ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ», 2024, т. 13, № 5, с. 340–349

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 517.9

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ: ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ, РЕДУКЦИИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

***А.Д. Полянин*[1,*], *Н.А. Кудряшов*[2,**]**
[1]*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия*
[2]*Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия*
[*]*e-mail: polyanin@ipmnet.ru*
[**]*e-mail: nakudr@gmail.com*

Поступила в редакцию: 26.09.2024
После доработки: 27.09.2024
Принята к публикации: 30.09.2024

Рассматриваются уравнения Шредингера с кубическими и более сложными нелинейностями, содержащими искомую функцию с запаздывающим аргументом. Высказаны физические соображения о возможных причинах появления запаздывания в подобных нелинейных уравнениях и моделях. Описаны одномерные редукции, приводящие исследуемые уравнения в частных производных с запаздыванием к более простым обыкновенным дифференциальным уравнениям или обыкновенным дифференциальным уравнениям с запаздыванием. Найдены точные решения нелинейного уравнения Шредингера общего вида с запаздыванием, которые выражаются в квадратурах. Особое внимание уделено трем уравнениям специального вида с кубической нелинейностью, которые допускают простые решения в элементарных функциях, а также более сложные точные решения с обобщенным разделением переменных. Помимо нелинейных уравнений Шредингера с постоянным запаздыванием исследуются также некоторые более сложные уравнения с переменным запаздыванием общего вида. Полученные результаты могут быть полезны для тестирования математических моделей, описываемых нелинейными уравнениями Шредингера с запаздыванием и родственными уравнениями математической физики.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шредингера с запаздыванием, уравнения в частных производных с запаздыванием, точные решения, решения в квадратурах, решения с обобщенным разделением переменных.
DOI: 10.26583/vestnik.2024.5.6
EDN PALOUN

ВВЕДЕНИЕ

Нелинейное уравнение Шредингера. В ряде разделов теоретической физики, включая нелинейную оптику, сверхпроводимость и физику плазмы, используется нелинейное уравнение Шредингера [1–6]:

$$iu_t + ku_{xx} + f(|u|)u = 0, \qquad (1)$$

где $u(x,t)$ – комплекснозначная функция действительных аргументов, квадрат модуля которой соответствует интенсивности света, t – время, x – пространственная переменная, $f(|u|)$ – функция потенциала, k – параметр уравнения, $i^2 = -1$.

Классическое нелинейное уравнение Шредингера с кубической нелинейностью, которая определяется функцией

$$f(|u|) = b|u|^2, \qquad (2)$$

хорошо известно в научной периодике. Оно используется для характеристики огибающей волнового пакета и описывает математические модели при распространении волн по существу во всех разделах физики, где рассматриваются волновые процессы. Однако особенно популярным это уравнение стало после теоретического и экспериментального обоснования применения нелинейного уравнения Шредингера в нелинейной оптике [7–10]. При описании распространения импульсов в оптическом волокне выражение со второй производной отвечает за дисперсию импульса, функция $f(|u|)$ характеризует взаимодействие светового импульса с материалом волокна и определяет нелинейную зависимость коэффициента преломления света в нели-

нейной среде. Для классического нелинейного уравнения Шредингера функция (2) соответствует квадратичной зависимости коэффициента преломления и называется керровской нелинейностью. Уникальность уравнения (1)–(2) объясняется не только тем, что оно является базовым уравнением для описания процессов передачи информации в оптической среде, но и тем, что относится к классу интегрируемых уравнений в частных производных. Уравнение имеет бесконечное число законов сохранения, преобразования Бэклунда и проходит тест Пенлеве. Задача Коши для уравнения (1)–(2) с начальным условием общего вида решается методом обратной задачи рассеяния [4, 5].

Отметим, что точные решения нелинейного уравнения Шредингера (1) для произвольной функции приведены в [11, 12].

Родственные и более сложные уравнения типа Шредингера, которые встречаются в литературе, можно найти, например, в [11, 13–24].

Дифференциальные уравнения с запаздыванием. Для математического моделирования многих явлений и процессов, проявляющих свойства наследственности (или последействия), когда скорость изменения искомой величины зависит не только от ее текущего значения, но и от некоторого значения (или нескольких значений) в прошлом, используются дифференциальные уравнения с запаздыванием. В биологии и биомеханике запаздывание связано с ограниченной скоростью передачи нервных и мышечных реакций в живых тканях. В медицине – в задачах о распространении инфекционных заболеваний – время запаздывания определяется инкубационным периодом (промежуток времени от момента заражения до появления первых признаков заболевания). В динамике популяций запаздывание связано с тем, что особи участвуют в размножении не сразу, а только после достижения репродуктивного возраста. В теории управления запаздывание возникает из-за ограниченных скоростей распространения сигнала и ограниченных скоростей технологических процессов. Наиболее распространенные уравнения в частных производных с запаздыванием, методы их решения и некоторые приложения описаны, например, в книгах [25, 26].

