

УДК 519.63

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ НЕРЕГУЛЯРНОЙ СЕТКИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФфуЗИИ

С.А. Ладыгин^{1,*}, Р.Н. Карачурин¹, К.Е. Шильников^{1,2}, П.Н. Рябов¹

¹Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
кафедра прикладной математики, Москва, 115409, Россия

²Московский физико-технический институт (МФТИ),
кафедра вычислительной физики, Московская область, 141701, Россия

*e-mail: SALadygin@mephi.ru

Поступила в редакцию: 25.07.2024

После доработки: 25.07.2024

Принята к публикации: 06.08.2024

В данной работе предлагается новый метод построения нерегулярной сетки для численного решения задач, содержащих одномерное уравнение конвекции-диффузии, часто встречающегося в различных областях вычислительной математики, физики и химии. Традиционные подходы либо используют регулярные сетки с большим числом узлов, либо адаптивные сетки, требующие перестройки на каждом шаге решения, что может быть вычислительно затратным. Наш метод основан на преобразовании неоднородной сетки в равномерную с помощью функции локальных деформаций, определяемой на основе критерия монотонности. Это позволяет получать монотонное решение на сетке с существенно меньшим числом узлов, повышая тем самым экономичность разностной схемы. Мы рассматриваем как стационарное, так и нестационарное уравнение конвекции-диффузии, описывая соответствующие алгоритмы построения сеток для дивергентной и недивергентной форм записи конвективных членов. Приведены примеры применения метода к различным задачам, демонстрирующие его преимущества по сравнению с существующими подходами на регулярных сетках. Представленный подход сочетает в себе преимущества нерегулярных сеток для повышения эффективности решения и использование критерия монотонности для обеспечения устойчивости схемы, расширяя возможности численных методов для дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: нерегулярные сетки, дифференциальные уравнения, уравнение конвекции-диффузии, численные методы.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.5.3

EDN KWNCTL

ВВЕДЕНИЕ

Нерегулярные сетки находят широкое применение при решении различных задач в области вычислительной математики, гидродинамики, физики и других сферах, где встречаются дифференциальные уравнения. Методы конечных разностей [1], конечных элементов [2] и конечных объемов [3] активно используют нерегулярные сетки для численного моделирования. Кроме того, такие сетки могут быть применены в неклассическом численном подходе к решению задач математической физики, включающих дифференциальные уравнения, а именно – в методе с использованием архитектур нейронных сетей [4, 5]. В данной работе рассматривается проблема построения нерегулярной сетки для уравнения конвекции-диффузии.

Для стационарного уравнения конвекции-диффузии было предложено множество методов

построения нерегулярных сеток. В обзорных работах [6, 7] рассматриваются различные подходы, основанные на использовании знаний о виде решения около особенностей и построении сеток, равномерно распределяющих узлы на кривой решения. Также упоминаются адаптивные методы, в которых сетка перестраивается вместе с решением, учитывая численную ошибку. Альтернативный подход представлен в [8], где используются равномерные сетки и специальные схемы, сохраняющие монотонность решения, однако имеющие более низкий порядок аппроксимации по сравнению со схемами на нерегулярных сетках.

Нестационарное уравнение конвекции-диффузии создает дополнительные сложности, для преодоления которых применяются различные методы, в том числе используют подвижные адаптивные сетки. В работе [9] описан ме-

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ НЕРЕГУЛЯРНОЙ СЕТКИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ–ДИФФУЗИИ

тод динамической адаптации для параболических уравнений, основанный на переходе к произвольной нестационарной системе координат, что позволяет формулировать проблему построения и адаптации расчетных сеток на дифференциальном уровне. Данный подход был успешно применен для гиперболических и эллиптических уравнений [10, 11].

В настоящей работе предлагается новый метод построения нерегулярной сетки для одномерного уравнения конвекции-диффузии, основанный на трансформации неоднородной сетки в равномерную с использованием функции локальных деформаций. Отличительной особенностью данного подхода является определение функции локальных деформаций на основе критерия монотонности, что гарантирует монотонность разностной схемы при решении уравнения. Предложенный алгоритм построения сетки минимизирует общее количество используемых узлов, повышая экономичность вычислений. Таким образом, представленный метод сочетает в себе преимущества использования нерегулярных сеток для повышения точности решения и специальных критериев для обеспечения монотонности схемы, что является новым подходом в данной области исследований.

Работа рассматривает два основных случая: стационарное и нестационарное уравнения конвекции-диффузии. В первом разделе подробно описывается алгоритм построения сетки для стационарного уравнения, второй раздел посвящен обобщению этого метода для нестационарного случая. В третьем разделе приведены примеры применения построенных сеток для решения некоторых задач, в постановке которых присутствует уравнение конвекции-диффузии. Последний раздел содержит выводы и подведение итогов.

СТАЦИОНАРНЫЙ СЛУЧАЙ

Стационарные задачи конвекции-диффузии. Поставим задачу о построении нерегулярной сетки для одномерного стационарного уравнения конвекции-диффузии. Для этого будем рассматривать стационарные краевые задачи конвекционно-диффузионного переноса с однородными граничными условиями Дирихле:

$$\begin{cases} (\mathfrak{D} + \mathfrak{E})u(x) = f(x), & x \in (a, b), \\ u|_{x=a} = 0, \\ u|_{x=b} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $a, b \in \mathbb{R}$, $u \in C^2(a, b) \cap C^1[a, b]$, $f \in C^0[a, b]$, $\mathfrak{D}$ – оператор диффузионного переноса; $\mathfrak{E}$ – оператор конвективного переноса.

Оператор $\mathfrak{D}$ определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}u &= -\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right), \\ k &\in C^1(a, b) \cap C^0[a, b] \\ (\forall x \in [a, b] \quad k(x) > 0). \end{aligned} \quad (2)$$

В работе Оператор $\mathfrak{E}$ рассматривается в двух различных формах:

1. Недивергентная форма – $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1$,

$$\mathfrak{E}_1 u = v(x) \frac{du}{dx}, \quad v \in C^0[a, b]; \quad (3)$$

2. Дивергентная форма – $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_2$,

$$\mathfrak{E}_2 u = \frac{d}{dx} (v(x)u), \quad v \in C^1(a, b) \cap C^0[a, b]. \quad (4)$$

Целью данной работы является построение нерегулярной сетки, адаптированной к особенностям решения задачи (1) для обеих форм оператора конвективного переноса. Для этого предлагается использовать подход, основанный на замене координат, который подробнее будет разобран в следующем разделе.

Замена координат. Так как метод построения нерегулярной сетки, рассмотренный в данной статье основан на преобразовании неоднородной сетки в равномерную, необходимо получить в общем виде задачу (1) при переходе в другую систему координат.

Рассмотрим замену координат:

$$x = x(q), \quad q \in [a, b].$$

Здесь q – новая независимая переменная. Причем $x(a) = a$ и $x(b) = b$.

Также введем функцию локальных деформаций

$$\Psi = \frac{dx}{dq}. \quad (5)$$

Функция Ψ имеет следующий смысл: при дискретизации рассматриваемой области меньшие значения функции соответствуют более плотному расположению узлов нерегулярной сетки, т.е. более высокому локальному сжатию координатной системы.

