

УДК 517.95

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ ПРИ УСЛОВИИ ФИНАЛЬНОГО НАБЛЮДЕНИЯ

¹В.Л. Камынин

¹Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия
e-mail: vlkamyinin2008@yandex.ru

Поступила в редакцию: 18.09.2024

После доработки: 18.09.2024

Принята к публикации: 24.09.2024

В работе рассматривается нелинейная обратная задача определения, зависящего от x младшего коэффициента в равномерно параболическом уравнении со многими пространственными переменными. Коэффициенты уравнения могут зависеть как от временной, так и от пространственных переменных и предполагаются ограниченными, но, вообще говоря, разрывными. При этом (в отличие от работ других авторов) нет ограничений на знаки младших коэффициентов уравнения и его правой части. В качестве дополнительного условия задается условие финального (в конечный момент времени) наблюдения. Решение обратной задачи понимается в обобщенном смысле и ищется в классах Соболева. Установлены два типа достаточных условий, при которых обобщенное решение обратной задачи существует и единственно. Приведен пример обратной задачи, для которой справедливы доказанные в работе результаты. Отмечено, что решение указанной задачи существует и единственно либо если отрезок времени, на котором рассматривается задача, достаточно велик (а область пространственных переменных фиксирована), либо если область пространственных переменных достаточно мала (а отрезок времени фиксирован).

Ключевые слова: обратные задачи определения младшего коэффициента, параболические уравнения, финальное наблюдение.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.5.5

EDN NGQCYO

ВВЕДЕНИЕ

В работе изучаются вопросы существования и единственности решения обратной задачи определения неизвестного коэффициента $\gamma(x)$ в параболическом уравнении

$$\begin{aligned} \rho(t, x)u_t - \Delta u + \langle \vec{b}(x), u_x \rangle + c(t, x)u + \gamma(x)u = \\ = f(t, x)u, \quad (t, x) \in Q, \end{aligned} \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$u(t, x)|_{\Gamma} = \Psi(t, x)|_{\Gamma} \quad (2)$$

и дополнительным условием финального наблюдения

$$u(T, x) = \varphi(x), \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (3)$$

Здесь $Q = [0, T] \times \bar{\Omega}$, где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$, Γ – «параболическая» граница области Q , т.е. $\Gamma = \{0\} \times \bar{\Omega} \cup [0, T] \times \partial\Omega$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\vec{b}(x) =$

$$\begin{aligned} &= (b_1(x), \dots, b_n(x)), \quad u_x = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n}), \quad \langle \vec{b}(x), u_x \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^n b_i(x)u_{x_i}; \quad \vec{b}(x) - \text{известная вектор-функ-} \\ &\text{ция; } \rho(t, x), c(t, x), f(t, x), \Psi(t, x), \varphi(x) - \text{известные} \\ &\text{функции.} \end{aligned}$$

Обратная задача (1)–(3) ранее рассматривалась рядом авторов: см., например, [1], [2], где рассматривались классические решения в классах Гельдера, [3], где изучалась единственность решения, [4]–[7], где были доказаны теоремы существования и единственности обобщенных решений задачи вида (1)–(3), но при этом предполагались ограничения на знаки функций $f(t, x)$, $f_i(t, x)$, а кроме того, в [4]–[6] рассматривались уравнения с независимыми от t коэффициентами.

В настоящей работе мы доказываем теоремы существования и единственности обобщенного решения обратной задачи (1)–(3) в классах Соболева без предположений о знаках коэффициентов уравнения (1) и функции $\Psi(t, x)$.

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ
В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ ПРИ УСЛОВИИ ФИНАЛЬНОГО НАБЛЮДЕНИЯ

Отметим еще работу [8], где в близкой постановке изучалась однозначная разрешимость обратной задачи определения неизвестной правой части уравнения (1) при дополнительном условии (3).

Перейдем к точным формулировкам.

Все равенства и неравенства в работе предполагаются выполненными почти всюду, все рассматриваемые функции предполагаются, как минимум, измеримыми, производные понимаются в обобщенном смысле по Соболеву. Используемые в работе пространства Лебега, Соболева и Гельдера с соответствующими нормами будем понимать в общепринятом смысле (см, например, [9]). В частности, через $W_s^{1,2}(Q)$ обозначим пространство Соболева функций, принадлежащих $L_s(Q)$ и имеющих первую производную по переменной t , а также все первые и вторые производные по переменным x , также принадлежащие $L_s(Q)$.

Положим

$$Q(t_1, t_2) = [t_1, t_2] \times \bar{\Omega}, \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T, \quad Q(0, T) \equiv Q,$$

$$|\vec{b}(x)| = \left(\sum_{i=1}^n b_i^2(x) \right)^{1/2}, \quad |u_x| = \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right)^{1/2},$$

$$|u_{xx}| = \left(\sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_j}^2 \right)^{1/2},$$

$$L_\infty^+(\Omega) = \{z(x) \in L_\infty(\Omega) : z(x) \geq 0\},$$

$$B_R^+ = \{z(x) \in L_\infty(\Omega) : 0 \leq z(x) \leq R\}.$$

Нам понадобится арифметическое неравенство Коши

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2, \quad \varepsilon > 0, \quad (4)$$

а также неравенство Пуанкаре–Стеклова

$$\|z\|_{L_2(\Omega)} \leq \kappa(n, \Omega) \|z_x\|_{L_2(\Omega)} \quad \forall z \in \overset{0}{W}^1_2(\Omega). \quad (5)$$

Отметим, что для $\kappa(n, \Omega)$ справедлива оценка (см., например, [10, с. 161])

$$\kappa(n, \Omega) \leq \left(\frac{1}{\omega_n} |\Omega| \right)^{1/n}, \quad (6)$$

где $|\Omega|$ – объем области Ω , а ω_n – объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$.

Во всех дальнейших рассуждениях будем предполагать выполненными следующие условия:

$$0 < \rho_1 \leq \rho(t, x) \leq \rho_2, \quad \rho_3 \leq \rho(0, x) \leq \rho_4,$$

$$\rho_5 \leq \rho(T, x) \leq \rho_6,$$

$$-K_{p,1} \leq \rho_t(t, x) \leq K_{p,2}, \quad (t, x) \in Q; \quad (A)$$

$$|\vec{b}(x)| \leq K_b, \quad \text{и для некоторого } i = 1, 2, \dots, n$$

$$b_i(x) \leq b^*, \quad x \in \bar{\Omega}; \quad (B)$$

$$-K_{c,1} \leq c(t, x) \leq K_{c,2}, \quad -K_{c,1}^* \leq c_t(t, x) \leq K_{c,2}^*,$$

$$(t, x) \in Q;$$

$$c(T, x) \geq 0, \quad x \in \bar{\Omega}; \quad K_c^* = \max\{K_{c,1}^*, K_{c,2}^*\}; \quad (C)$$

$$|f(t, x)| \leq K_f, \quad f_1 \leq f(T, x) \leq f_2,$$

$$|f(0, x)| \leq f_3, \quad |f_t(t, x)| \leq K_f^*, \quad (t, x) \in Q; \quad (D)$$

$$\Psi(t, x) \in W_\infty^{1,2}(Q), \quad \Psi_t(t, x) \in W_2^{1,2}(Q),$$

$$\Psi(0, x) = 0, \quad x \in \bar{\Omega};$$

$$|\Psi(t, x)| \leq M_1, \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega,$$

$$|\Psi_t(t, x)| \leq M_2, \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega; \quad (E)$$

$$\varphi(x) \in W_\infty^2(\Omega), \quad 0 < \varphi_1 \leq \varphi(x) \leq \varphi_2,$$

$$\varphi_1^* \leq \Delta\varphi - \langle \vec{b}(x), \varphi_x \rangle \leq \varphi_2^*, \quad x \in \bar{\Omega}; \quad (F)$$

$$\varphi(x) = \Psi(T, x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (G)$$