Для формулировки простейших задач с последействием используются обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ), зависящие от времени t, которые, помимо искомой функции $u(t)$, содержат также функцию $\overline{u} = u(t-\tau)$, где $\tau > 0$ – постоянное время запаздывания. Для описания родственных, более сложных, пространственно неоднородных задач с запаздыванием чаще всего используются уравнения с частными производными реакционно-диффузионного типа [25, 26]:

$$u_t = ku_{xx} + F(u, \overline{u}), \quad \overline{u} = u(x, t-\tau), \qquad (3)$$

где $k > 0$ – коэффициент переноса (диффузии); x – пространственная переменная; $F(u, \overline{u})$ – кинетическая функция, а $\tau > 0$ – постоянное время запаздывания. Уравнение с запаздыванием (3) является естественным обобщением обычного нелинейного реакционно-диффузионного уравнения без запаздыванием с функцией $F(u, \overline{u}) = f(u)$. Специальный частный случай уравнения (3) при $F(u, \overline{u}) = f(\overline{u})$ допускает простую физическую интерпретацию: перенос вещества в локально-неравновесной среде проявляет инерционные свойства, т.е. система реагирует на воздействие не мгновенно, как в классическом локально-равновесном случае, а на время запаздывания τ позже.

Отметим, что в литературе встречаются также более сложные функционально-дифференциальные уравнения с пропорциональным запаздыванием $\tau = qt$ $(0 < q < 1)$ и переменным запаздыванием более сложного вида $\tau = \tau(t)$ или $\tau = \tau(x)$ (см., например, [26–28]).

Много точных решений реакционно-диффузионных уравнений с постоянным запаздыванием вида (3) и родственных нелинейных уравнений параболического типа с запаздыванием можно найти в [12, 26, 29–32]. В [12, 26–28] описаны некоторые точные решения более сложных реакционно-диффузионных уравнений с переменным запаздыванием различного типа. Точные решения нелинейных волновых уравнений с постоянным и переменным запаздыванием, которые формально получаются из (3) заменой первой производной по времени u_t на вторую производную u_{tt}, приведены в [12, 26, 33, 34].

Похожие аргументы можно высказать и для многочисленных математических моделей, описываемых обобщенными нелинейными уравнениями Шредингера, несмотря на то, что процессы в нелинейной оптике непосредственно связаны с передачей оптических солитонов различного типа. Известно, что квадрат модуля оптического солитона характеризует интенсивность светового импульса. Хотя скорость рас-

пространения электромагнитной волны по оптическому волокну имеет огромную скорость, реакция материала оптического волокна обладает некоторой инерцией, которая может приводить к запаздыванию. Такая инерция особенно проявляется при распространения ультракоротких оптических солитонов для фемтосекундных импульсов меньших 1 пс. В этом случае приходится учитывать как производные старших порядков, отвечающие за дисперсию высокого порядка, так и вынужденное комбинационное рассеяние, экспериментально подтвержденное в 1985 г.

Как отмечено в [1], учет вынужденного комбинационного рассеяния при описании ультракоротких импульсов в оптическом волокне, привел к открытию нового явления, получившего название «самосдвига частоты» солитона, которое непосредственно связано с инерцией рассеяния и было объяснено его возникновением. Установлено, что это явление порождает непрерывный сдвиг несущей частоты оптического солитона, при котором его спектр становится столь широким, что высокочастотные компоненты начинают передавать свою энергию низкочастотным компонентам. Как показано в [1], данный процесс продолжается при передаче информации по световоду, возрастает линейно с течением времени и может стать достаточно значительным для ультракоротких импульсов.

Сказанное выше приводит к целесообразности учета запаздывания в выражениях для потенциала при различных обобщениях и дальнейших модификациях нелинейных уравнений Шредингера.

Точные решения (терминология). В данной статье под «точными решениями нелинейных уравнений в частных производных с постоянным или переменным запаздыванием» понимаются решения [26], которые выражаются:

a) через элементарные функции;

b) в квадратурах, т.е. через элементарные функции, функции, входящие в уравнение (это необходимо, если уравнение содержит произвольные или специальные функции) и неопределенные интегралы;

c) через решения обыкновенных дифференциальных уравнений или систем таких уравнений;

d) через решения обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием (постоянным или переменным) или систем таких уравнений.

Допускаются также различные комбинации решений, описанных в пп. *a*) – *d*). В случаях *a*) и *b*) точные решение могут быть представлены в явной, неявной или параметрической форме.

Важно отметить, что наличие запаздывания в уравнениях математической физики существенно усложняет анализ таких уравнений и соответствующих начально-краевых задач [25, 26]. В частности, уравнения с частными производными при постоянном запаздывании не допускают автомодельных решений [26], которые часто имеют родственные более простые уравнения без запаздывания.

НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ. СПЕЦИАЛЬНЫЕ СЛУЧАИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Одномерное нелинейное уравнение Шредингера с запаздыванием. Будем рассматривать одномерное нелинейное уравнение Шредингера весьма общего вида с запаздыванием

$$\begin{gathered} iu_t + ku_{xx} + F(|u|, |\overline{u}|)u = 0, \\ \overline{u} = u(x, t-\tau), \end{gathered} \tag{4}$$

где $u = u(x, t)$ – искомая комплекснозначная функция действительных аргументов, $k > 0$ – свободный параметр, $i^2 = -1$, $F(z_1, z_2)$ – заданная действительная функция двух аргументов; $\tau > 0$ – время запаздывания, которое считается постоянным. Нелинейное уравнение Шредингера с запаздыванием (4) является естественным обобщением обычного нелинейного уравнения Шредингера без запаздывания (1), которое соответствует функции $F(|u|, |\overline{u}|) = f(|u|)$.