С учетом правила дифференцирования сложной функции в новой системе координат дифференциальные операторы (2)–(4) принимают вид:

1. Оператор диффузионного переноса $\mathfrak{D}$:

$$\mathfrak{D}u = -\frac{1}{\Psi} \frac{d}{dq} \left(k(x(q)) \frac{1}{\Psi} \frac{du}{dq} \right); \quad (6)$$

2. Оператор конвективного переноса в неди-
вергентной форме $\mathfrak{C}_1$:

$$\mathfrak{C}_1 u = v(x(q)) \frac{1}{\Psi} \frac{du}{dq}; \quad (7)$$

3. Оператор конвективного переноса в ди-
вергентной форме $\mathfrak{C}_2$:

$$\mathfrak{C}_2 u = \frac{1}{\Psi} \frac{d}{dq} (v(x(q))u). \quad (8)$$

В этом случае задача (1) примет следующий вид:

$$\begin{cases} (\mathfrak{D} + \mathfrak{C})u = f, & q \in (a, b), \\ u|_{q=a} = 0, \\ u|_{q=b} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

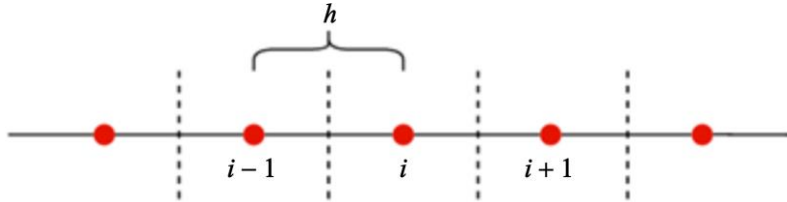


Рис. 1. Регулярная сетка

Пусть H – гильбертово пространство сеточных функций на сетке (10) со скалярным произведением

$$(u, w) = \sum_{q \in \omega_h} u(q)w(q)h$$

для произвольных сеточных функций $u(q)$ и $w(q)$, обращающихся в нуль при $q = a$ и $q = b$, а также нормой

$$\|u\| = (u, u)^{1/2} = \left(\sum_{q \in \omega_h} u^2(q)h \right)^{1/2}.$$

Определим сеточные функции проекций решения и правой части

$$\begin{cases} u_i = u(x_i) = u(x(q_i)), \\ f_i = f(x_i) = f(x(q_i)) \end{cases}$$

Замена координат позволяет перейти от исходной задачи (1) в системе координат x к задаче (9) в системе координат q . При этом дифференциальные операторы (2)–(4) преобразуются к виду (6)–(8), учитывающему функцию локальных деформаций Ψ .

Теперь, когда мы перешли к задаче (9) в равномерной системе координат, следующим шагом будет дискретизация дифференциальных операторов (6)–(8) и построение соответствующих сеточных операторов. Это позволит нам получить численную схему для задачи (9). Подробнее о построении сеточных операторов и виде численной схемы будет рассказано в следующем разделе.

Сеточные операторы и численная схема.

Введем равномерную сетку в пространстве q (рис. 1):

$$\bar{\omega}_h = \left\{ q \mid q = q_i = a + ih, \right. \\ \left. i = 0, 1, \dots, N-1, \quad h = \frac{b-a}{N-1} \right\} \quad (10)$$

со множеством внутренних узлов $\omega_h = \bar{\omega}_h \setminus \{q_0, q_{N-1}\}$. Здесь N – количество узлов сетки.

во внутренних узлах регулярной сетки (10), а также сеточные функции проекций коэффициентов диффузии и конвективного переноса

$$\begin{cases} k_{i+1/2} = k(x_{i+1/2}) = k\left(x\left(q_i + \frac{h}{2}\right)\right), \\ v_{i+1/2} = v(x_{i+1/2}) = v\left(x\left(q_i + \frac{h}{2}\right)\right) \end{cases}$$

в полупелых узлах сетки.

Запишем аппроксимацию функции локальных деформаций (5) в полупелых узлах со вторым порядком:

$$\Psi_{i+1/2} \approx \frac{x_{i+1} - x_i}{h}, \quad i = 0, \dots, N-2.$$

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ НЕРЕГУЛЯРНОЙ СЕТКИ
ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ–ДИФФУЗИИ

Тогда нерегулярная сетка (рис. 2)

$$\bar{\omega}_h^* = \{x | x = x_i, \quad i = 0, 1, \dots, N-2, \\ x_0 = a, \quad x_{N-1} = b\}$$



Рис. 2. Нерегулярная сетка

Аппроксимируем функцию Ψ во внутренних узлах регулярной сетки (10) следующим образом:

$$\Psi_i \approx \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2h}, \quad i = 1, \dots, N-2.$$

Аналогично [12] определим разностный оператор диффузионного переноса

$$(Du)_i = -\frac{1}{\Psi_i} \frac{1}{h^2} \left(\frac{k_{i+1/2}}{\Psi_{i+1/2}} (u_{i+1} - u_i) - \frac{k_{i-1/2}}{\Psi_{i-1/2}} (u_i - u_{i-1}) \right), \quad i = 1, \dots, N-2 \quad (11)$$

и разностный оператор конвективного переноса в недивергентной форме

$$(C_1 u)_i = \frac{1}{\Psi_i} \frac{1}{2h} (v_{i+1/2} (u_{i+1} - u_i) + v_{i-1/2} (u_i - u_{i-1})), \quad i = 1, \dots, N-2, \quad (12)$$

которые аппроксимируют дифференциальные операторы диффузионного переноса (6) и конвективного переноса в недивергентной форме (7) соответственно с точностью $O(h^2)$.

Разностные операторы конвективного переноса в дивергентной и недивергентной форме являются антисопряженными [12]:

$$C_1^* = -C_2.$$

Отсюда получим выражение для разностного оператора конвективного переноса в дивергентной форме:

$$(C_2 u)_i = \frac{1}{\Psi_i} \frac{1}{2h} (v_{i+1/2} (u_{i+1} + u_i) - v_{i-1/2} (u_i + u_{i-1})), \quad i = 1, \dots, N-2, \quad (13)$$

который аппроксимирует дифференциальный оператор конвективного переноса в дивергентной форме (8) с точностью $O(h^2)$.

строится следующим образом:

$$x_{i+1} = x_i + \Psi_{i+1/2} h, \quad i = 0, \dots, N-2.$$

Здесь $x_i = x(q_i)$.

В дальнейшем решение разностной задачи, в отличие от решения дифференциальной задачи, будем обозначать буквой y , так что $y_i = y(x_i) = y(x(q_i))$, $q_i \in \bar{\omega}_h$. Тогда разностная аппроксимация задачи (9) будет иметь вид

$$\begin{cases} (Dy)_i + (Cy)_i = f_i, & i = 1, \dots, N-2, \\ y_0 = 0, \\ y_{N-1} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Здесь оператор C – это один из двух операторов – (12) или (13).

Разностная схема (14) аппроксимирует дифференциальную задачу (9) на нерегулярной сетке $\bar{\omega}_h^*$, построенной с помощью функции локальных деформаций Ψ . Выбор этой функции определяет свойства получаемой разностной схемы, в частности, ее монотонность.