В условиях (A) – (F) $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_6, M_1, \varphi_1, \varphi_2 = \text{const} > 0, K_{p,1}, K_{p,2}, K_b, b^*, K_{c,1}, K_{c,2}, K_{c,1}^*, K_{c,2}^*, M_2, f_3, K_f, K_f^* = \text{const} \geq 0, f_1, f_2, \varphi_1^*, \varphi_2^*$ – константы произвольного знака.

Определение 1. Обобщенным решением обратной задачи (1)–(3) будем называть пару функций $\{u(t, x), \gamma(x)\}$ таких, что

$$u(t, x) \in W_2^{1,2}(Q) \cap C^{0,\alpha}(Q),$$

$$\alpha = \text{const} > 0, \quad \gamma(x) \in L_\infty^+(\Omega),$$

$$u(t, x) - \Psi(t, x) \in L_\infty(0, T; \overset{0}{W}^1_2(\Omega)),$$

$$\int_\Omega |u(t, x) - \Psi(t, x)| dx \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0^+;$$

пара $\{u(t, x), \gamma(x)\}$ удовлетворяет уравнению (1) п.в. в Q , а функция $u(t, x)$ удовлетворяет условию наблюдения (3).

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Пусть $\gamma(x) \in L_\infty^+(\Omega)$ – известная функция. Рассмотрим прямую задачу (1), (2). В силу [11], [12,

гл. 4] она имеет единственное решение:
 $u(t, x) \in W_2^{1,2}(Q) \cap C^{0,\alpha}(Q)$.

Пусть при некотором $i \in \{1, 2, \dots, n\}$
 $b_i(x) \leq b^*$, $x \in \bar{\Omega}$, $b^* = \text{const} \geq 0$ (см. условие (B)),
а d – размер области Ω в направлении оси x_i , т.е.
 $\forall x \in \bar{\Omega}$, $x_i^0 - d \leq x_i \leq x_i^0$.

Положим

$$\mu = b^* + 1, \quad m_1 = [M_1 + K_f(e^{\mu d} - 1)]e^{K_{c,1}T/\rho_1}. \quad (7)$$

Тогда в силу [12, с. 59–61] для $u(t, x)$ справедлива оценка

$$|u(t, x)| \leq m_1, \quad (t, x) \in Q. \quad (8)$$

Покажем, что в силу наших предположений (A) – (E) решение $u(t, x)$ обладает дополнительной гладкостью.

Положим $v(t, x) = u(t, x) - \Psi(t, x)$. Тогда $v(t, x)$ является обобщенным решением задачи:

$$\begin{aligned} \rho(t, x)v_t - \Delta v + \langle \vec{b}(x), v_x \rangle + c(t, x)v + \\ + \gamma(x)v = F(t, x)u, \quad (t, x) \in Q, \end{aligned} \quad (9)$$

$$v(t, x)|_{\Gamma} = 0, \quad (10)$$

где $F(t, x) \equiv f(t, x) - \Psi_t(t, x)\rho(t, x) + \Delta\Psi(t, x) - \langle \vec{b}(x), \Psi_x(t, x) \rangle - c(t, x)\Psi(t, x) - \gamma(x)\Psi(t, x) \in L_\infty(Q)$.

Рассмотрим еще две задачи:

$$\begin{aligned} (\rho(t, x), z)_t - \Delta z + \langle \vec{b}(x), z_x \rangle + \\ + c(t, x)z + \gamma(x)z = \\ = f_t(t, x) - c(t, x)u(t, x), \quad (t, x) \in Q, \end{aligned} \quad (11)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} z(t, x) = \Psi_t(t, x), \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega, \\ z(0, x) = \frac{f(0, x)}{\rho(0, x)}, \quad x \in \Omega \end{aligned} \quad (12)$$

где в уравнении (11) $u(t, x)$ – решение задачи (1), (2), и задачу

$$\begin{aligned} (\rho(t, x), \omega)_t - \Delta\omega + \langle \vec{b}(x), \omega_x \rangle + \\ + c(t, x)\omega + \gamma(x)\omega = \\ = F_t(t, x) - c_t(t, x)v(t, x), \quad (t, x) \in Q, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\omega(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega, \quad (14)$$

$$\omega(t, x)|_{t=0} = \omega_0(x) \equiv \frac{F(0, x)}{\rho(0, x)}, \quad x \in \Omega, \quad (15)$$

где в уравнении (13) $v(t, x)$ – решение задачи (9), (10).

Заметим, что (11), (12) является формально продифференцированной задачей (1), (2), а (13)–(15) является формально продифференцированной задачей (9), (10).

В силу [11] задача (13)–(15) имеет единственное решение $\omega(t, x)$, принадлежащее классу

$$C(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; W_2^1(Q)) \cap W_2^{1,2}(Q(\varepsilon, T)), \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Продолжим $\vec{b}(x)$ нулем вне $\bar{\Omega}$ и введем средние функции $\vec{b}^h(x)$. Рассмотрим следующие две задачи:

$$\begin{aligned} \rho(t, x)v_t^h - \Delta v^h + \langle \vec{b}^h(x), v_x^h \rangle + \\ + c(t, x)v^h + \gamma(x)v^h = F(t, x), \quad (t, x) \in Q, \end{aligned} \quad (16)$$

$$v^h(t, x)|_{\Gamma} = 0, \quad (17)$$

и

$$\begin{aligned} (\rho(t, x)\omega^h)_t - \Delta\omega^h + \langle \vec{b}^h(x), \omega_x^h \rangle + \\ + c(t, x)\omega^h + \gamma(x)\omega^h = \\ = F_t(t, x) - c_t(t, x)v^h(t, x), \quad (t, x) \in Q, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\omega^h(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega, \quad (19)$$

$$\omega^h(t, x)|_{t=0} = \omega_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (20)$$

Задача (16), (17) имеет единственное решение

$$v^h(t, x) \in C(0, T; W_2^1(Q)) \cap W_2^{1,2}(Q),$$

а задача (18)–(20) имеет единственное решение

$$\begin{aligned} \omega^h(t, x) \in C(0, T; L_2(\Omega)) \cap \\ \cap L_2(0, T; W_2^1(Q)) \cap W_2^{1,2}(Q(\varepsilon, T)), \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Введем понятие обобщенного L_2 – решения задачи (18)–(20).