Отметим три специальные функции

$$\begin{gathered} F(|u|, |\overline{u}|) = b|\overline{u}|^2, \quad F(|u|, |\overline{u}|) = b|u||\overline{u}|, \\ F(|u|, |\overline{u}|) = b_1|u|^2 + b_2|\overline{u}|^2, \end{gathered} \tag{5}$$

определяющие потенциалы уравнений вида (4) с кубической нелинейностью, которые при отсутствии запаздывания (т.е. при $\tau = 0$) приводят к классическому нелинейному уравнению Шредингера (1)–(2).

Замечание 1. В работе [35] изучались свойства решений начально-краевых задач для пространственного обобщения уравнения (4) с потенциалом

$$F(|u|, |\overline{u}|) = -|u|^p - f(|\overline{u}|)\,u, \quad p \geq 0.$$

Преобразования нелинейного уравнения Шредингера с запаздыванием

1°. Преобразование

$$x = C_1 X + C_2, \quad t = C_3 T + C_4, \qquad u = U(X, T)\exp\left[i\left(C_5 T + C_6\right)\right], \tag{6}$$

где $C_1,\ldots, C_6$ – произвольные действительные постоянные (C_1 , $C_3 \neq 0$), приводит уравнение (4) к уравнению аналогичного вида:

$$iU_T + kC_3 C_1^{-2} U_{XX} + \left[C_3 F(|U|, |\bar{U}|) - C_5\right]U = 0, \qquad \bar{U} = U(X, T - \tau_*), \quad \tau_* = \tau / C_3. \tag{7}$$

2°. Представим искомую функцию в показательной форме

$$u = re^{i\varphi}, \quad r = |u|, \tag{8}$$

где $r = r(x, t) \geq 0$ и $\varphi = \varphi(x, t)$ – действительные функции.

Дифференцируя (8), находим производные:

$$u_t = (r_t + ir\varphi_t)e^{i\varphi}, \qquad u_x = (r_x + ir\varphi_x)e^{i\varphi}, \qquad u_{xx} = \left[r_{xx} - r\varphi_x^2 + i(2r_x\varphi_x + r\varphi_{xx})\right]e^{i\varphi}. \tag{9}$$

Подставим (9) в (4) и сократим все члены на $e^{i\varphi}$. Приравняв далее к нулю действительную и мнимую части полученного соотношения, приходим к следующей системе двух действительных уравнений в частных производных с запаздыванием:

$$-r\varphi_t + kr_{xx} - kr\varphi_x^2 + F(r, \bar{r})r = 0, \qquad r_t + 2kr_x\varphi_x + kr\varphi_{xx} = 0, \quad \bar{r} = r(x, t - \tau). \tag{10}$$

Система (10) вместе с выражением (8) будут использованы далее для построения точных решений нелинейного уравнения Шредингера с запаздыванием (4).

Точные решения в случае потенциала общего вида с запаздыванием. Ниже описаны точные решения нелинейного уравнения Шредингера с запаздыванием (4) в случае произвольного потенциала, который задается функцией двух переменных $F(|u|, |\bar{u}|)$. Для построения решений используются методы обобщенного разделения переменных (см., например, [11, 26, 36]).

1°. Система (10) имеет простое точное решение:

$$r = C_1, \quad \varphi = C_2 x + C_3 + Bt, \qquad B = F(C_1, C_1) - kC_2^2, \tag{11}$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные действительные постоянные. Подставив (11) в (8), получим решение типа бегущей волны рассматриваемого нелинейного уравнения (4):

$$u = C_1 e^{i(C_2 x + C_3 + Bt)}, \quad B = F(C_1, C_1) - kC_2^2,$$

которое не зависит от времени запаздывания τ.

2°. Система (10) допускает более сложное нестационарное, не зависящее от времени запаздывания τ точное решение вида

$$r = r(x), \quad \varphi = C_1 t + \theta(x), \tag{12}$$

где C_1 – произвольная постоянная, а функции $r = r(x)$ и $\theta = \theta(x)$ описываются системой ОДУ

$$kr_{xx}'' - kr(\theta_x')^2 - C_1 r + F(r, r)r = 0, \qquad 2r_x'\theta_x' + r\theta_{xx}'' = 0. \tag{13}$$

Интегрируя дважды второе уравнение (13), последовательно находим

$$\theta_x' = C_2 r^{-2}, \quad \theta = C_2 \int r^{-2}\,dx + C_3, \tag{14}$$

где C_2, C_3 – произвольные постоянные. Подставив (14) в первое уравнение (13), получим нелинейное ОДУ второго порядка автономного вида

$$kr_{xx}'' - kC_2^2 r^{-3} - C_1 r + F(r, r)r = 0, \tag{15}$$

общее решение которого можно представить в неявной форме

$$\int\left[\frac{C_1}{k}r^2 - C_2^2 r^{-2} - \frac{2}{k}\int rF(r, r)\,dr + C_4\right]^{-1/2} dr = C_5 \pm x, \tag{16}$$

где C_4, C_5 – произвольные постоянные. Таким образом показано, что система (10) допускает точное решение (12), которое можно выразить в квадратурах.