В следующем разделе будут выведены условия монотонности разностной схемы (14). Эти условия позволят найти такую функцию Ψ , при которой численное решение будет свободно от нефизичных осцилляций. Таким образом, функция Ψ , будет определяться из требования монотонности разностной схемы.

Вывод условий монотонности. Будем искать такую функцию Ψ , чтобы разностная схема (14) была монотонной. Для начала перепишем задачи (14) в следующем виде:

$$\begin{cases} -\alpha_i y_{i-1} + \gamma_i y_i - \beta_i y_{i+1} = \phi_i, & i = 1, 2, \dots, N-2, \\ y_0 = 0, \\ y_{N-1} = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Здесь коэффициенты α_i и β_i имеют вид

$$\begin{cases} \alpha_i = \frac{1}{h^2} \frac{k_{i-1/2}}{\Psi_{i-1/2}} + \frac{1}{2h} v_{i-1/2}, & i = 1, 2, \dots, N-2, \\ \beta_i = \frac{1}{h^2} \frac{k_{i+1/2}}{\Psi_{i+1/2}} - \frac{1}{2h} v_{i+1/2}, & i = 1, 2, \dots, N-2. \end{cases}$$

Вид коэффициентов γ_i зависит от оператора C , а правая часть φ_i выглядит как

$$\varphi_i = \Psi_i f_i, \quad i=1, 2, \dots, N-2.$$

Известно, что монотонность разностной схемы (14) эквивалентна выполнению *разностного принципа максимума* для (15) [12]. В частности, пусть в разностной схеме (15) $\varphi_i \geq 0$ для всех $i=1, 2, \dots, N-2$ (или же $\varphi_i \leq 0$ для $i=1, 2, \dots, N-2$). Тогда при выполнении условий

$$\begin{cases} \alpha_i > 0, & \beta_i > 0, & i=1, 2, \dots, N-2, \\ \gamma_i \geq \alpha_i + \beta_i, & i=1, 2, \dots, N-2 \end{cases} \quad (16)$$

или

$$\begin{cases} \alpha_i > 0, & \beta_i > 0, & i=1, 2, \dots, N-2, \\ \gamma_i \geq \alpha_{i+1} + \beta_{i-1}, & i=2, 3, \dots, N-3, \\ \gamma_1 > \alpha_2, & \gamma_{N-2} > \beta_{N-3} \end{cases} \quad (17)$$

имеет место $y_i \geq 0$, $i=1, 2, \dots, N-2$ ($y_i \leq 0$, $i=1, 2, \dots, N-2$).

Условия (16) или (17) являются достаточными условиями монотонности для схемы (14). Далее рассмотрим эти условия для разных форм разностного оператора конвективного переноса C .

Условия монотонности при $C = C_1$.

Рассмотрим недивергентную форму разностного оператора конвективного переноса C_1 .

Коэффициенты γ_i в данном случае имеют вид

$$\gamma_i = \frac{1}{h^2} \left(\frac{k_{i+1/2}}{\Psi_{i+1/2}} + \frac{k_{i-1/2}}{\Psi_{i-1/2}} \right) + \frac{1}{2h} (v_{i-1/2} - v_{i+1/2}),$$

$$i=1, \dots, N-2,$$

откуда видно, что

$$\gamma_i = \alpha_i + \beta_i, \quad i=1, 2, \dots, N-2.$$

Учитывая это, достаточные условия монотонности (16) схемы (14) сведутся к следующим:

$$\begin{cases} \alpha_i > 0, \\ \beta_i > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{h^2} \frac{k_{i-1/2}}{\Psi_{i-1/2}} + \frac{1}{2h} v_{i-1/2} > 0, \\ \frac{1}{h^2} \frac{k_{i+1/2}}{\Psi_{i+1/2}} - \frac{1}{2h} v_{i+1/2} > 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |v_{i+1/2}| < \frac{2}{h} \frac{k_{i+1/2}}{\Psi_{i+1/2}}.$$

Таким образом, достаточные условия монотонности схемы (14), когда разностный опера-

тор конвективного переноса имеет недивергентную форму записи ($C = C_1$):

$$\frac{|v_{i+1/2}| \Psi_{i+1/2} h}{k_{i+1/2}} < 2, \quad i=0, 1, 2, \dots, N-2. \quad (18)$$

Условия монотонности при $C = C_2$.

Рассмотрим дивергентную форму разностного оператора конвективного переноса C_2 .

Коэффициенты γ_i в данном случае имеют вид

$$\gamma_i = \frac{1}{h^2} \left(\frac{k_{i+1/2}}{\Psi_{i+1/2}} + \frac{k_{i-1/2}}{\Psi_{i-1/2}} \right) + \frac{1}{2h} (v_{i+1/2} - v_{i-1/2}),$$

$$i=1, \dots, N-2,$$

откуда видно, что

$$\gamma_i = \alpha_{i+1} + \beta_{i-1}, \quad i=2, 3, \dots, N-3.$$

Учитывая это, достаточные условия монотонности (17) схемы (14) сведутся к следующим:

$$\begin{cases} \alpha_i > 0, & i=1, 2, \dots, N-2, \\ \beta_i > 0, & i=1, 2, \dots, N-2, \\ \gamma_1 \geq \alpha_2, \\ \gamma_{N-2} > \beta_{N-3}. \end{cases}$$

Проведя выкладки, аналогичные случаю $C = C_1$, окончательно получаем, что достаточные условия монотонности схемы (14), когда разностный оператор конвекционного переноса имеет дивергентную форму записи ($C = C_2$), имеют такой же вид, как и условия (18):

$$\frac{|v_{i+1/2}| \Psi_{i+1/2} h}{k_{i+1/2}} < 2, \quad i=0, 1, 2, \dots, N-2.$$

Определение функции локальных деформаций. Для выполнения достаточных условий монотонности (18) будем искать функцию локальных деформаций в полуцелых узлах сетки в виде

$$\Psi_{i+1/2} = \alpha \frac{k_{i+1/2}}{|v_{i+1/2}| h}, \quad (19)$$

$$i=0, 1, 2, \dots, N-2, \quad \alpha \in (0, 2),$$

где α – нормировочный коэффициент.

Представление значений функции Ψ в виде (19) эффективно в областях, где нарушается монотонность, а именно, когда значение отношения $|v_{i+1/2}|/k_{i+1/2}$ велико. Однако в областях, где данное отношение мало или равно 0, ис-

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ НЕРЕГУЛЯРНОЙ СЕТКИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ–ДИФФУЗИИ

пользование (19) становится некорректным. Это обусловлено тем, что в областях, где достаточные условия монотонности (18) уже выполнены, сетка стремится разредиться.

Введем мажоранту для шага по нерегулярной сетке, обозначим ее d_m . Внесем соответствующие модификации в представление (19) следующим образом:

$$\Psi_{i+1/2} = \min\left(\alpha \frac{k_{i+1/2}}{|v_{i+1/2}|h}, \frac{d_m}{h}\right), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-2.$$

Правильный выбор значения d_m ограничивает сверху значение шага по сетке и не дает сделать шаг слишком большим.