Определение 2. Функция $\omega^h(t, x) \in L_2(Q)$ называется обобщенным L_2 -решением задачи (18)–(20), если

$$\forall \chi(t, x) \in$$

$$L_2(0, T; W_2^1(\Omega)) \cap W_2^{1,2}(Q), \quad \chi(T, x) = 0,$$

выполняется интегральное тождество

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ
В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ ПРИ УСЛОВИИ ФИНАЛЬНОГО НАБЛЮДЕНИЯ

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega} \rho(0, x) \omega_0(x) \chi(0, x) dx - \\
 & - \int_Q \rho(t, x) \omega^h \chi_t(t, x) dx dt - \int_Q \omega^h \Delta \chi(t, x) dx dt - \\
 & - \int_Q \langle \bar{b}^h(x), \chi(t, x) \rangle \omega^h dx dt - \\
 & - \int_Q \operatorname{div} \bar{b}^h(x) \cdot \omega^h \chi(t, x) dx dt + \\
 & + \int_Q (c(t, x) + \gamma(x)) \omega^h \chi(t, x) dx dt = \\
 & = \int_Q (F_t(t, x) - c_t(t, x) v^h(t, x)) \chi(t, x) dx dt.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Повторяя рассуждения из [14, гл. 4, §1], [8], получаем, что такое решение задачи (18)–(20) единственно.

Пусть $v^h(t, x)$ – решение задачи (16), (17). Покажем, что $v_t^h(t, x)$ – обобщенное решение задачи (18)–(20).

Рассмотрим произвольную функцию

$$\begin{aligned}
 \chi(t, x) & \in L_2(0, T; W_2^1(Q)) \cap W_2^{1,2}(Q), \\
 \chi(T, x) & = 0,
 \end{aligned}$$

и продолжим ее нулем при $t > T$. Положим $\chi_\delta(t, x) = \frac{1}{\delta} \int_t^{t+\delta} \chi(\tau, x) d\tau$ – усреднение по Стеклому функции $\chi(t, x)$. Тогда $\chi_{\delta_t} \in L_2(0, T; W_2^1(Q)) \cap W_2^{1,2}(Q)$. Умножим (16) на $-\chi_{\delta_t}$ и проинтегрируем по Q . После интегрирования по частям приходим к соотношению

$$\begin{aligned}
 & - \int_Q (\rho v_t^h) \chi_{\delta_t} dx dt - \int_Q v_t^h \Delta \chi_\delta dx dt - \\
 & - \int_Q \langle \bar{b}^h, \chi_{\delta_x} \rangle v_t^h dx dt - \int_Q \operatorname{div} \bar{b}^h \cdot v_t^h \chi_\delta dx dt + \\
 & + \int_Q (c(t, x) + \gamma(x)) v_t^h \chi_\delta dx dt + \int_Q c_t v^h \chi_\delta dx dt = \\
 & = \int_\Omega F(0, x) \chi_\delta(0, x) dx + \int_Q F_t \chi_\delta dx dt.
 \end{aligned}$$

В силу известных свойств средних функций в этом равенстве можно перейти к пределу при $\delta \rightarrow 0$. В результате получим интегральное тождество (21) для функции v_t^h , а следовательно, эта функция является обобщенным L_2 -решением

задачи (18)–(20). В силу единственности такого решения получаем, что

$$\begin{aligned}
 v_t^h(t, x) & = \omega^h(t, x) \in C(0, T; L_2(\Omega)) \cap \\
 & \cap L_2(0, T; W_2^1(Q)) \cap W_2^{1,2}(Q(\varepsilon, T)), \forall \varepsilon > 0.
 \end{aligned}$$

В частности, функция v_t^h есть «энергетическое решение» задачи (18)–(20) из класса $C(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; W_2^1(Q))$ (см. [9, гл. 3, §1] и для нее справедливо интегральное тождество

$$\begin{aligned}
 & - \int_Q (\rho v_t^h) \chi_t dx dt - \int_Q \langle v_{tx}^h, \chi_x \rangle dx dt - \\
 & - \int_Q \langle \bar{b}^h, v_{tx}^h \rangle \chi dx dt + \int_Q (c + \gamma) v_t^h \chi dx dt = \\
 & = \int_\Omega F(0, x) \chi(0, x) dx + \int_Q F_t \chi dx dt - \\
 & - \int_Q c_t v^h \chi dx dt,
 \end{aligned} \tag{22}$$

и верна равномерная по h оценка

$$\|v_t^h\|_{W_2^1(Q)} + \|v^h\|_{L_2(Q)} \leq C_1. \tag{23}$$

В силу (23) в тождестве (22) можно сделать предельный переход при $h \rightarrow 0$, в результате чего приходим к выводу, что функция $v_t(t, x)$ является решением задачи (13)–(15) из класса $L_2(0, T; W_2^1(\Omega))$. В силу единственности такого решения (см. [9, с. 172]) получаем, что

$$\begin{aligned}
 v_t(t, x) & = \omega(t, x) \in C(0, T; L_2(\Omega)) \cap \\
 & \cap L_2(0, T; W_2^1(\Omega)) \cap W_2^{1,2}(Q(\varepsilon, T)), \forall \varepsilon > 0.
 \end{aligned}$$

Повторяя теперь рассуждения из [14, с. 116–117], находим, что $v_{xx}(t, x) \in C(0, T; L_2(\Omega))$, причем справедлива оценка

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|v_{xx}(t, \cdot)\|_{L_2(\Omega)} \leq C_2. \tag{24}$$

Но тогда функция $u_t(t, x) \equiv v_t(t, x) + \Psi_t(t, x)$ является обобщенным решением задачи (11), (12) из класса

$$\begin{aligned}
 & C(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; W_2^1(\Omega)) \cap \\
 & \cap W_2^{1,2}(Q(\varepsilon, T)), \forall \varepsilon > 0,
 \end{aligned}$$

где $u(t, x)$ – решение задачи (1), (2), причем $u_{xx} \in C(0, T; L_2(\Omega))$. Кроме того, в силу [13, с. 59–61] для $u_t(t, x)$ справедлива оценка

$$|u_t(t, x)| \leq \left[M_3 + (K_f^* + K_c^* m_1) \times \right. \\ \left. \times (e^{\mu d} - 1) \right] e^{\frac{K_{c,1} + K_{p,1}}{\rho_1}} \equiv m_2, \quad (25)$$

где $M_3 = \max\{f_3/\rho_3, M_2\}$, а m_1 определена в (7).

Замечание 1. Номер i оси x_i при получении оценок (8) и (25) следует выбрать так, чтобы произведение $\mu d \equiv (b^* + 1)d$ было наименьшим.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Теорема 1. Пусть выполнены условия (A) – (G). Положим

$$\lambda^* = \max \left\{ 0, \frac{2K_{c,1} + K_{p,1} + K_b^2 - \frac{1}{2\kappa^2}}{\rho_1} \right\}, \quad (26)$$

$$\lambda_0 = \max \left\{ 0, \frac{2K_{c,1} + K_{p,2} + K_b^2 - \frac{1}{2\kappa^2}}{\rho_1} \right\}. \quad (27)$$

Предположим, что справедливо неравенство

$$\frac{4\rho_6^2}{\Phi_1^2} e^{\lambda^* T} \kappa^2 T \left[m_2^2 + \frac{K_c^{*2}}{\rho_1} e^{\lambda_0 T} m_1^2 \kappa^2 T \right] < 1, \quad (28)$$

где m_1 определена в (7), m_2 определена в (25), константа $\kappa \equiv \kappa(n, \Omega)$, из неравенства (5). Тогда обобщенное решение обратной задачи (1)–(3) единственно.