Отметим, что для уравнений Шредингера с кубическими потенциалами, которые определяются функциями (5), левую часть решения (16) можно выразить через эллиптические интегралы.

Замечание 2. Более сложное нелинейное уравнение Шредингера (4) с переменным запаз-

дыванием, в котором $\tau = \tau(x, t) > 0$ – произвольная непрерывная функция, также допускает решение вида (8), (12), где функция $r = r(x)$ описывается ОДУ (15), а функция $\theta = \theta(x)$ находится с помощью второго соотношения (14). Отметим, что точные решения нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с переменным запаздыванием разного типа рассматривались в работах [12, 26–28].

3°. Покажем, что система (10) допускает точное решение с обобщенным разделением переменных вида

$$r = r(t), \quad \varphi = a(t)x^2 + b(t)x + c(t). \qquad (17)$$

Для этого подставим (17) в (10). В результате первое уравнение системы приводится к квадратному уравнению относительно x, коэффициенты которого зависят от времени. Приравнивая нулю функциональные коэффициенты этого квадратного уравнения и добавляя второе уравнение системы, которое в данном случае зависит только от t, получим следующую систему ОДУ:

$$\begin{gathered} a_t' = -4ka^2, \quad b_t' = -4kab, \\ c_t' = -kb^2 + F(r, \bar{r}), \quad r_t' = -2kar. \end{gathered} \qquad (18)$$

Здесь первые три уравнения были сокращены на r и введено обозначение $\bar{r} = r(t-\tau)$.

Сначала проинтегрируем первое уравнение системы (18), затем второе и четвертое, а в конце – третье. В итоге имеем

$$\begin{gathered} r = \frac{C_3}{\sqrt{t+C_1}}, \quad a = \frac{1}{4k(t+C_1)}, \\ b = \frac{C_2}{2k(t+C_1)}, \\ c = \frac{C_2^2}{4k(t+C_1)} + \int F\left(\frac{C_3}{\sqrt{t+C_1}}, \frac{C_3}{\sqrt{t-\tau+C_1}}\right) dt + C_4, \end{gathered} \qquad (19)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4,– произвольные постоянные. Подставив выражения (19) в (17), получим

$$\begin{gathered} r = \frac{C_3}{\sqrt{t+C_1}}, \quad \varphi = \frac{(x+C_2)^2}{4k(t+C_1)} + \\ + \int F\left(\frac{C_3}{\sqrt{t+C_1}}, \frac{C_3}{\sqrt{t-\tau+C_1}}\right) dt + C_4. \end{gathered} \qquad (20)$$

Отметим, что для уравнений Шредингера с кубическими потенциалами, которые определяются функциями (5), интеграл в правой части второго выражения (20) выражается через элементарные функции. В частности, для первой функции (5) решения (20) принимают вид

$$r = \frac{C_3}{\sqrt{t+C_1}},$$

$$\varphi = \frac{(x+C_2)^2}{4k(t+C_1)} + bC_3^2 \ln(t-\tau+C_1) + C_4.$$

Замечание 3. Более сложное нелинейное уравнение Шредингера (4) с переменным запаздыванием, где $\tau = \tau(t) > 0$ – произвольная непрерывная функция, также допускает решение вида (8), (12), в котором функции $r = r(t)$ и $\theta = \theta(x, t)$ находятся с помощью формул (20) при $\tau = \tau(t)$.

4°. Система (10) допускает точное решение вида

$$r = r(z), \ \varphi = C_1 t + C_2 x + \theta(z), \ z = x + \lambda t, \qquad (21)$$

где C_1, C_2, λ – произвольные постоянные, которое обобщает решение (12). Частному случаю $C_1 = C_2 = 0$ в (21) соответствует решение типа бегущей волны.

Подставив (21) в (10), получим смешанную нелинейную систему, состоящую из ОДУ с запаздыванием и ОДУ без запаздывания:

$$\begin{gathered} -r(C_1 + \lambda\theta_z') + kr_{zz}'' - kr(C_2 + \theta_z')^2 + F(r, \bar{r})r = 0, \\ \lambda r_z' + 2kr_z'(C_2 + \theta_z') + kr\theta_{zz}'' = 0, \\ \bar{r} = r(z - \lambda\tau), \end{gathered} \qquad (22)$$

Специальный случай. В частном случае $\theta(z) = C_3$, $\lambda = -2kC_2$ при $C_2 < 0$ система (22) сводится к одному ОДУ второго порядка с постоянным запаздыванием:

$$\begin{gathered} kr_{zz}'' - (C_1 + C_2^2 k)r + F(r, \bar{r})r = 0, \\ \bar{r} = r(z - \tau_1), \ \ \tau_1 = -2kC_2\tau. \end{gathered} \qquad (23)$$