Алгоритм нахождения узлов сетки

Начальное приближение сетки. Первым шагом в алгоритме является нахождение начального приближения нерегулярной сетки. Расположение узлов определяется формулой

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \Psi_{i+1/2}h = x_i + \min\left(\alpha \frac{k_{i+1/2}}{|v_{i+1/2}|}, d_m\right), & i = 0, 1, \dots, \\ x_0 = a. \end{cases}$$

Здесь значение коэффициента α подлежит определению. В первом приближении возьмем предельное значение $\alpha = 2$. Получение следующего узла находится итеративно с помощью метода Ньютона [13]:

$$\begin{cases} x_{i+1}^{(n)} \rightarrow x_{i+1}^{(n+1)}, & n = 0, 1, \dots, \\ x_{i+1}^{(0)} = x_i. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{i+1} = \min(x_{i+1}^{(\infty)}, b).$$

Из-за фиксации коэффициента α будут выполняться следующие выражения:

$$\begin{cases} \frac{|v_{i+1/2}|\Psi_{i+1/2}h}{k_{i+1/2}} = 2, & i = 0, 1, \dots, N-1. \\ \frac{|v_{N-3/2}|\Psi_{N-3/2}h}{k_{N-3/2}} < 2. \end{cases}$$

Причем последнее получается за счет обрезания следующего значения x_{i+1} правым краем границы. Благодаря этому можно переставить узлы x_i таким образом, чтобы значение везде было одинаковым и меньше 2.

Нахождение итоговой сетки. Вторым шагом в алгоритме будет нахождение итоговой нерегулярной сетки. Она получается путем решения следующей системы нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \Psi_{i+1/2}h = x_i + \min\left(\alpha \frac{k_{i+1/2}}{|v_{i+1/2}|}, d_m\right), \\ i = 0, 1, \dots, N-2, \\ x_0 = a, \\ x_{N-1} = b. \end{cases}$$

Здесь коэффициент α является одной из неизвестных.

Данную систему можно численно решить любым итерационным методом для систем нелинейных уравнений (см. [13]), где начальное приближение для нерегулярной сетки определяется из предыдущего шага алгоритма.

В результате получается нерегулярная сетка, при использовании которой для численного решения задачи с уравнением конвекции-диффузии гарантируется монотонное решение. При этом общее количество используемых узлов довольно мало.

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ СЛУЧАЙ

Нестационарные задачи конвекции-диффузии. Теперь перейдем к постановке задачи о построении нерегулярной сетки для нестационарного уравнения конвекции-диффузии. Для этого будем рассматривать нестационарную краевую задачу конвекционно-диффузионного переноса с однородными граничными условиями Дирихле, а также начальным условием:

$$\begin{cases} u_t(x, t) + (\mathfrak{D} + \mathfrak{E})u(x, t) = f(x, t), \\ x \in (a, b), \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in [a, b], \\ u|_{x=a} = 0, \quad t > 0, \\ u|_{x=b} = 0, \quad t > 0. \end{cases} \quad (20)$$

Здесь $a, b \in \mathbb{R}$, $u_0 \in C^0[a, b]$, $u \in C^2((a, b) \times (0, +\infty)) \cap C^1([a, b] \times [0, +\infty))$, $f \in C^0([a, b] \times [0, +\infty))$, $\mathfrak{D}$ – оператор диффузионного переноса, $\mathfrak{E}$ – оператор конвективного переноса.

Оператор $\mathfrak{D}$ определяется аналогично стационарному случаю (2):

$$\mathfrak{D}u = -\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

где $k \in C^1((a, b) \times (0, +\infty)) \cap C^0([a, b] \times [0, +\infty))$, причем $\forall (x, t) \in [a, b] \times [0, +\infty) k(x, t) > 0$.

Оператор конвективного переноса $\mathfrak{C}$, так же как и в стационарном случае (3)–(4), рассматривается в различных формах:

1. Недивергентная форма $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1$:

$$\mathfrak{C}_1 u = v(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad v \in C^0([a, b] \times [0, +\infty));$$

2. Дивергентная форма $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_2$:

$$\mathfrak{C}_2 u = \frac{\partial}{\partial x} (v(x, t) u),$$

$$v \in C^1((a, b) \times (0, +\infty)) \cap C^0([a, b] \times [0, +\infty)).$$

Как и в стационарном случае, нестационарное уравнение конвекции – диффузии в задаче (20) описывает перенос вещества или другого параметра в среде, где присутствуют как диффузионные, так и конвективные процессы. Однако, в отличие от стационарной задачи, здесь учитывается изменение искомой функции $u(x, t)$ не только в пространстве, но и во времени.

Для написания численной схемы нестационарной задачи (20) требуется дискретизация не только по пространственной переменной x , но и по времени t . В качестве таких схем для нестационарных задач конвекции-диффузии чаще всего выступают двухслойные разностные схемы. В следующем разделе будет рассмотрена дискретизация задачи (20) по времени для которой будет использована именно такая схема.

Двухслойная разностная схема. Пусть задано вещественное конечномерное гильбертово пространство и сетка по времени:

$$\bar{\omega}_\tau = \omega_\tau \cup \{0\} = \left\{ t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, M-1; \quad \tau = \frac{T}{M-1} \right\},$$

$$T \in \mathbb{R}.$$

Здесь M – количество узлов сетки $\bar{\omega}_\tau$.

Проведем дискретизацию по пространственной переменной и определим разностные операторы конвективного $C = C(t)$ и диффузионного $D = D(t)$ переносов, как и в стационарном случае (11)–(13). Для приближенного решения задачи (20) будем использовать двухслойную чисто неявную схему:

$$\begin{cases} \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + (D + C)(y_{n+1}) = f_n, & t_n \in \omega_\tau, \\ y_0 = u_0, \end{cases} \quad (21)$$

где $y_n = y(t_n) \in H$ – искомая функция решения разностной задачи, а $f_n = f(t_n)$, $u_0 \in H$ – заданы. Данная схема устойчива по времени и имеет по нему первый порядок аппроксимации.

Для получения пространственной сетки на каждом временном слое будем использовать алгоритм для стационарного случая. Тогда у пространственной сетки, имеющей вид

$$\bar{\omega}_h^*(t_n) = \{x \mid x = x_i^n, i = 1, \dots, N_n - 2; \\ x_0^n = a, x_{N_n-1}^n = b\},$$

число узлов N_n и расположение узлов зависят от времени. В связи с этим возникает вопрос об аппроксимации значения функции u на прошлом временном слое в текущей точке пространственной сетки.