Доказательство. Предположим, что существует два решения – $\{u^{(1)}(t, x), \gamma^{(1)}(x)\}$ и $\{u^{(2)}(t, x), \gamma^{(2)}(x)\}$ – этой задачи. Положим

$$y(t, x) = u^{(1)}(t, x) - u^{(2)}(t, x),$$

$$\sigma(x) = \gamma^{(1)}(x) - \gamma^{(2)}(x).$$

Тогда справедливы соотношения

$$\rho(t, x) y_t - \Delta y + \langle \vec{b}(x), y_x \rangle + \\ + c(t, x) y + \gamma^{(1)}(x) y = \\ = -u^{(2)}(t, x) \sigma(x), \quad (t, x) \in Q. \quad (29)$$

$$y(t, x)|_{\Gamma} = 0, \quad (30)$$

$$y(T, x) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (31)$$

Положим $p(t, x) = y_t(t, x)$. Тогда, как показано в предыдущем разделе, $p(t, x)$ удовлетворяет соотношениям («продифференцированной» задаче (29), (30)):

$$(\rho(t, x) p)_t - \Delta p + \langle \vec{b}(x), p_x \rangle + \\ + c(t, x) p + \gamma^{(1)}(x) p = \\ = -u_t^{(2)}(t, x) \sigma(x) - c_t(t, x) y(t, x), \quad (t, x) \in Q. \quad (32)$$

$$p(t, x)|_{\Gamma} = 0. \quad (33)$$

Умножим соотношение (32) на $e^{-\lambda^* \tau} p$ и проинтегрируем по Q_τ , $0 < \tau \leq T$. После интегрирования по частям приходим к соотношению

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} e^{-\lambda^* \tau} \int_{\Omega} \rho(\tau, x) p^2(\tau, x) dx + \\ & + \frac{\lambda^*}{2} \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} \rho(t, x) p^2 dx dt - \\ & - \frac{1}{2} \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} \rho_t(t, x) p^2 dx dt + \\ & + \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} |p_x|^2 dx dt + \\ & + \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} \langle \vec{b}(x), p_x \rangle p dx dt + \\ & + \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* \tau} c(t, x) p^2 dx dt + \\ & + \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} \gamma^{(1)}(x) p^2 dx dt + \\ & + \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} \rho_t(t, x) p^2 dx dt = \\ & = - \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} u_t^{(2)}(t, x) \sigma(x) p dx dt - \\ & - \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} c_t(t, x) y(t, x) p dx dt. \end{aligned} \quad (34)$$

Учитывая условия (A) – (C), тот факт, что $\gamma^{(1)}(x) \geq 0$, и применяя для оценки соответствующих слагаемых в (34) неравенство (4), находим, что

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ
В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ ПРИ УСЛОВИИ ФИНАЛЬНОГО НАБЛЮДЕНИЯ

$$\begin{aligned}
 & \frac{\rho_1}{2} e^{-\lambda^* \tau} \|p(\tau, \cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda^*}{2} \rho_1 \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} p^2 dx dt + \\
 & \quad + \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} |p_x|^2 dx dt \leq \\
 & \leq K_{c,1} \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} p^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} |p_x|^2 dx dt + \\
 & \quad + \frac{K_b^2}{2} \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} p^2 dx dt + \\
 & \quad + \frac{K_{\rho,1}^2}{2} \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} p^2 dx dt + \varepsilon \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} p^2 dx dt + \\
 & \quad + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} |u_t^{(2)}|^2 \sigma^2 dx dt + \frac{K_c^2}{2\varepsilon} \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} y^2 dx dt,
 \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
 & \frac{\rho_1}{2} e^{-\lambda^* \tau} \|p(\tau, \cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda^*}{2} \rho_1 \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} p^2 dx dt + \\
 & \quad + \frac{1}{2} \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} |p_x|^2 dx dt \leq \\
 & \leq \left(K_{c,1} + \frac{K_{\rho,1}^2}{2} + \frac{K_b^2}{2} \right) \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} p^2 dx dt + \\
 & \quad + \varepsilon \lambda^2 \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} |p_x|^2 dx dt + \\
 & \quad + \frac{m_2^2}{2\varepsilon} \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} \sigma^2 dx dt + \frac{K_c^2}{2\varepsilon} \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} y^2 dx dt.
 \end{aligned} \tag{35}$$

Выбирая в (35) $\varepsilon = \frac{1}{4\lambda^2}$ и применяя для оценки снизу третьего слагаемого в левой части (35) неравенство (5), приходим к соотношению

$$\begin{aligned}
 & \frac{\rho_1}{2} e^{-\lambda^* \tau} \|p(\tau, \cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \\
 & \quad + \left(\frac{\lambda^*}{2} \rho_1 + \frac{1}{4\lambda^2} \right) \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} p^2 dx dt \leq \\
 & \leq \left(K_{c,1} + \frac{K_{\rho,1}^2}{2} + \frac{K_b^2}{2} \right) \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} p^2 dx dt + \\
 & \quad + 2\lambda^2 m_2^2 \int_0^\tau e^{-\lambda^* t} dt \cdot \|\sigma\|_{L_2(\Omega)}^2 + \\
 & \quad + 2\lambda^2 K_c^2 \int_{Q(0, \tau)} e^{-\lambda^* t} y^2 dx dt,
 \end{aligned}$$

откуда с учетом определения λ^* (см. условие (26)) получаем, что

$$\begin{aligned}
 \|p(\tau, \cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2 & \leq 4e^{-\lambda^* \tau} \lambda^2 \tau \frac{m_2^2}{\rho_1} \|\sigma\|_{L_2(\Omega)}^2 + \\
 & \quad + 4e^{-\lambda^* \tau} \lambda^2 \frac{K_c^2}{\rho_1} \|y\|_{L_2(Q)}^2.
 \end{aligned} \tag{36}$$

Оценим $\|y\|_{L_2(Q)}^2$. Для этого умножим соотношение (29) на $e^{-\lambda_0 t} y$ и проинтегрируем результат по $Q(0, \tau)$. Повторив предыдущие рассуждения и учитывая определение λ_0 в (27), придем к неравенству

$$\|y(\tau, \cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \frac{2}{\rho_1} e^{\lambda_0 \tau} m_1^2 \lambda^2 \tau \|\sigma\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

откуда

$$\|y\|_{L_2(Q)}^2 \leq \frac{1}{\rho_1} e^{\lambda_0 T} m_1^2 \lambda^2 T^2 \|\sigma\|_{L_2(\Omega)}^2. \tag{37}$$