Для нелинейного уравнения Шредингера с запаздыванием (4) и потенциалом специального вида

$$F(|u|, |\bar{u}|) = f(|u|^2 + |\bar{u}|^2),$$

где $f(z)$ – произвольная функция, в соответствующем ОДУ с запаздыванием (23) следует положить $F(r, \bar{r}) = f(r^2 + \bar{r}^2)$. В этом случае уравнение (23) допускает точные периодические решения:

$$r(z) = \beta_n \left|\sin(\sigma_n z + C_4)\right|, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \qquad (24)$$

Здесь C_4 – произвольная постоянная, параметры β_n находятся из алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$f(\beta_n^2) = k\sigma_n^2 + C_1 + C_2^2 k,$$

а константы σ_n определяются по формулам

$$\sigma_n = \frac{\pi}{2\tau_1}(1+2n) = \frac{\pi}{2\lambda\tau}(1+2n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{25}$$

В частности, уравнение Шредингера с запаздыванием (4) и кубической нелинейностью, которая задается потенциалом

$$F(|u|, |\overline{u}|) = b(|u|^2 + |\overline{u}|^2), \quad b = \text{const},$$

имеет точные решения вида (21), где $\theta(z) = C_3$, $\lambda = -2kC_2$ (при $C_2 < 0$), функция $r(z)$ приведена в (24), а константы β_n и σ_n находятся по формулам

$$\beta_n = \sqrt{\frac{k\sigma_n^2 + C_1 + C_2^2 k}{b}},$$

$$\sigma_n = \frac{\pi}{2\tau_1}(1+2n) = \frac{\pi}{2\lambda\tau}(1+2n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Решения с обобщенным разделением переменных уравнений Шредингера с кубической нелинейностью. Нелинейные уравнения Шредингера с постоянным запаздыванием (4) и кубическими нелинейностями, которые определяются зависимостями (5), допускают точные решения с обобщенным разделением переменных вида

$$u(x,t) = (ax+c)\exp\left[i(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\right], \tag{26}$$

где пять определяющих функций – $a = a(t)$, $c = c(t)$, $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$, $\gamma = \gamma(t)$ – описываются смешанными системами уравнений, содержащими ОДУ без запаздывания и ОДУ с запаздыванием.

В переменных (8) решение (26) сводится к системе (10), в которой следует положить

$$r = ax + c, \quad \varphi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma. \tag{27}$$

Подставим функции (27) в (10). Используя зависимости (5) и разделяя переменные в полученных уравнениях, приходим к системам для определяющих функций. Эти системы для всех трех зависимостей (5) приведены ниже.

1°. При $F(|u|, |\overline{u}|) = b|\overline{u}|^2$ система для определяющих функций записывается так:

$$a_t' = -6ka\alpha, \quad c_t' = -2ka\beta - 2kc\alpha,$$
$$\alpha_t' = -4k\alpha^2 + b\overline{a}^2, \quad \beta_t' = -4k\alpha\beta + 2b\overline{ac}, \quad \gamma_t' = -k\beta^2 + b\overline{c}^2, \tag{28}$$

где $\overline{a} = a(t-\tau)$, $\overline{c} = c(t-\tau)$.

2°. При $F(|u|, |\overline{u}|) = bu|\overline{u}|$ система для определяющих функций имеет вид

$$a_t' = -6ka\alpha, \quad c_t' = -2ka\beta - 2kc\alpha,$$
$$\alpha_t' = -4k\alpha^2 + ba\overline{a}, \quad \beta_t' = -4k\alpha\beta + b(a\overline{c} + \overline{a}c), \quad \gamma_t' = -k\beta^2 + bc\overline{c}. \tag{29}$$

3°. При $F(|u|, |\overline{u}|) = b_1|u|^2 + b_2|\overline{u}|^2$ система для определяющих функций записывается так:

$$a_t' = -6ka\alpha, \quad c_t' = -2ka\beta - 2kc\alpha,$$
$$\alpha_t' = -4k\alpha^2 + b_1 a^2 + b_2\overline{a}^2,$$
$$\beta_t' = -4k\alpha\beta + 2b_1 ac + 2b_2\overline{ac}, \tag{30}$$
$$\gamma_t' = -k\beta^2 + b_1 c^2 + b_2\overline{c}^2.$$

Смешанные системы (28)–(30), состоящие из обыкновенных дифференциальных уравнений и обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием, существенно проще рассматриваемых нелинейных уравнений Шредингера с запаздыванием (4)–(5). Эти системы могут быть, например, проинтегрированы численными методами, описанными в [26].

Отметим, что описанные в данном разделе решения нелинейных уравнений Шредингера с запаздыванием (4) и кубическими нелинейностями, которые определяются зависимостями (5), обобщаются на случай переменного запаздывания общего вида (в этих уравнениях и решениях $\tau = \text{const}$ надо просто заменить на $\tau = \tau(t)$).

Замечание 4. В [37] исследовалось линейное уравнение Шредингера специального вида, в котором постоянное запаздывание входило в пространственные производные.

Замечание 5. В [25,38–40] рассматривались нелинейные уравнения Шредингера с распределенным запаздыванием, содержащие интегральные слагаемые.

КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Исследуются нелинейные уравнения Шредингера, потенциал которых зависит от искомой функции с запаздывающим аргументом. Описа-

ны одномерные редукции, приводящие рассматриваемые уравнения к обыкновенным дифференциальным уравнениям или обыкновенным дифференциальным уравнениям с запаздыванием. Найдены точные решения нелинейных уравнений Шредингера с запаздываем, которые выражаются в квадратурах или элементарных функциях. Полученные результаты могут использоваться в качестве тестовых задач для численных методов интегрирования уравнений математической физики с запаздыванием.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена по темам государственного задания (№№ госрегистрации 124012500440-9 и FSWU-2023-0031).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агравал Г.* Нелинейная волоконная оптика. М: Мир, 1996.

2. *Кившарь Ю.С., Агравал Г.* Оптические солитоны. От волоконных световодов к фотонным кристаллам. М: Физматлит, 2005.

3. *Kodama Y., Hasegawa A.* Nonlinear pulse propagation in a monomode dielectric guide // IEEE Journal of Quantum Electronics, 1987. V. 23. № 5. P. 510–524.

4. *Drazin P.G., Johnson R.S.* Solitons: An Introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

5. *Ablowitz M.J., Clarkson P.A.* Solitons Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

6. *Kivshar Yu.S., Malomed B.A.* Dynamics of solitons in nearly integrable systems // Rev. Mod. Phys., 1989. V. 63. P. 763–915.

7. *Ахманов С.А., Сухоруков А.П., Хохлов Р.В.* Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде // Успехи физических наук, 1967. Т. 93. № 1. С. 19–70.

8. *Hasegawa A., Tappert F.* Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion // Applied Physics Letters, 1973. V. 23. № 3. P. 142–144.

9. *Hasegawa A., Tappert F.* Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. II. Normal dispersion // Applied Physics Letters, 1973. V. 23. № 4. P. 171–172.

10. *Tai K., Hasegawa A., Tomita A.* Observation of modulational instability in optical fibers // Physical Review Letters, 1986. V. 56. № 2. P. 135–138.

11. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.

12. *Polyanin A.D.* Handbook of Exact Solutions to Mathematical Equations. Boca Raton: CRC Press – Chapman & Hall, 2025.

13. *Kudryashov N.A.* A generalized model for description of propagation pulses in optical fiber // Optik, 2019. V. 189. № 42, 52.

14. *Kudryashov N.A.* Solitary and periodic waves of the hierarchy for propagation pulse in optical fiber // Optik, 2019. V. 194. 163060.

15. *Kudryashov N.A.* Mathematical model of propagation pulse in optical fibe with power nonlinearities // Optik, 2020. V. 212. 164750.

16. *Kudryashov N.A.* Solitary waves of the non-local Schrödinger equation with arbitrary refractive index // Optik, 2021. V. 231. 166443.

17. *Kudryashov N.A.* Stationary solitons of the generalized nonlinear Schrödinger equation with nonlinear dispersion and arbitrary refractive insex // Applied Mathematics Letters, 2022, V. 128. 107888.

18. *Kudryashov N.A.* Almost general solution of the reduced higher-order nonlinear Schrodinger equation // Optik, 2021. V. 230. 66347.

19. *Yildirim Y.* Optical solitons to Schrödinger-Hirota equation in DWDM system with modified simple equation integration architecture // Optik, 2019. V. 182. P. 694–701.

20. *Zayed E.M.E., Shohib R.M.A., Biswas A., Ekici M., Alshomrani A.S., Khan S., Zhou Q., Belic M.R.* Dispersive solitons in optical fibers and DWDM networks with Schrödinger–Hirota equation // Optik, 2019. V. 199. 163214.

21. *Zayed E.M.E. , Shohib R.M.A., Alngar M.E.M., Biswas A., Moraru L., Khan S., Yildirim Y., Alshehri H.M., Belic M.R.* Dispersive optical solitons with Schrödinger-Hirota model having multiplicative white noise via Ito Calculus // Physics Letters, Sect. A: General, Atomic and Solid State Physics, 2022. V. 445. 128268.

22. *Wang G., Kara A.H., Biswas A., Guggilla P., Alzahrani A.K., Belic M.R.* Highly dispersive optical solitons in polarization-preserving fibers with Kerr law nonlinearity by Lie symmetry // Physics Letters, Sect. A: General, Atomic and Solid State Physics, 2022. V. 421. 127768.

23. *Biswas A., Hubert M.B., Justin M., Betchewe G., Doka S.Y., Crepin K.T.,Ekici M., Zhou Q., Moshokoa S.P., Belic M.* Chirped dispersive bright and singular optical solitons with Schrödinger-Hirota equation // Optik, 2018. V. 168. P. 192–195.

24. *Zhou Q., Xu M., Sun Y., Zhong Y., Mirzazadeh M.* Generation and transformation of dark solitons, anti-dark solitons and dark double-hump solitons // Nonlinear Dynamics, 2022. V. 110. № 2. P. 1747–1752.

25. *Wu J.* Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1996.

26. *Polyanin A.D., Sorokin V.G., Zhurov A.I.* Delay Ordinary and Partial Differential Equations. CRC Press: Boca Raton–London, 2024.

27. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Nonlinear pantograph-type diffusion PDEs: Exact solutions and the principle of analogy // Mathematics, 2021. V. 9. № 5. 511.

28. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Exact solutions of reaction-diffusion PDEs with anisotropic time delay // Mathematics, 2023. V. 11. № 14. 3111.

29. *Meleshko S.V., Moyo S.* On the complete group classification of the reaction diffusion equation with a delay // J. Math. Anal. Appl., 2008. V. 338. P. 448–466.

30. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2014. V. 19. № 3. P. 417–430.

31. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* New generalized and functional separable solutions to nonlinear delay reaction-diffusion equations // Int. J. Non-Linear Mech., 2014. V. 59. P. 16–22.

32. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Construction of exact solutions to nonlinear PDEs with delay using solutions of simpler PDEs without delay // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2021. V. 95. 105634.

33. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Generalized and functional separable solutions to nonlinear delay Klein–Gordon equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2014. V. 19. № 8. P. 2676–2689.

34. *Long F.-S., Meleshko S.V.* On the complete group classification of the one dimensional nonlinear Klein–Gordon equation with a delay // Math. Methods Appl. Sciences, 2016. V. 39. № 12. P. 3255–3270.

35. *Sakbaev V.Z., Shiryaeva A.D.* Nonlinear Schrödinger equation with delay and its regularization // Lobachevskii J. Mathematics, 2023. V. 44. № 3. P. 936–949.

36. *Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R.* Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2007.

37. *Agirseven D.* On the stability of the Schrödinger equation with time delay // Filomat, 2018. Vol. 32. № 3. P. 759–766.

38. *Hale J.K., Lunel S.M.V.* Introduction to Functional Differential Equations. New York: Springer, 1993.

39. *Zhao Z., Ge W.* Traveling wave solutions for Schrödinger equation with distributed delay // Applied Mathematical Modelling, 2011. V. 35. P. 675–687.

40. *Chen C.-F., Luo B.* The freeze of intrapulse Raman scattering effect of ultrashort solitons in optical fiber // Optik, 2007. V. 118. № 1. P. 1–4.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2024, vol. 13, no. 5, pp. 340–349

NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATIONS WITH DELAY: EXACT SOLUTIONS, REDUCTIONS, AND TRANSFORMATIONS

***A.D. Polyanin*[1], *N.A. Kudryashov*[2]**
[1] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526, Russia*
[2] *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409, Russia*
[*] *e-mail: polyanin@ipmnet.ru*
[**] *e-mail: nakudr@gmail.com*

Received September 26, 2024; revised September 27, 2024; accepted September 30, 2024

Schrödinger equations with cubic and more complex nonlinearities containing the desired function with a delayed argument are considered. The physical considerations that can lead to the appearance of a delay in such nonlinear equations and models are expressed. One-dimensional reductions are described that lead the studied partial differential equations with delay to simpler ordinary differential equations or ordinary differential equations with delay. Exact solutions of the nonlinear Schrödinger equation of general form with delay, which are expressed in quadratures, are found. Special attention is paid to three equations with cubic nonlinearity, which allow simple solutions in elementary functions, as well as more complex exact solutions with generalized separation of variables. In addition to nonlinear Schrödinger equations with constant delay, some more complex equations with variable delay of general form are also studied. The results obtained can be useful for testing mathematical models described by the nonlinear Schrödinger equation with delay.

Keywords: nonlinear Schrödinger equation with delay, partial differential equations with delay, exact solutions, solutions in quadratures, generalized separable solutions.

REFERENCES

1. *Agrawal G.P.* Nonlinear Fiber Optics, 4th ed. New York: Academic Press, 2007.

2. *Kivshar Yu.S., Agrawal G.P.* Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals. San Diego: Academic Press, 2003.

3. *Kodama Y., Hasegawa A.* Nonlinear pulse propagation in a monomode dielectric guide. IEEE Journal of Quantum Electronics, 1987. Vol. 23. No.5. Pp. 510-524.

4. *Drazin P.G., Johnson R.S.* Solitons: An Introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

5. *Ablowitz M.J., Clarkson P.A.* Solitons Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

6. *Kivshar Yu.S., Malomed B.A.* Dynamics of solitons in nearly integrable systems. Rev. Mod. Phys., 1989. Vol. 63. Pp. 763–915.

7. *Akhmanov S.A., Sukhorukov A.P., Khokhlov R.V.* Self-focusing and diffraction of light in a nonliner medium. Soviet Physics Uspekhi, 1968. Vol. 10. No. 5. Pp. 609–636.

8. *Hasegawa A., Tappert F.* Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion. Applied Physics Letters, 1973. Vol. 23. No. 3. Pp. 142–144.

9. *Hasegawa A., Tappert F.* Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. II. Normal dispersion. Applied Physics Letters, 1973. Vol. 23. No. 4. Pp. 171–172.

10. *Tai K., Hasegawa A., Tomita A.* Observation of modulational instability in optical fibers. Physical Review Letters, 1986. Vol. 56. No. 2. Pp. 135–138.

11. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differentia Equations, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.

12. *Polyanin A.D.* Handbook of Exact Solutions to Mathematical Equations. Boca Raton: CRC Press–Chapman & Hall, 2025.

13. *Kudryashov N.A.* A generalized model for description of propagation pulses in optical fiber. Optik, 2019. Vol. 189. No. 42, 52.