Рассмотрим две пространственные сетки $\bar{\omega}_h^*(t_n)$ и $\bar{\omega}_h^*(t_{n+1})$ соответственно на n -м и $n+1$ -м временных слоях (рис. 3). Пусть точка x_i^{n+1} с $n+1$ временного слоя лежит между точками x_j^n и x_{j+1}^n с n -го временного слоя. Напишем линейную интерполяцию для u с прошлого временного слоя в точке x_i^{n+1} [13]:

$$y(x_i^{n+1}, t_n) \approx y(x_j^n, t_n) + \\ + \frac{y(x_{j+1}^n, t_n) - y(x_j^n, t_n)}{x_{j+1}^n - x_j^n} (x_i^{n+1} - x_j^n).$$

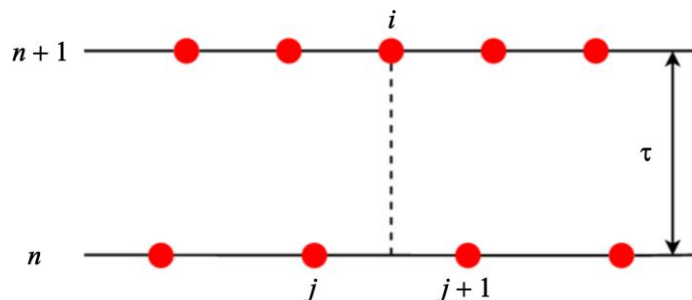


Рис. 3. Последовательно идущие по времени две пространственные сетки

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ НЕРЕГУЛЯРНОЙ СЕТКИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ–ДИФФУЗИИ

Данный вид интерполяции был выбран из-за того, что он имеет второй порядок аппроксимации. Благодаря этому, порядок аппроксимации схемы (21) будет

$$O(\tau + h^2), \quad \text{где} \quad h = \max_{i,n} |x_{i+1}^n - x_i^n|.$$

Монотонность разностной схемы. Покажем, что для монотонности схемы (21) будет достаточно условий монотонности (18).

Теорема. Пусть в схеме (21)

$$\begin{aligned} f_n &\geq 0, \quad x \in \bar{\omega}_h^*(t_n), \quad n = 0, 1, \dots, M-1, \\ u_0(x) &\geq 0, \quad x \in \bar{\omega}_h^*(t_0), \end{aligned}$$

и выполнены достаточные условия монотонности стационарного случая (18), тогда

$$y_{n+1} \geq 0, \quad x \in \bar{\omega}_h^*(t_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots, M-2.$$

Доказательство. Перепишем схему (21) в виде

$$y_{n+1} + \tau(D+C)(y_{n+1}) = y_n + \tau f_n. \quad (22)$$

Предположим, что

$$y_n \geq 0, \quad x \in \bar{\omega}_h^*(t_n)$$

(при $n = 0$ это имеет место в силу предположений теоремы). Отсюда и из условий теоремы ($f_n \geq 0, x \in \bar{\omega}_h^*(t_n), n = 0, 1, \dots, M-1$) получаем

$$y_n + \tau f_n \geq 0, \quad x \in \bar{\omega}_h^*(t_n).$$

Тогда при выполнении условий (18) в силу принципа максимума из (22) имеем

$$y_{n+1} \geq 0, \quad x \in \bar{\omega}_h^*(t_{n+1}).$$

Из данной теоремы следует, что для монотонности разностной схемы (21) достаточно выполнений условий (18) на каждом временном слое. Таким образом, достаточно на каждом временном слое использовать сетку, которая строится алгоритмом для стационарного случая.

ДЕМОНСТРАЦИЯ РАБОТЫ АЛГОРИТМА НА ПРИМЕРАХ

Уравнение Блэка – Шоулза. Рассмотрим применение приведенного метода построения оптимальной нерегулярной сетки на примере

краевой задачи, содержащей дифференциальное уравнение Блэка – Шоулза. Данное уравнение при определенных предположениях описывает цену опциона в зависимости от цены акции и времени, благодаря чему оно широко используется на практике [14].

Пусть нам дана задача:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \\ S \in (1, L), \quad 0 \leq \tilde{t} < T, \\ V|_{\tilde{t}=T} = S - 1, \quad S \in [1, L], \\ V|_{S=1} = 0, \quad 0 \leq \tilde{t} < T, \\ V|_{S=L} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} L, \quad 0 \leq \tilde{t} < T, \end{cases}$$

где V – цена опциона; S – цена акции; $\tilde{t}$ – время (обычно в годах); σ – волатильность акции; r – безрисковая процентная ставка; T – время истечения срока действия опциона; L – максимальная цена акции.

Путем замены переменных

$$\begin{cases} S = x, \\ \tilde{t} = T - t, \\ V(S, \tilde{t}) = x \cdot u(x, t), \end{cases}$$

перейдем от данной задачи к модельной, которая содержит исследуемое нами уравнение конвекции-диффузии:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + v(x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ x \in (1, L), \quad 0 < t \leq T, \\ u|_{t=0} = 1 - 1/x, \quad x \in [1, L], \\ u|_{x=1} = 0, \quad 0 < t \leq T, \\ V|_{x=L} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 1, \quad 0 < t \leq T, \end{cases}$$

где $k(x) = 1/2 \sigma^2 x^2$, а $v(x) = -rx$.

Так как коэффициенты диффузии и конвективного переноса не зависят от времени, то пространственная сетка будет одинаковой для каждого временного слоя. Вид данной сетки для значений параметров $\sigma = 0.01$, $r = 0.025$, $L = 100$, $T = 25$, $d_m = 0.5$, $\tau = 0.5$ можно увидеть на рис. 4.

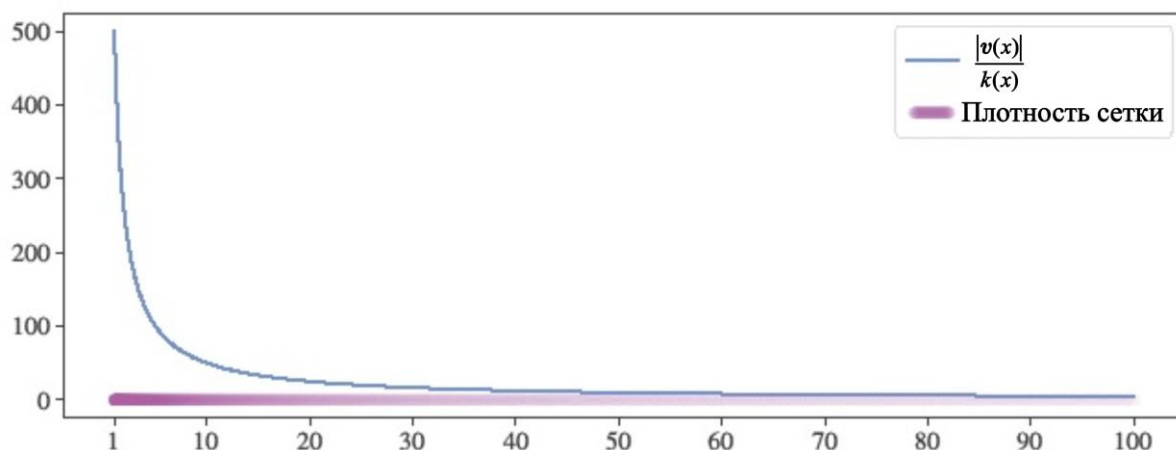


Рис. 4. Плотность распределения сетки и функция отношения из условий монотонности

Решение данной задачи при тех же параметрах на данной сетке и равномерной с тем же числом узлов изображено на рис. 5 и 6 соответственно.