Подставляя (37) в (36), получаем оценку

$$\begin{aligned}
 \|y_t(T, \cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2 & \equiv \|p(T, \cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \\
 & \leq \frac{4}{\rho_1} e^{\lambda^* T} \lambda^2 T \left[m_2^2 + \frac{1}{\rho_1} T e^{\lambda_0 T} K_c^2 m_1^2 \lambda^2 \right] \times \\
 & \quad \times \|\sigma\|_{L_2(\Omega)}^2.
 \end{aligned} \tag{38}$$

Полагая в (29) $t = T$, получим с учетом (31), что $\rho(T, x) y_t(T, x) = -\varphi(x) \sigma(x)$, откуда

$$\|y_t(T, \cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2 \geq \frac{\Phi_1^2}{\rho_6^2} \|\sigma\|_{L_2(\Omega)}^2. \tag{39}$$

Из (38) и (39), в силу предположения (28), получаем, что $\|\sigma\|_{L_2(\Omega)}^2 = 0$, т.е. $\gamma^{(1)}(x) = \gamma^{(2)}(x)$, $x \in \Omega$. Но тогда из соотношений (29), (30) при $\sigma(x) = 0$, в силу единственности решения прямой задачи, получаем, что и $y(t, x) = 0$ в Q , т.е. $u^{(1)}(t, x) = u^{(2)}(t, x)$ в Q . Теорема доказана.

Перейдем к вопросу о существовании решения обратной задачи (1)–(3). Выведем операторное уравнение для нахождения неизвестного коэффициента $\gamma(x) \in L_\infty^+(\Omega)$. Положим в (1) $t = T$. Тогда с учетом (3) получим

$$\begin{aligned}
 & \rho(T, x) u_t(T, x) - \Delta \varphi + \langle \vec{b}(x), \varphi_x \rangle + \\
 & \quad + c(T, x) \varphi + \gamma(x) \varphi = f(T, x),
 \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \gamma(x) = & -\frac{\rho(T, x)}{\varphi_x} u_t(T, x) + \\ & + \frac{\Delta\varphi - \langle \bar{b}(x), \varphi_x \rangle + f(T, x)}{\varphi_x} - c(T, x). \end{aligned} \quad (40)$$

Введем оператор $\mathcal{B}: L_\infty^+(\Omega) \rightarrow L_\infty(\Omega)$ по формуле

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\gamma)(x) = & -\frac{\rho(T, x)}{\varphi(x)} u_t(T, x) + \\ & + \frac{\Delta\varphi - \langle \bar{b}(x), \varphi_x \rangle + f(T, x)}{\varphi(x)} - c(T, x), \end{aligned} \quad (41)$$

где $\gamma(x)$ – произвольная функция из $L_\infty^+(\Omega)$, а $u(t, x) \equiv u(t, x; \gamma)$ – решение прямой задачи (1), (2) с данным коэффициентом $\gamma(x)$ в уравнении (1). Тогда соотношение (40) переписывается в виде

$$\gamma = \mathcal{B}(\gamma). \quad (42)$$

Замечание 2. В силу предположений (A)–(F) и оценки (25) оператор $\mathcal{B}$ определен корректно и действует из $L_\infty^+(\Omega)$ в $L_\infty(\Omega)$.

Лемма 1. Пусть выполнены условия (A)–(G). Тогда операторное уравнение (42) эквивалентно обратной задаче (1)–(3) в следующем смысле. Если пара $\{u(t, x), \gamma(x)\}$ является решением обратной задачи (1)–(3), то $\gamma(x)$ удовлетворяет уравнению (42). Обратно, если $\hat{\gamma}(x) \in L_\infty^+(\Omega)$ является решением операторного уравнения (42), а $\hat{u}(t, x)$ – решение прямой задачи (1), (2) с данной $\hat{\gamma}(x)$ в уравнении (1), то пара $\{\hat{u}(x), \hat{\gamma}(x)\}$ является обобщенным решением обратной задачи (1)–(3).

Доказательство. Необходимость доказана выше при выводе соотношения (40).

Докажем достаточность. Пусть $\hat{\gamma}(x) \in L_\infty^+(\Omega)$ является решением уравнения (42). Рассмотрим функцию $\hat{u}(t, x)$ как единственное обобщенное решение прямой задачи (1), (2) с данным коэффициентом $\hat{\gamma}(x)$ в уравнении (1). Положим $\hat{\varphi}(x) = \hat{u}(T, x)$. Тогда, как было доказано в предыдущем разделе, $\hat{\varphi}(x) \in W_2^2(\Omega)$. Кроме того, в силу построения $\hat{u}(T, x)$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \rho(T, x) \hat{u}_t(T, x) - \Delta \hat{\varphi} + \langle \bar{b}(x), \hat{\varphi}_x \rangle + \\ + c(T, x) \hat{\varphi} + \hat{\gamma}(x) \hat{\varphi} = f(T, x). \end{aligned} \quad (43)$$

С другой стороны, $\hat{\gamma}(x)$ является решением уравнения (42), поэтому в силу определения оператора $\mathcal{B}$ в (41) имеем

$$\begin{aligned} \rho(T, x) \hat{u}_t(T, x) - \Delta \varphi + \langle \bar{b}(x), \varphi_x \rangle + \\ + c(T, x) \varphi + \hat{\gamma}(x) \varphi = f(T, x). \end{aligned} \quad (44)$$

Учитывая определение $\hat{\varphi}(x)$ и условие согласования (G), имеем

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(x)|_{\partial\Omega} = \hat{u}(T, x)|_{\partial\Omega} = \\ = \Psi(T, x)|_{\partial\Omega} = \varphi(x)|_{\partial\Omega}. \end{aligned} \quad (45)$$

Положим $\chi(x) = \varphi(x) - \hat{\varphi}(x)$. Вычитая (44) из (43) и учитывая (45), получаем, что $\chi(x) \in W_2^2(\Omega)$ является обобщенным решением задачи

$$\begin{aligned} -\Delta \chi + \langle \bar{b}(x), \chi_x \rangle + c(T, x) \chi + \hat{\gamma}(x) \chi = 0, \\ x \in \Omega, \quad \chi|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned}$$

Поскольку $\hat{\gamma}(x) \geq 0$, а в силу условия (C) и $c(T, x) \geq 0$, то получаем, что $\chi(x) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$ (см. [10, с. 225]).

Таким образом, $\varphi(x) = \hat{\varphi}(x)$ в $\bar{\Omega}$, а следовательно, пара $\{\hat{u}(T, x), \hat{\gamma}(x)\}$ является обобщенным решением обратной задачи (1)–(3).

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть выполнены условия (A)–(G). Предположим, что выполнено неравенство

$$\varphi_1^* + f_1 \geq \rho_6 m_2 + K_{c,2} \varphi_2, \quad (46)$$

где константа m_2 определена в (25). Тогда для всех $\gamma(x) \in L_\infty^+(\Omega)$ $\mathcal{B}(\gamma)(x) \geq 0$.