14. *Kudryashov N.A.* Solitary and periodic waves of the hierarchy for propagation pulse in optical fiber. Optik, 2019. Vol. 194. 163060.

15. *Kudryashov N.A*. Mathematical model of propagation pulse in optical fiber with power nonlinearities. Optik, 2020. Vol. 212. 164750.

16. *Kudryashov N.A.* Solitary waves of the non-local Schrödinger equation with arbitrary refractive index. Optik, 2021. Vol. 231. 166443.

17. *Kudryashov N.A.* Stationary solitons of the generalized nonlinear Schrödinger equation with nonlinear dispersion and arbitrary refractive insex. Applied Mathematics Letters, 2022, Vol. 128. 107888.

18. *Kudryashov N.A.* Almost general solution of the reduced higher-order nonlinear Schrödinger equation. Optik, 2021. Vol. 230. 66347.

19. *Yildirim Y.* Optical solitons to Schrödinger-Hirota equation in DWDM system with modified simple equation integration architecture. Optik, 2019. Vol. 182. Pp. 694–701.

20. *Zayed E.M.E., Shohib R.M.A., Biswas A., Ekici M., Alshomrani A.S., Khan S., Zhou Q., Belic M.R.* Dispersive solitons in optical fibers and DWDM networks with Schrödinger–Hirota equation. Optik, 2019. Vol. 199. 163214.

21. *Zayed E.M.E., Shohib R.M.A., Alngar M.E.M., Biswas A., Moraru L., Khan S., Yildirim Y., Alshehri H.M., Belic M.R.* Dispersive optical solitons with Schrödinger-Hirota model having multiplicative white noise via Ito Calculus, Physics Letters, Sect. A: General, Atomic and Solid State Physics, 2022. Vol. 445. 128268.

22. *Wang G., Kara A.H., Biswas A., Guggilla P., Alzahrani A.K., Belic M.R.* Highly dispersive optical solitons in polarization-preserving fibers with Kerr law nonlinearity by Lie symmetry. Physics Letters, Sect. A: General, Atomic and Solid State Physics, 2022. Vol. 421. 127768.

23. *Biswas A., Hubert M.B., Justin M., Betchewe G., Doka S.Y., Crepin K.T.,Ekici M., Zhou Q., Moshokoa S.P., Belic M.* Chirped dispersive bright and singular optical solitons with Schrödinger-Hirota equation. Optik, 2018. Vol. 168. Pp. 192–195.

24. *Zhou Q., Xu M., Sun Y., Zhong Y., Mirzazadeh M.* Generation and transformation of dark solitons, anti-dark solitons and dark double-hump solitons. Nonlinear Dynamics, 2022. Vol. 110. No. 2. Pp. 1747–1752.

25. *Wu J.* Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1996.

26. *Polyanin A.D., Sorokin V.G., Zhurov A.I.* Delay Ordinary and Partial Differential Equations. CRC Press: Boca Raton–London, 2024.

27. *Polyanin A.D., Sorokin V.G*. Nonlinear pantograph-type diffusion PDEs: Exact solutions and the principle of analogy. Mathematics, 2021. Vol. 9. No 5. 511.

28. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Exact solutions of reaction-diffusion PDEs with anisotropic time delay. Mathematics, 2023. Vol. 11. No. 14. 3111.

29. *Meleshko S.V., Moyo S.* On the complete group classification of the reaction diffusion equation with a delay. J. Math. Anal. Appl., 2008. Vol. 338. Pp. 448–466.

30. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2014. Vol. 19. No. 3. Pp. 417–430.

31. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* New generalized and functional separable solutions to nonlinear delay reaction-diffusion equations. Int. J. Non-Linear Mech., 2014. Vol. 59. Pp. 16–22.

32. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Construction of exact solutions to nonlinear PDEs with delay using solutions of simpler PDEs without delay. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2021. Vol. 95, 105634.

33. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Generalized and functional separable solutions to nonlinear delay Klein–Gordon equations. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2014. Vol. 19. No. 8. Pp. 2676–2689.

34. *Long F.-S., Meleshko S.V.* On the complete group classification of the one dimensional nonlinear Klein–Gordon equation with a delay. Math. Methods Appl. Sciences, 2016. Vol. 39. No. 12. Pp. 3255–3270.

35. *Sakbaev V.Z., Shiryaeva A.D.* Nonlinear Schrödinger equation with delay and its regularization. Lobachevskii J. Mathematics, 2023. Vol. 44. No. 3. Pp. 936–949.

36. *Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R.* Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2007.

37. *Agirseven D.* On the stability of the Schrödinger equation with time delay. Filomat, 2018. Vol. 32. No. 3. Pp. 759–766.

38. *Hale J.K., Lunel S.M.V.* Introduction to Functional Differential Equations. New York: Springer, 1993.

39. *Zhao Z., Ge W.* Traveling wave solutions for Schrödinger equation with distributed delay. Applied Mathematical Modelling, 2011. Vol. 35. Pp. 675– 687.

40. *Chen C.-F., Luo B.* The freeze of intrapulse Raman scattering effect of ultrashort solitons in optical fiber. Optik, 2007. Vol. 118. No. 1. Pp. 1–4.