Из полученных решений видно, что при использовании равномерной сетки с таким же числом узлов решение получается немонотонным. Число используемых точек на сетке, построенной предложенным в данной работе методом, в 21 раз меньше, чем на равномерной сетке, для которой точно выполняются условия монотонности (1153 против 24750). Сравнение

времени численного решения задачи на двух разных процессорах при использовании равномерной и нерегулярной сеток можно увидеть в табл. 1. В среднем, вычисление, с использованием оптимизированной алгоритмом сетки, было быстрее в 450 раз. Такой большой прирост производительности достигается за счет того, что в данном случае функции v и k не зависят от времени, а значит сетку нужно строить лишь единожды. В подобных задачах применение нерегулярных сеток наиболее выгодно.

Таблица 1. Сравнение времени вычислений при использовании разных сеток

CPU/OS	Равномерная сетка (24750 узлов)	Нерегулярная сетка (1153 узлов)	Ускорение
Intel i7-1260P/ Windows 11	49 мин. 35.8 с.	7.7 с.	386.47
Apple M1 Pro/macOS 13.2	38 мин. 34.1 с.	4.5 с.	514.24

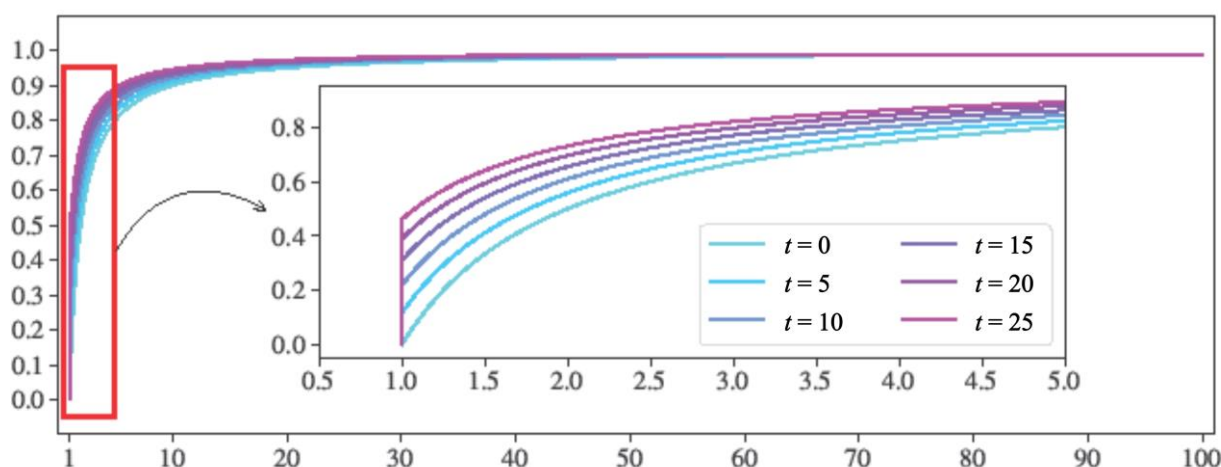


Рис. 5. Решение уравнения Блэка – Шоулза на нерегулярной сетке

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ НЕРЕГУЛЯРНОЙ СЕТКИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ–ДИФФУЗИИ

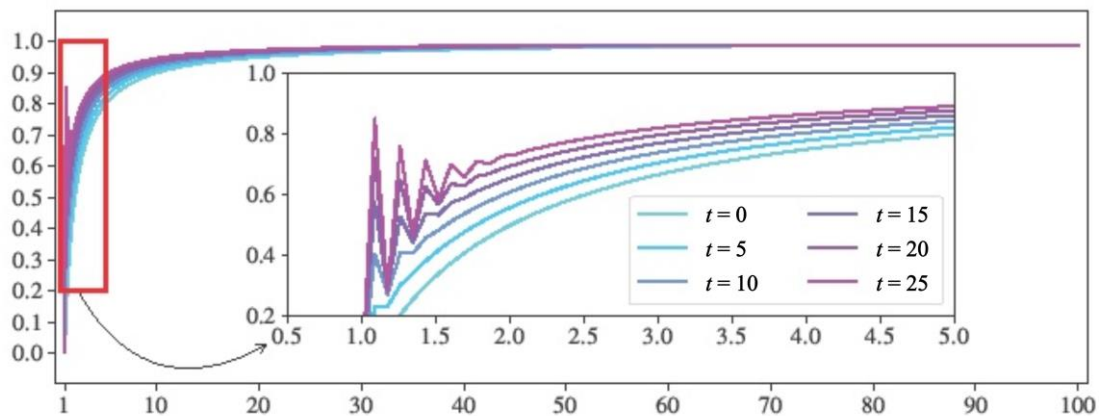


Рис. 6. Решение уравнения Блэка – Шоулза на равномерной сетке

Уравнение Фоккера – Планка. Рассмотрим еще один пример краевой задачи. Теперь уже содержащей уравнение Фоккера – Планка [15], которое описывает эволюцию вероятностной плотности системы под воздействием случайных сил. Это уравнение широко используется в физике, химии, экономике и других областях, где присутствуют случайные процессы. Оно также известно под другим названием, а именно – прямое уравнение Колмогорова [16].

Пусть дана задача:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0, & x \in (-L, L), \quad 0 < t \leq T, \\ S(x, t) = \left[D^{(1)}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} D^{(2)}(x, t) \right] p(x, t), \\ p|_{t=0} = \frac{1}{2l} \theta(l - |x|), & x \in [-L, L], \\ p|_{x=-L} = p|_{x=L} = 0, & 0 < t \leq T, \end{cases}$$

где $p(x, t)$ – вероятностная плотность нахождения системы в состоянии x в момент времени t , $D^{(1)}(x, t)$ и $D^{(2)}(x, t)$ – коэффициенты дрефта и диффузии соответственно (для уравнения конвекции-диффузии в дивергентной форме представляют собой функции $v(x, t)$ и $k(x, t)$), θ – функция Хевисайда, l – половина длины интервала распределения, $L \gg l$ – половина длины исследуемой области, T – время вычисления.

Рассмотрим ее при следующих значениях функций $D^{(1)}(x, t)$ и $D^{(2)}(x, t)$:

$$\begin{cases} D^{(1)}(x, t) = A\delta(x+t+l) - A\delta(x-t-l), \\ D^{(2)}(x, t) = \exp(-t/T). \end{cases}$$

Здесь δ – дельта-функция Дирака, а A – амплитуда дельта-функции.

Для численных расчетов будем использовать не саму дельта-функцию, а ее аппроксимацию функцией Гаусса:

$$\delta(x) \approx \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} e^{-(\beta x)^2}, \quad \beta \gg 1.$$

Тепловую карту количества точек на единицу площади полученной нерегулярной сетки, а также график поверхности функции $|D^{(1)}(x, t)| / D^{(2)}(x, t)$ для значений параметров $A = 30$, $\beta = \sqrt{1000}$, $l = 1$, $L = 10$, $T = 5$, $d_m = 0.05$, $\tau = 0.1$ можно увидеть на рис. 7.

Численное решение задачи при тех же параметрах на построенной нерегулярной сетке и равномерной с таким же числом узлов можно сравнить на рис. 8.