Доказательство. Из (46) с учетом оценки (25) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \Delta\varphi - \langle \bar{b}(x), \varphi_x \rangle + f(T, x) \geq \\ \geq \rho(T, x) u_t(T, x) + c(T, x) \varphi(x), \end{aligned}$$

из которого в силу определения оператора $\mathcal{B}$ в (41) следует утверждение леммы.

Лемма 3. Пусть выполнены условия (A) – (G) и неравенство (46). Тогда для всех $\gamma(x) \in L_\infty^+(\Omega)$ справедлива оценка

$$\|\mathcal{B}(\gamma)\|_{L_\infty(\Omega)} \leq K_\gamma, \quad (47)$$

$$\text{где} \quad K_\gamma = \frac{\rho_6}{\varphi_1} m_2 + \frac{\varphi_2^* + f_2}{\varphi_1}. \quad (48)$$

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ
В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ ПРИ УСЛОВИИ ФИНАЛЬНОГО НАБЛЮДЕНИЯ

Доказательство. Оценка (47) есть непосредственное следствие определения оператора $\mathcal{B}$ в (41), условий (A) – (F) и оценки (25).

Замечание 3. Если выполнено неравенство (46), то $\varphi_1^* + f_1 \geq 0$. Но тогда и $\varphi_2^* + f_2 \geq 0$, а следовательно, в (48) $K_\gamma \geq 0$.

Лемма 4. Пусть выполнены условия (A)–(G). Тогда оператор $\mathcal{B}$ непрерывен на множестве $L_\infty^+(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $\gamma^{(1)}(x), \gamma^{(2)}(x) \in L_\infty^+(\Omega)$, а $u^{(1)}(t, x), u^{(2)}(t, x)$ – соответствующие решения прямой задачи (1), (2). Положим $y(t, x) = u^{(1)}(t, x) - u^{(2)}(t, x)$, $\sigma(x) = \gamma^{(1)}(x) - \gamma^{(2)}(x)$, $p(t, x) = y_t(t, x)$. Тогда справедливы соотношения (29), (30), а также (32), (33). Из (29), (30) вытекает оценка

$$|y(t, x)| \leq m_1 (e^{\mu d} - 1) e^{K_{c,1}T/\rho_1} \|\sigma\|_{L_\infty(\Omega)}, \quad (49)$$

где m_1 определена в (7); тогда из (32), (33) получаем оценку

$$\begin{aligned} |p(T, x)| &\leq \left[m_2 \|\sigma\|_{L_\infty(\Omega)} + \right. \\ &+ K_c^* m_1 (e^{\mu d} - 1) e^{K_{c,1}T/\rho_1} \|\sigma\|_{L_\infty(\Omega)} \left. \right] \times \\ &\times (e^{\mu d} - 1) e^{(K_{c,1} + K_{p,1})T/\rho_1}. \end{aligned} \quad (50)$$

В силу определения оператора $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\gamma^{(1)})(x) - \mathcal{B}(\gamma^{(2)})(x) &= \\ &= -\frac{\rho(T, x)}{\varphi(x)} (u_t^{(1)}(T, x) - u_t^{(2)}(T, x)) \equiv \\ &\equiv -\frac{\rho(T, x)}{\varphi(x)} p(T, x), \end{aligned}$$

и непрерывность $\mathcal{B}(\gamma)$ теперь вытекает из неравенства (50).

Теорема 2. Пусть выполнены условия (A) – (G), неравенство (46), а константа K_γ определена в (48). Дополнительно предположим, что при некоторых $\alpha \in (0, 1)$ и $\varepsilon \in (0, T)$ функция $\Psi_t(t, x) \in C^{0,\alpha}(Q(\varepsilon, T))$. Тогда существует обобщенное решение $\{u(t, x), \gamma(x)\}$ обратной задачи (1)–(3), причем для $\gamma(x)$ справедлива оценка

$$0 \leq \gamma(x) \leq K_\gamma, \quad (51)$$

а для $u(t, x)$ справедлива оценка (8).

Доказательство. Как было доказано в предыдущем разделе, функция $u_t(t, x)$ является решением задачи (11), (12) с ограниченными коэффициентами и ограниченной правой частью. Кроме

того, поскольку $\Psi_t(t, x) \in C^{0,\alpha}(Q(\varepsilon, T))$, то, в силу [12, гл. 4], $u_t(T, x) \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Согласно леммам 2 и 3 оператор $\mathcal{B}$ переводит выпуклое замкнутое множество $B_{K_\gamma}^+$ в себя. А в силу компактности вложения пространства $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ в $C(\bar{\Omega})$ и леммы 4 оператор $\mathcal{B}$ является вполне непрерывным. Поэтому, в силу теоремы Шаудера о неподвижной точке (см., например, [15, гл. 5, § 3]), существует решение $\gamma(x)$ уравнения (42), причем, в силу лемм 2 и 3, справедлива оценка (51).

В соответствии с леммой 1 имеем тогда, что обратная задача (1)–(3) имеет решение $\{u(t, x), \gamma(x)\}$, причем для $u(t, x)$ справедлива оценка (8). Теорема доказана.

Приведем другой вариант условий, достаточный для однозначной разрешимости обратной задачи (1)–(3).

Теорема 3. Пусть выполнены условия (A)–(G) и неравенство (46). Предположим, что выполнено еще неравенство

$$\begin{aligned} \frac{\rho_6}{\varphi_1} \left[m_2 + K_c^* m_1 (e^{\mu d} - 1) e^{K_{c,1}T/\rho_1} \right] \times \\ \times (e^{\mu d} - 1) e^{(K_{c,1} + K_{p,1})T/\rho_1} < 1, \end{aligned} \quad (52)$$

где константа m_1 определена в (7), а константа m_2 определена в (25). Тогда в Q существует и единственно обобщенное решение $\{u(t, x), \gamma(x)\}$ обратной задачи (1)–(3), причем для него справедливы оценки (51) и (8).

Доказательство. В силу лемм 2 и 3 оператор $\mathcal{B}$ переводит множество $B_{K_\gamma}^+$ в себя. Покажем, что оператор $\mathcal{B}$ является сжимающим на $B_{K_\gamma}^+$.

Пусть $\gamma^{(1)}(x), \gamma^{(2)}(x) \in L_\infty^+(\Omega)$, а $u^{(1)}(t, x), u^{(2)}(t, x)$ – соответствующие решения прямой задачи (1), (2). Положим $y(t, x) = u^{(1)}(t, x) - u^{(2)}(t, x)$, $\sigma(x) = \gamma^{(1)}(x) - \gamma^{(2)}(x)$, $p(t, x) = y_t(t, x)$. Как и в доказательстве леммы 4 получаем, что для $y(t, x)$ справедлива оценка (49), а для $p(t, x)$ – оценка (50). Но тогда, в силу (50), получаем неравенство

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}(\gamma^{(1)}) - \mathcal{B}(\gamma^{(2)})\|_{L_\infty(\Omega)} &\leq \frac{\rho_6}{\varphi_1} \|p(T, \cdot)\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \\ &\leq \frac{\rho_6}{\varphi_1} \left[m_2 + K_c^* m_1 (e^{\mu d} - 1) e^{K_{c,1}T/\rho_1} \right] \times \\ &\times (e^{\mu d} - 1) e^{(K_{c,1} + K_{p,1})T/\rho_1} \times \|\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}\|_{L_\infty(\Omega)}, \end{aligned}$$

из которого согласно условия (52) вытекает сжимаемость оператора $\mathcal{B}$ на множестве $B_{K_\gamma}^+$.

