = \\ = e^{\mu \theta} f\left(\theta - \bar{\theta} + \frac{\ln q}{\mu} \right) + \frac{1}{\mu}, \\ \bar{\theta} = \theta(sz), \quad s = pq^{\frac{\lambda-\mu}{\mu}}.$$

Уравнение 32. Нелинейное уравнение переноса достаточно общего вида с одинаковыми пропорциональными запаздываниями по обоим переменным

$$u_t = F(u, w, u_x, w_x), \quad w = u(px, pt),$$

где F – произвольная функция, допускает точное решение типа бегущей волны:

$$u = \theta(z), \quad z = kx - \lambda t,$$

где k, λ – произвольные постоянные, а функция $\theta = \theta(z)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$\lambda \theta' + F(\theta, \bar{\theta}, k\theta', k\bar{\theta}') = 0, \quad \bar{\theta} = \theta(pz).$$

Уравнение 33. Нелинейное уравнение переноса с пропорциональными запаздываниями по обоим переменным

$$u_t = u^{k+1} F\left(u^n u_x, \frac{w}{u}, u^n w_x\right), \\ w = u(px, qt),$$

допускает автомодельное точное решение:

$$u = t^{-1/k} \theta(z), \quad z = xt^{\frac{n+1}{k}},$$

где функция $\theta = \theta(z)$ описывается нелинейным ОДУ с пропорциональным запаздыванием:

$$(n+1)z\theta' = \\ = \theta + k\theta^{k+1} F\left(\theta^n \theta', \frac{q^{-\frac{1}{k}} \bar{\theta}}{\theta}, q^{-\frac{1}{k}} \theta^n \bar{\theta}'\right), \\ \bar{\theta} = \theta(sz), \quad s = pq^{\frac{n+1}{k}}.$$

УРАВНЕНИЯ С АРГУМЕНТАМИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ВИДА

Некоторые уравнения с пропорциональным запаздыванием, рассмотренные выше, можно обобщить на случай уравнений с аргументами произвольного вида и построить для них точные решения в соответствии с *принципом структурной аналогии решений*, который формулируется следующим образом [26]: *точные решения более простых уравнений могут служить основой для построения решений более сложных родственных уравнений*. В табл. 1 перечислены нелинейные уравнения переноса с аргументами произвольного вида и их точные решения. В последнем столбце даны ссылки на определяющие уравнения из предыдущих разделов статьи, в функциях которых необходимо формально заменить аргументы px на $\xi(x)$ и qt на $\eta(t)$.

Таблица 1. Нелинейные уравнения переноса с аргументами произвольного вида и их точные решения

№	Уравнение	Точные решения	Определяющие уравнения
Уравнения с произвольным аргументом по x , когда $w = u(\xi(x), t)$			
1	$u_t + au_x = u(b \ln u + c \ln w + d),$	$u = \sum_{n=0}^N t^n \varphi_n(x);$ $u = \exp[\varphi_1(x)e^{ct} + \varphi_2(x)]$	(8) (9)
2	$u_t + au_x = f(u - w)$	$u = At + \varphi(x)$	(11)
3	$u_t + au_x = bu + f(u - w)$	$u = Ae^{bt} + \varphi(x)$	(13)
4	$u_t + au_x = uf(w/u)$	$u = e^{\lambda t} \varphi(x)$	(15)
5	$u_t + au_x = bu \ln u + uf(w/u)$	$u = \exp(Ae^{bt} + B/b) \varphi(x)$	(17)
6	$u_t + au^k u_x = u^{k+1} f(w/u)$	$u = t^{-1/k} \varphi(x)$	(22)
7	$u_t + au^k u_x = bu^{-k} + f(u^{k+1} - w^{k+1})$	$u = [\varphi(x) + b(k+1)t]^{\frac{1}{k+1}}$	(23)
8	$u_t + ae^{\lambda u} u_x = e^{\lambda u} f(u - w)$	$u = \varphi(x) - \frac{1}{\lambda} \ln t$	(24)
9	$u_t + f'_u u_x = \frac{a}{f'_u} + g[f(u) - f(w)]$	$f(u) = at + \varphi(x)$	(25)
Уравнения с произвольным аргументом по t , когда $w = u(x, \eta(t))$			
10	$u_t + au^k u_x = uf(w/u)$	$u = (Ax + B)^{1/k} \psi(t)$	(26)
11	$u_t + au^k u_x = bu^{k+1} + uf(w/u)$	$u = e^{bx/a} \psi(t)$	(27)
12	$u_t + au^k u_x = b + u^{-k} f(u^{k+1} - w^{k+1})$	$u = [\psi(t) + b(k+1)x/a]^{\frac{1}{k+1}}$	(28)
13	$u_t + ae^{\lambda u} u_x = f(u - w)$	$u = \frac{1}{\lambda} \ln(Ax + B) + \psi(t)$	(29)
14	$u_t + ae^{\lambda u} u_x = be^{\lambda u} + f(u - w)$	$u = \frac{1}{\lambda} \ln(Ae^{b\lambda x/a} + B) + \psi(t);$ $u = \psi(t) + bx/a$	(31) (32)
15	$u_t + ae^{\lambda u} u_x = b + e^{-\lambda u} f(e^{\lambda u} - e^{\lambda w})$	$u = \frac{1}{\lambda} \ln[\psi(t) + b\lambda x/a]$	(33)
16	$u_t + (a \ln u + b)u_x = cu \ln u + uf(w/u)$	$u = e^{cx/a} \psi(t)$	(34)
17	$u_t + af'_u u_x = b + \frac{1}{f'_u} g[f(u) - f(w)]$	$f(u) = \psi(t) + bx/a$	(35)
18	$u_t + af'_u u_x = bf(u) + \frac{f(u)}{f'_u} g[f(w)/f(u)]$	$f(u) = e^{bx/a} \psi(t)$	(36)
19	$u_t = au + bw + F(x, u_x, w_x) + G(t, u - w)$	$u = \varphi(x) + \psi(t)$	(37)
20	$u_t = a \ln u + uF(x, u_x/u) + uG(t, w/u)$	$u = \varphi(x)\psi(t)$	(38)
Уравнения с произвольными аргументами по обоим переменным, когда $w = u(\xi(x), \eta(t))$			
21	$u_t + au_x = u(b \ln u + c \ln w + d)$	$u = \varphi(x)\psi(t)$	(21)

КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Рассмотрено более тридцати нелинейных уравнений переноса с пропорциональным запаздыванием и более двадцати уравнений с произвольными аргументами, допускающих точные решения. Получены точные решения с аддитивным, мультипликативным и обобщенным разделением переменных, решения типа бегущей волны и автомодельные решения. Большинство уравнений и точных решений содержат свободные параметры, многие уравнения зависят от произвольных функций. Рассмотренные уравнения и их точные решения могут использоваться при изучении соответ-

ствующих процессов с запаздыванием и в формулировках тестовых задач для оценки точности численных и приближенных аналитических методов.

Автор благодарит А.Д. Полянина за внимание к статье и полезные замечания.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500440-9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zaidi A.A., Van Brunt B., Wake G.C. Solutions to an advanced functional partial differential equation of the

pantograph type // Proceedings of the Royal Society A, 2015. V. 471. 20140947.

DOI: 10.1098/rspa.20140947.

2. Rey A.D., Mackey M. C. Bifurcations and traveling waves in a delayed partial differential equation // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 1992. V. 2. P. 231–244.

3. Mackey M.C., Rudnicki R. Global stability in a delayed partial differential equation describing cellular replication // Journal of Mathematical Biology, 1994. V. 33. P. 89–109.

4. Dyson J., Villella-Bressan R., Webb G.F. A semilinear transport equation with delays // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2003. V. 32. P. 2011–2026.

5. Solodushkin S.I., Yumanova I.F., De Staelen R.H. First order partial differential equations with time delay and retardation of a state variable // Journal of Computational and Applied Mathematics, 2015. V. 289. P. 322–330.

6. Mackey M.C., Rudnicki R. A new criterion for the global stability of simultaneous cell replication and maturation processes // Journal of Mathematical Biology, 1999. V. 38. P. 195–219.

7. Meleshko S.V., Moyo S. On the complete group classification of the reaction–diffusion equation with a delay // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008. V. 338. P. 448–466.

8. Long F.-S., Meleshko S.V. On the complete group classification of the one-dimensional nonlinear Klein–Gordon equation with a delay // Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2016. V. 39. № 12. P. 3255–3270.

9. Lobo J.Z., Valaulikar Y.S. Group analysis of the one dimensional wave equation with delay // Applied Mathematics and Computation, 2020. V. 378. Iss. C, 125193. DOI: 10.1016/j.amc.2020.125193

10. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014. V. 19. P. 417–430.

11. Polyanin A.D., Zhurov A.I. The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients // International Journal of Non-linear Mechanics, 2014. V. 6. P. 267–277.

12. Полянин А.Д., Сорокин В.Г. Точные решения нелинейных реакционно-диффузионных уравнений гиперболического типа с запаздыванием // Вестник НИЯУ МИФИ, 2014. Т. 3. № 2. С. 141–148.

13. Полянин А.Д., Сорокин В.Г. Точные решения нелинейных уравнений в частных производных с переменным запаздыванием типа пантографа // Вестник НИЯУ МИФИ, 2020. Т. 9. № 4. С. 315–328.

14. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact separable solutions of delay reaction–diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations //

Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014. V. 19. № 3. P. 409–416.

15. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Generalized and functional separable solutions to nonlinear delay Klein–Gordon equations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014. V. 19. № 8. P. 2676–2689.

16. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Nonlinear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients: Exact methods and new solutions // Applied Mathematics Letters, 2014. V. 37. P. 43–48.

17. Polyanin A.D., Zhurov A.I. New generalized and functional separable solutions to nonlinear delay reaction–diffusion equations // International Journal of Non-linear Mechanics, 2014. V. 59. P. 16–22.

18. Полянин А.Д., Сорокин В.Г. Построение точных решений нелинейных уравнений математической физики с запаздыванием с помощью решений более простых уравнений без запаздывания // Вестник НИЯУ МИФИ, 2020. Т. 9. № 2. С. 115–128.

19. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Nonlinear pantograph-type diffusion PDEs: Exact solutions and the principle of analogy // Mathematics, 2021. V. 9 (5). 511. DOI: 10.3390/math9050511

20. Polyanin A.D., Sorokin V.G. A method for constructing exact solutions of nonlinear delay PDEs // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2021. V. 494 (2). 124619. DOI: 10.1016/j.jmaa.2020.124619.

21. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Construction of exact solutions to nonlinear PDEs with delay using solutions of simpler PDEs without delay // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2021. V. 95(1). 105634. DOI: 10.1016/j.cnsns.2020.105634.

22. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Reductions and exact solutions of nonlinear wave-type PDEs with proportional and more complex delays // Mathematics, 2023. V.11. 516. DOI: 10.3390/math11030516.

23. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Exact solutions of reaction-diffusion PDEs with anisotropic time delay // Mathematics, 2023. V.11. 3111. DOI: 10.3390/math11143111.

24. Полянин А.Д., Сорокин В.Г., Жуков А.И. Дифференциальные уравнения с запаздыванием: Свойства, методы, решения и модели. М: ИПМех РАН, 2022. 464 с.

25. Tanthanuch J. Symmetry analysis of the nonhomogeneous inviscid Burgers equation with delay // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2012. V. 17. P. 4978–4987.

26. Полянин А.Д. Построение решений нелинейных уравнений математической физики с помощью точных решений более простых уравнений // Вестник НИЯУ МИФИ, 2024. Т. 13. № 2. С. 66–75.

27. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.

EXACT SOLUTIONS OF NONLINEAR TRANSPORT EQUATIONS WITH PROPORTIONAL DELAY

V.G. Sorokin

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, 119526, Russia

e-mail: vsesor@gmail.com

Received June 28, 2024; revised June 28, 2024; accepted July 9, 2024

Nonlinear transport equations with proportional delay, allowing exact solutions, are considered. More than thirty equations with proportional delay and a constant transfer coefficient, or with a transfer coefficient of power-law, exponential or logarithmic form depending on the desired function, have been described. The kinetic functions of all equations under consideration contain free parameters and in most cases also contain arbitrary functions. Exact additive, multiplicative, generalized and functional separable solutions, as well as traveling-wave and self-similar solutions are obtained. Most exact solutions contain free parameters. Over twenty more complex nonlinear transport equations with arbitrary arguments, allowing exact solutions, are also presented. The equations considered and their exact solutions can be used in the formulation of test problems to assess the accuracy of numerical methods.

Keywords: nonlinear transport equations with proportional delay, nonlinear transport equations with arbitrary arguments, functional-differential equations, equations of mathematical physics with delay, exact solutions, separable solutions, traveling-wave solutions, self-similar solutions.