Из сравнения видно, что неравномерная сетка при том же количестве узлов сохраняет монотонность решения. Необходимое число узлов по координате, чтобы решение точно сохраняло монотонность на равномерной сетке, равно 14550, что в 30 раз больше, чем максимальное число узлов по координате на полученной нерегулярной сетке, а именно – 477. Сравнивая общее число узлов данных сеток (суммарно на каждом временном слое), имеем 742050 узлов на равномерной против 22829 на нерегулярной. Из-за такого большого разрыва в количестве точек, хоть и нерегулярная сетка перестраивается на каждом временном слое, время численного решения задачи получается гораздо меньше, что можно увидеть в табл. 2. В ней представлены данные, полученные при вычислениях, проводимых на двух разных процессорах и операционных системах. Вычисление с использованием нерегулярной сетки в среднем быстрее в 6 раз.

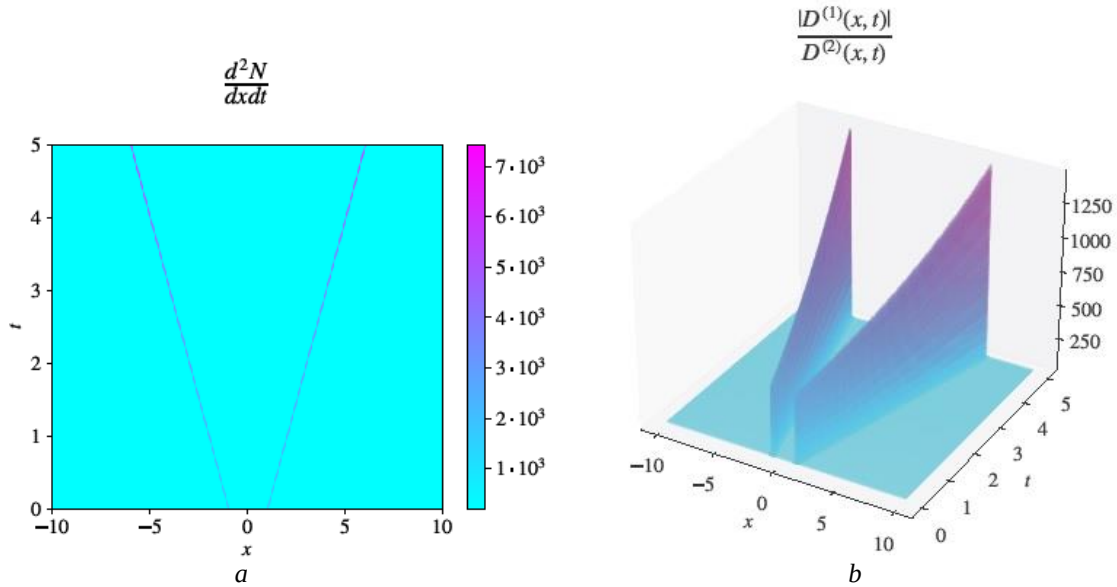


Рис. 7. Плотность сетки (a) и функция модуля отношения коэффициентов (b)

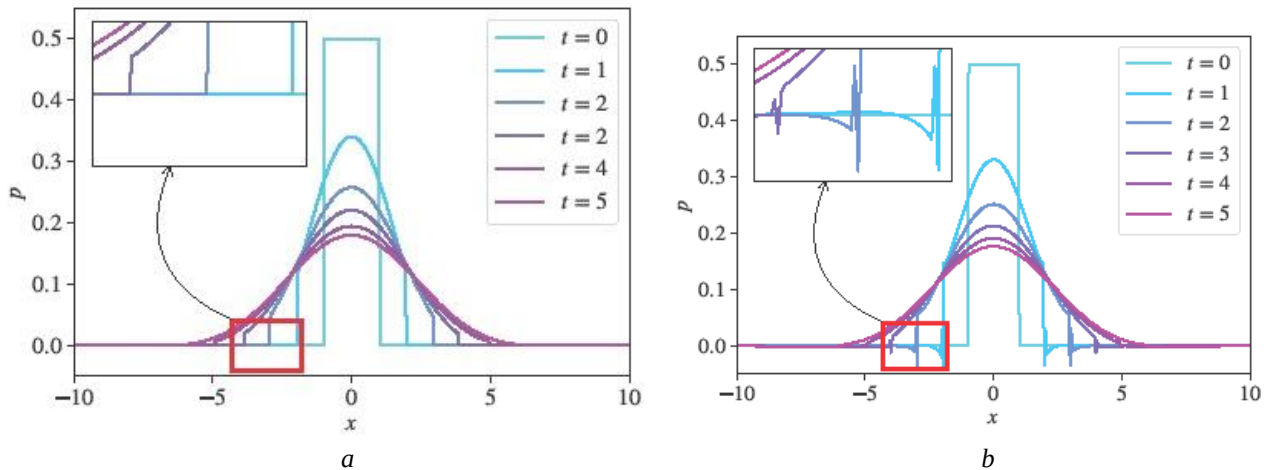


Рис. 8. Срезы численного решения задачи в разные моменты времени: а) нерегулярная сетка; б) равномерная сетка

Таблица 2. Сравнение времени вычислений при использовании разных сеток

CPU/OS	Равномерная сетка (742050 узлов)	Нерегулярная сетка (22829 узлов)	Ускорение
Intel i7-1260P/Windows 11	13 мин 7.8 с	2 мин 11 с	6.01
Apple M1 Pro/macOS 13.2	7 мин 15.9 с	1 мин 16.8 с	5.68

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе проведения работы был разработан и протестирован новый подход к созданию нерегулярных сеток для численного решения задач конвекции-диффузии в одномерном случае. Этот подход основывается на трансформации неоднородной сетки в равномерную с использованием функции локальных деформаций и позволяет обеспечить монотонность разностной

схемы, что является критически важным для многих приложений.

Было показано, что нерегулярные сетки, созданные с использованием предложенного подхода, обеспечивают сохранение монотонности разностной схемы при значительно меньшем количестве узлов, по сравнению с равномерными сетками. Это приводит к существенному увеличению эффективности алгоритмов, использующих такие сетки.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ НЕРЕГУЛЯРНОЙ СЕТКИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ–ДИФФУЗИИ

В заключение хотелось бы подчеркнуть, что предложенный подход к построению нерегулярных сеток является перспективным инструментом для решения широкого спектра задач, связанных с уравнением конвекции-диффузии. Он позволяет обеспечить низкое время вычислений при этом не сильно ухудшая точность решения.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-41-00070, <https://rscf.ru/project/23-41-00070/>