Следовательно, операторное уравнение (42) имеет единственное решение $\gamma(x)$, лежащее в $B_{K_\gamma}^+$, так что справедлива оценка (51). Тогда из леммы 1 следует, что обратная задача (1)–(3) также имеет решение и притом единственное. Кроме того, справедлива оценка (8). Теорема 3 доказана.

ПРИМЕР

Приведем пример обратной задачи, для которой применимы доказанные в предыдущем разделе теоремы существования и единственности.

Пример. Пусть $\Omega = \{x : |x| \leq l\}$ – n -мерный шар, $Q = [0, T] \times \bar{\Omega}$. Рассмотрим в Q обратную задачу

$$\begin{aligned} & \left(2 + \frac{|x|t}{lT}\right) u_t - \Delta u - \\ & - \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{T} u_{x_i} + \frac{|x|t}{lT^\theta} u + \gamma(x)u = \beta, \end{aligned} \quad (53)$$

$$u(t, x)|_\Gamma = t^\nu, \quad (54)$$

$$u(T, x) = \frac{T^\nu |x|^2}{2l^2} + \frac{T^\nu}{2}. \quad (55)$$

Здесь $\beta = \text{const} \geq 0$, $\theta = \text{const} > 1$, $\nu = \text{const} > 3/2$ либо $\nu = 1$.

В обозначениях задачи (1)–(3) имеем

$$\begin{aligned} \rho(t, x) &= 2 + \frac{|x|t}{lT}, \quad \vec{b}(x) = -\frac{x}{T}, \\ c(t, x) &= \frac{|x|t}{lT^\theta}, \quad f(t, x) = \beta, \quad \Psi(t, x) = t^\nu, \\ \varphi(x) &= \frac{T^\nu |x|^2}{2l^2} + \frac{T^\nu}{2}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что условия (A) – (G) для (53)–(55) выполнены, причем функция $\Psi(t, x)$ удовлетворяет в Q условию Гельдера. При этом константы, входящие в условия (A) – (F), могут быть выбраны следующими:

$$\begin{aligned} \rho_1 = \rho_3 = \rho_4 = \rho_5 = 2, \quad \rho_2 = \rho_6 = 3, \\ K_{\rho,1} = 0, \quad K_{\rho,2} = \frac{1}{T}, \quad b^* = \frac{l}{T}, \quad K_b = \frac{l}{T}, \quad \mu = \frac{l}{T} + 1, \\ K_{c,1} = 0, \quad K_{c,2} = \frac{1}{T^{\theta-1}}, \\ K_c^* = \frac{1}{T^\theta}, \quad f_1 = f_2 = K_f = \beta, \quad K_f^* = 0, \\ M_1 = T^\nu, \quad M_2 = \nu T^{\nu-1}, \end{aligned}$$

$$\Phi_1 = \frac{T^\nu}{2}, \quad \Phi_2 = T^\nu, \quad \Phi_1^* = \frac{nT^\nu}{l^2}, \quad \Phi_2^* = \frac{nT^\nu}{l^2} + T^\nu.$$

Кроме того, $d = 2l$, константа m_1 из (7) равна $m_1 = T^\nu + \beta(e^{2\mu l} - 1)$, константа m_2 из условия (25)

равна $m_2 = \left[M_3 + \frac{T^\nu + \beta(e^{2\mu l} - 1)}{T^\theta} (e^{2\mu l} - 1) \right]$, где

$M_3 = \max\{\beta/2, \nu T^{\nu-1}\}$ константы λ^* и λ_0 из условий (26) и (27) равны, соответственно,

$$\begin{aligned} \lambda^* &= \max \left\{ 0, \frac{l^2}{2T^2} - \frac{1}{4\kappa^2} \right\}, \\ \lambda_0 &= \max \left\{ 0, \frac{1}{2T} + \frac{l^2}{2T^2} - \frac{1}{4\kappa^2} \right\}. \end{aligned}$$

Тогда условие (28) из теоремы 1 запишется в виде

$$\begin{aligned} & \frac{144}{T^{2\nu-1}} e^{\lambda^* T} \kappa^2 \left\{ \left[M_3 + \frac{1}{T^{\theta-\nu}} (e^{2\mu l} - 1) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\beta(e^{2\mu l} - 1)^2}{T^\theta} \right]^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{T^{2\theta}} e^{\lambda_0 T} \left[T^\nu + \beta(e^{2\mu l} - 1) \right]^2 \kappa^2 T \right\} < 1, \end{aligned} \quad (56)$$

условие (46) из леммы 2 (и теоремы 2) запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{nT^\nu}{l^2} + \beta &\geq 3 \left[M_3 + \frac{1}{2T^{\theta-\nu}} (e^{2\mu l} - 1) + \right. \\ & \left. + \frac{\beta(e^{2\mu l} - 1)^2}{2T^\theta} \right] + \frac{1}{T^{\theta-\nu-1}}, \end{aligned} \quad (57)$$

а условие (52) из теоремы 3 – в виде

$$\begin{aligned} & \frac{6}{T^\nu} \left\{ \left[M_3 + \frac{1}{T^{\theta-\nu}} (e^{2\mu l} - 1) + \frac{\beta(e^{2\mu l} - 1)^2}{T^\theta} \right] + \right. \\ & \left. + \left[\frac{1}{T^{\theta-\nu}} (e^{2\mu l} - 1) + \frac{\beta}{T^\theta} (e^{2\mu l} - 1)^2 \right] \right\} \times \\ & \times (e^{2\mu l} - 1) < 1. \end{aligned} \quad (58)$$

Нетрудно проверить, что с учетом выбора θ и ν , а также оценки (6), условия (56)–(58) будут заведомо выполнены либо при достаточно большом T (и фиксированном радиусе l шара Ω , либо, если радиус l шара Ω мал (а T фиксировано). В обоих этих случаях выполнены условия теорем 1, 2 и 3 соответственно.

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ
В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ ПРИ УСЛОВИИ ФИНАЛЬНОГО НАБЛЮДЕНИЯ

Таким образом, если:

- 1) выполнено условие (56), то решение задачи (53)–(55) будет единственным;
- 2) выполнено условие (57), то решение задачи (53)–(55) существует;
- 3) выполнены условия (57) и (58), то решение задачи (53)–(55) существует и единственно.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при поддержке Программы Приоритет-2030 НИЯУ МИФИ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прилепко А.И., Соловьев В.В. О разрешимости обратных краевых задач определения коэффициента перед младшей производной в параболическом уравнении // Дифференциальные уравнения, 1987. Т. 23. № 1. С. 136–143.
2. Isakov V. Inverse parabolic problems with the final overdetermination // Communications Pure and Applied Mathematics. 1991. V. 44. P. 185–209.
3. Прилепко А.И., Тихонов И.В. Принцип позитивности решения в линейной обратной задаче и его применение к коэффициентной задаче теплопроводности // Доклады РАН. 1999. Т. 364. № 1. С. 21–23.
4. Прилепко А.И., Костин А.Б. О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением // Математический сборник. 1992. Т. 183. № 4. С. 49–68.
5. Прилепко А.И., Костин А.Б. Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом

уравнении. I // Сибирский математический журнал. 1992. Т. 33. № 3. С. 146–155.