REFERENCES

1. Zaidi A.A., Van Brunt B., Wake G.C. Solutions to an advanced functional partial differential equation of the pantograph type. *Proceedings of the Royal Society A*, 2015. Vol. 471. 20140947. DOI: 10.1098/rspa.20140947.
2. Rey A.D., Mackey M.C. Bifurcations and traveling waves in a delayed partial differential equation. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 1992. Vol. 2. Pp. 231–244.
3. Mackey M.C., Rudnicki R. Global stability in a delayed partial differential equation describing cellular replication. *Journal of Mathematical Biology*, 1994. Vol. 33. Pp. 89–109.
4. Dyson J., Villella-Bressan R., Webb G.F. A semilinear transport equation with delays. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2003. Vol. 32. Pp. 2011–2026.
5. Solodushkin S.I., Yumanova I.F., De Staelen R.H. First order partial differential equations with time delay and retardation of a state variable. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2015. Vol. 289. Pp. 322–330.
6. Mackey M.C., Rudnicki R. A new criterion for the global stability of simultaneous cell replication and maturation processes. *Journal of Mathematical Biology*, 1999. Vol. 38. Pp. 195–219.
7. Meleshko S.V., Moyo S. On the complete group classification of the reaction–diffusion equation with a delay. *Journal of mathematical analysis and applications*, 2008. Vol. 338. Pp. 448–466.
8. Long F.-S., Meleshko S.V. On the complete group classification of the one-dimensional nonlinear Klein-Gordon equation with a delay. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2016. Vol. 39. No. 12. Pp. 3255–3270.
9. Lobo J.Z., Valaulikar Y.S. Group analysis of the one dimensional wave equation with delay. *Applied Mathematics and Computation*, 2020. Vol. 378, iss. C, 125193. DOI: 10.1016/j.amc.2020.125193.
10. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014. Vol. 19. Pp. 417–430.
11. Polyanin A.D., Zhurov A.I. The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 2014. Vol. 6. Pp. 267–277.
12. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Tochnye resheniya nelineynykh reakcionno-diffuzionnykh uravnenij giperbolicheskogo tipa s zapazdyvaniem [Exact solutions of nonlinear delay reaction-diffusion equations of hyperbolic type]. *Vestnik NIYaU «MIFI»*, 2014. Vol. 3. No. 2. Pp. 141–148 (in Russian).
13. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Tochnye resheniya nelineynykh uravnenij v chastnykh proizvodnykh s peremennym zapazdyvaniem tipa pantografa [Exact Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations

with Pantograph Type Variable Delay]. Vestnik NIYaU MIFI, 2020. Vol. 9. No. 4. Pp. 315–328 (in Russian).

14. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact separable solutions of delay reaction–diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014. Vol. 19. No. 3. Pp. 409–416.

15. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Generalized and functional separable solutions to nonlinear delay Klein–Gordon equations. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014. Vol. 19. No. 8. Pp. 2676–2689.

16. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Nonlinear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients: Exact methods and new solutions. Applied Mathematics Letters, 2014. Vol. 37. Pp. 43–48.

17. Polyanin A.D., Zhurov A.I. New generalized and functional separable solutions to nonlinear delay reaction–diffusion equations. International Journal of Non-linear Mechanics, 2014. Vol. 59. Pp. 16–22.

18. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Postroenie tochnykh reshenij nelinejnykh uravnenij matematicheskoy fiziki s zapazdyvaniem s pomoshh'ju reshenij bolee prostykh uravnenij bez zapazdyvaniya [Construction of exact solutions for nonlinear equations of mathematical physics with delay using solutions of simpler equations without delay]. Vestnik NIYaU MIFI, 2020. Vol. 9. No. 2. Pp. 115–128 (in Russian).

19. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Nonlinear pantograph-type diffusion PDEs: Exact solutions and the principle of analogy. Mathematics, 2021. V. 9 (5). 511. DOI: 10.3390/math9050511.

20. Polyanin A.D., Sorokin V.G. A method for constructing exact solutions of nonlinear delay PDEs. Journal of Mathematical Analysis and Applications,

2021. V. 494 (2). 124619. DOI: 10.1016/j.jmaa.2020.124619.

21. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Construction of exact solutions to nonlinear PDEs with delay using solutions of simpler PDEs without delay. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2021. V. 95(1). 105634. DOI: 10.1016/j.cnsns.2020.105634.

22. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Reductions and exact solutions of nonlinear wave-type PDEs with proportional and more complex delays. Mathematics, 2023. Vol. 11. 516. DOI: 10.3390/math11030516.

23. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Exact solutions of reaction-diffusion PDEs with anisotropic time delay. Mathematics, 2023. Vol. 11. 3111. DOI: 10.3390/math11143111.

24. Polyanin A.D., Sorokin V.G., Zhurov A.I. Differentsial'nye uravneniya s zapazdyvaniem: Svoystva, metody, resheniya i modeli [Differential equations with delay: Properties, methods, solutions and models]. Moscow, IPMech RAS Publ., 2022. 464 p. (in Russian).

25. Tanthanuch J. Symmetry analysis of the nonhomogeneous inviscid Burgers equation with delay. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2012. Vol. 17. Pp. 4978–4987.

26. Polyanin A.D. Postroenie reshenij nelinejnykh uravnenij matematicheskoy fiziki s pomoshh'ju tochnykh reshenij bolee prostykh uravnenij [Constructing solutions to nonlinear equations of mathematical physics using exact solutions to simpler equations]. Vestnik NIYaU MIFI, 2024. Vol. 13. No. 2. Pp. 66–75 (in Russian).

27. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed. Boca Raton, CRC Press, 2012.