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Годунов С.К., Рябенкий В.С. Разностные схемы (введение в теорию): Учебное пособие. М.: Наука, 1997.
2. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация / Пер. с англ. М.: Мир, 1986. 318 с.
3. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Разностные методы решения задач математической физики на нерегулярных сетках // Математическое моделирование, 2001. Т. 13. № 2. С. 5–16.
4. Ladygin S.A., Karachurin R.N., Ryabov P.N., Kudryashov N.A. On Specific Features of an Approach Based on Feedforward Neural Networks to Solve Problems Based on Differential Equations // Physics of Atomic Nuclei, 2023. V. 86. № 10. P. 2231–2240.
5. Karachurin R.N., Ladygin S.A., Ryabov P.N., Shilnikov K.E., Kudryashov N.A. Exploring the Efficiency of Neural Networks for Solving Dynamic Process Problems: The Fisher Equation Investigation // Biologically Inspired Cognitive Architectures Meeting. Cham: Springer Nature Switzerland, 2023. P. 504–511.
6. Linß T. Layer-adapted meshes for convection–diffusion problems // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2003. V. 192. № 9–10. P. 1061–1105.
7. Roos H.G. Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations: a survey covering 2008–2012 // International Scholarly Research Notices, 2012. V. 2012. № 1. P. 379547.
8. Kuzmin D., Turek S. Flux correction tools for finite elements // Journal of Computational Physics, 2002. V. 175. № 2. P. 525–558.
9. Мажукин А.В., Мажукин В.И. Динамическая адаптация в параболических уравнениях // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2007. Т. 47. № 11. С. 1913–1936.
10. Shilnikov K.E., Kochanov M.B. On one approach for the numerical solving of hyperbolic initial-boundary problems on an adaptive moving grids // Journal of Computational and Applied Mathematics, 2023. V. 421. P. 114884.
11. Shilnikov K.E., Kochanov M.B. Numerical solution of two-dimensional (2D) nonlinear heat conductivity problem on moving grids // Journal of Physics: Conference Series, 2020. V. 1686. № 1. P. 012038.
12. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии М.: УРСС, 2003. 246 с.
13. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: Учебное пособие для вузов. М.: Наука, 1989. 432 с.
14. Chan R.H., Guo Y.Z., Lee S.T., Li X. Black–Scholes–Merton Model for Option Pricing // Financial Mathematics, Derivatives and Structured Products. Singapore: Springer Nature Singapore, 2024. P. 155–171.
15. Risken H., Risken H. Fokker-planck equation // Springer Berlin Heidelberg, 1996. P. 63–95.
16. Kolmogorov A. Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeits theorie // Math Annal, 1931. V. 104. P. 415–458.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2024, vol. 13, no. 5, pp. 303–315

ON A METHOD FOR CONSTRUCTING AN IRREGULAR GRID FOR THE ONE-DIMENSIONAL CONVECTION-DIFFUSION EQUATION

S.A. Ladygin¹, R.N. Karachurin¹, K.E. Shilnikov^{1,2}, P.N. Ryabov¹

¹National Research Nuclear University «MEPhI», Department of Applied Mathematics,
Moscow, 115409, Russia.

²Moscow Institute of Physics and Technology (MIPT), Department of Computational Physics,
Moscow Region, 141701, Russia

*e-mail: SALadygin@mephi.ru

Received July 25, 2024; revised July 25, 2024; accepted August 06, 2024

In this paper, we propose a new method for constructing an irregular grid for the numerical solution of problems containing a one-dimensional convection-diffusion equation, which is often encountered in various fields of computational mathematics, physics, and chemistry. Traditional approaches either use regular grids with a large number of

nodes or adaptive grids that require rebuilding at each solution step, which can be computationally expensive. Our method is based on transforming a non-uniform grid into a uniform one using a local deformation function determined based on a monotonicity criterion. This allows us to obtain a monotonic solution on a grid with a significantly smaller number of nodes, thereby increasing the efficiency of the difference scheme. We consider both stationary and non-stationary convection-diffusion equations, describing the corresponding grid construction algorithms for divergent and non-divergent forms of recording convective terms. Examples of applying the method to various problems are given, demonstrating its advantages over existing approaches on regular grids. The presented approach combines the advantages of irregular grids to improve the solution efficiency and the use of a monotonicity criterion to ensure the stability of the scheme, expanding the capabilities of numerical methods for differential equations.

Keywords: irregular grids, differential equations, convection-diffusion equation, numerical methods.

REFERENCES

1. Godunov S.K., Ryaben'kii V.S. Raznostnye skhemy (vvedenie v teoriyu). Ucheb. pos., [Difference schemes (introduction to theory). Textbook]. Moscow, Nauka Publ., 1997.
2. Zenkevich O., Morgan K. Konechnye elementy i approksimatsiya [Finite Elements and Approximation]. Moscow, Mir Publ., 1986. 318 p. (in Russian).
3. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. Raznostnye metody resheniya zadach matematicheskoi fiziki na neregulyarnykh setkakh [Difference methods for solving problems of mathematical physics on irregular grids]. Matematicheskoe modelirovanie, 2001. Vol. 13. No. 2. Pp. 5–16 (in Russian).
4. Ladygin S.A., Karachurin R.N., Ryabov P.N., Kudryashov N.A. On Specific Features of an Approach Based on Feedforward Neural Networks to Solve Problems Based on Differential Equations // Physics of Atomic Nuclei, 2023. Vol. 86. No. 10. Pp. 2231–2240.
5. Karachurin R.N., Ladygin S.A., Ryabov P.N., Shilnikov K.E., Kudryashov N.A. Exploring the Efficiency of Neural Networks for Solving Dynamic Process Problems: The Fisher Equation Investigation. Biologically Inspired Cognitive Architectures Meeting. Cham: Springer Nature Switzerland, 2023. Pp. 504–511.
6. Linß T. Layer-adapted meshes for convection-diffusion problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2003. Vol. 192. No. 9–10. Pp. 1061–1105.
7. Roos H.G. Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations: a survey covering 2008–2012. International Scholarly Research Notices, 2012. Vol. 2012. No. 1. Pp. 379547.
8. Kuzmin D., Turek S. Flux correction tools for finite elements. Journal of Computational Physics, 2002. Vol. 175. No. 2. Pp. 525–558.
9. Mazhukin A.V., Mazhukin V.I. Dinamicheskaya adaptatsiya v parabolicheskikh uravneniyakh [Dynamic adaptation in parabolic equations]. Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki, 2007. Vol. 47. No. 11. Pp. 1913–1936 (in Russian).
10. Shilnikov K.E., Kochanov M.B. On one approach for the numerical solving of hyperbolic initial-boundary problems on an adaptive moving grids. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2023. Vol. 421. Pp. 114884.
11. Shilnikov K.E., Kochanov M.B. Numerical solution of two-dimensional (2D) nonlinear heat conductivity problem on moving grids. Journal of Physics: Conference Series, 2020. Vol. 1686. No. 1. Pp. 012038.
12. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. Chislennye metody resheniya zadach konveksii-diffuzii [Numerical methods for solving convection-diffusion problems], Moscow, URSS Publ., 2003. 246 p.
13. Samarskii A.A., Gulin A.V. Chislennye metody. Uchebnoye posobie dlya vuzov [Numerical methods. Textbook, manual for universities]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 432 p.
14. Chan R.H., Guo Y.Z., Lee S.T., Li X. Black-Scholes–Merton Model for Option Pricing. Financial Mathematics, Derivatives and Structured Products. Singapore, Springer Nature Singapore, 2024. Pp. 155–171.
15. Risken H., Risken H. Fokker-planck equation. Springer Berlin Heidelberg, 1996. Pp. 63–95.
16. Kolmogorov A. Ber die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeits theorie. Math Annal, 1931. Vol. 104. Pp. 415–458.