6. Прилепко А.И., Костин А.Б. Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении. II // Сибирский математический журнал. 1992. Т. 34. № 5. С. 147–162.

7. Костин А.Б. Обратная задача определения коэффициента при u в параболическом уравнении по условию нелокального наблюдения // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51. № 5. С. 596–610.

8. Камынин В.Л. Об однозначной разрешимости обратной задачи для параболических уравнений с условием финального переопределения // Математические заметки. 2003. Т. 79. № 2. С. 217–227.

9. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.

10. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989. 464 с.

11. Arena O. Sopra una classe di equazioni paraboliche // Bolletino Unione Matematica Italiana (4). 1969. V. 2. № 1. P. 9–24.

12. Крылов Н.В. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка. М.: Наука, 1985. 376 с.

13. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968. 428 с.

14. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.

15. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М.: Высшая школа, 1982. 270 с.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2024, vol. 13, no. 5, pp. 329–339

ON INVERSE PROBLEM OF DETERMINING THE ABSORPTION COEFFICIENT
IN THE PARABOLIC EQUATION UNDER THE CONDITION OF FINAL OBSERVATION

V.L. Kamynin

National Research Nuclear University MEPhI, Moscow, 115409, Russia
e-mail: vlkamynin2008@yandex.ru

Received September 18, 2024; revised September 18, 2024; September 24, 2024

We consider the nonlinear inverse problem of determining the $S(x)$ -dependent lower coefficient in a uniformly parabolic equation with many spatial variables. The coefficients of the equation can depend on both the time and spatial variables and are assumed to be bounded, but generally speaking, discontinuous. However (in contrast to the papers of other authors), there are no restrictions on the signs of the lower coefficients of the equation and its right-hand side. As an additional condition, we put the condition of the final (at the final moment of time) observation. The solution of the inverse problem is understood in a generalized sense and is sought in Sobolev classes. We establish two types of sufficient conditions under which a generalized solution of the inverse problem exists and is unique. We also give the example of the inverse problem for which the results proved in the work are valid. It is

noted that the solution of the specified problem exists and is unique either if the time interval on which the problem is considered is sufficiently large (and the domain of spatial variables is fixed) or if the domain of spatial variables is sufficiently small (and the time period is fixed).

Keywords: inverse problems of determining the lower coefficient, parabolic equations, final observation.

REFERENCES

1. *Prilepko A.I., Solov'ev V.V.* O razreshimosti obratnykh kraevykh zadach opredeleniya koeffitsienta pered mladshoi proizvodnoi v parabolicheskom uravnenii [On the solvability of inverse boundary value problems of determining the coefficient before the lowest derivative in a parabolic equation]. *Differentsial'nye uravneniya*. 1987. Vol. 23. No. 1. Pp. 136–143 (in Russian).
2. *Isakov V.* Inverse parabolic problems with the final overdetermination. *Communications Pure and Applied Mathematics*. 1991. Vol. 44. Pp. 185–209.
3. *Prilepko A.I., Tikhonov I.V.* Princip pozitivnosti v lineinoy obratnoy zadache i ego primeneniye k koeffitsientnoy zadache teploprovodnosti [The principle of positivity of the solution in the linear inverse problem and its application to the coefficient problem of heat conduction]. *Doklady RAN*, 1999. Vol. 364. No. 1. Pp. 21–23 (in Russian).
4. *Prilepko A.I., Kostin A.B.* O nekotorykh obratnykh zadachakh dlya parabolicheskikh uravnenii s final'nym i integral'nym nablyudeniem [On some inverse problems for parabolic equations with final and integral observation]. *Matematicheskii sbornik*, 1992. Vol. 183. No. 4. Pp. 49–68 (in Russian).
5. *Prilepko A.I., Kostin A.B.* Ob obratnykh zadachakh opredeleniya koeffitsienta v parabolicheskom uravnenii. I. [On inverse problems of determining the coefficient in a parabolic equation. I]. *Sibirskii matematicheskii zhurnal*, 1992. Vol. 33. No. 3. Pp. 146–155 (in Russian).
6. *Prilepko A.I., Kostin A.B.* Ob obratnykh zadachakh opredeleniya koeffitsienta v parabolicheskom uravnenii. II. [On inverse problems of determining the coefficient in a parabolic equation. II]. *Sibirskii matematicheskii zhurnal*, 1992. Vol. 34. No. 5. Pp. 147–162 (in Russian).
7. *Kostin A.B.* Obratnaya zadacha opredeleniya koeffitsienta pri u v parabolicheskom uravnenii po usloviyu nelokal'nogo nablyudeniya. [Inverse problem of determining the coefficient before in a parabolic equation under the condition of non-local observation]. *Differentsial'nye uravneniya*, 2015. Vol. 51. No. 5. Pp. 596–610 (in Russian).
8. *Kamynin V.L.* Ob odnoznachnoi razreshimosti obratnoi zadachi dlya parabolicheskikh uravnenii s uslovie final'nogo pereopredeleniya. [On the unique solvability of the inverse problem for parabolic equations with the condition of final overdetermination]. *Matematicheskie zametki*, 2003. Vol. 79. No. 2. Pp. 217–227 (in Russian).
9. *Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N.* Lineinye i kvazilineinye uravneniya parabolicheskogo tipa. [Linear and quasilinear parabolic equations of parabolic type]. Moscow, Nauka Publ. 1967. 736 p. (in Russian).
10. *Gilbarg D., Trudinger N.* Ellipticheskie differentsial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi vtorogo porjadka. [Elliptic partial differential equations of second order]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 464 p. (in Russian).
11. *Arena O.* Sopra una classe di equazioni paraboliche. *Bolletino Unione Matematica Italiana* (4), 1969. Vol. 2, No. 1. Pp. 9–24.
12. *Krylov N.V.* Nelineinye ellipticheskie i parabolicheskie uravneniya vtorogo porjadka [Nonlinear second order elliptic and parabolic equations]. Moscow, Nauka Publ., 1985. 376 p. (in Russian).
13. *Friedman A.* Uravneniya s chastnymi proizvodnymi parabolicheskogo tipa. [Partial differential equations of parabolic type]. Moscow Mir Publ., 1968. 428 p. (in Russian).
14. *Ladyzhenskaya O.A.* Matematicheskie voprosy dinamiki vyazkoi neszhimaemoi zhidkosti [Mathematical problems in the dynamics of a viscous incompressible fluid] Moscow, Nauka Publ., 1970. 288 p. (in Russian).
15. *Lyusternik L.A., Sobolev V.I.* Kratkii kurs funktsional'nogo analiza. [Brief course of functional analysis]. Moscow Vysshaya shkola Publ., 1982. 270 p. (in Russian).