

УДК 533.7

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛН В ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ

А. Р. Каримов^{1,2,*}, Г. О. Буянов¹

¹Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва, 115409, Россия

²Объединенный институт высоких температур Российской академии наук, Москва, 127412, Россия

*e-mail: frontlines.07@gmail.com

Поступила в редакцию: 27.09.2024

После доработки: 30.11.2024

Принята к публикации: 03.12.2024

В рамках гидродинамического описания исследуется динамика нелинейных цилиндрических ленгмюровских волн в изотермической плазме, где ионы образуют неподвижный фон. Задача рассматривается в электростатической постановке для двухмерной геометрии. Используя частное, точное аналитическое решение уравнений гидродинамики, получена система дифференциальных уравнений, описывающая динамику электронов с учетом конечной температуры электронов. В настоящих расчетах использовался параболический по радиусу, вогнутый температурный профиль, связанный с меняющейся только по времени электронной плотностью. В рамках данной модели обсуждается влияние начальных условий и тепловых эффектов на регулярную динамику возбуждаемых волн и развитие гидродинамических сингулярностей в электронном потоке. Получены оценки, задающие допустимый диапазон параметров плазмы, при которых реализуется либо регулярное поведение волны, либо происходит опрокидывание электронной волны. Показано, что развитие сингулярного поведения за счет собственной нелинейности можно избежать при учете тепловых эффектов и начального вращения электронного потока. Данные результаты могут быть полезны для установления механизмов неравновесного переноса энергии/импульса в плазменных средах с конечной температурой электронов и ионов.

Ключевые слова: цилиндрические волны, нелинейная динамика, идеальный газ, коллапс плотности, адиабата Пуассона.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.6.1

EDN BGZIAA

ВВЕДЕНИЕ

Динамика плазменных волн конечной амплитуды интенсивно изучается в течение последних нескольких десятилетий, что связано как с исследованием естественных явлений (например, зарождение вихрей, перенос энергии/импульса в неравновесных потоках [1–7]), так и с многочисленными техническими приложениями (например, ускорение заряженных частиц, создание источников излучения [8–11]). При этом следует иметь в виду, что некоторые физически и технически интересные задачи требуют математического рассмотрения в полной нелинейной постановке уравнений гидродинамики и электродинамики [1, 2, 6]. К сожалению, в настоящее время общего подхода к аналитическому описанию подобных задач нет [4, 12, 13], а именно к такому типу отно-

сится задача о динамике нелинейных двухмерных волн, возбуждаемых в плазме.

Чтобы в этом случае выявить некоторые физические свойства исследуемой системы, избежав математических трудностей, можно рассмотреть наиболее простую динамику системы в условиях, где они будут проявляться наиболее наглядным образом. Например, в [14–16] была установлена возможность аккумуляции энергии/импульса в одной из макроскопических степеней свободы вращающегося потока холодной плазмы. Этот процесс принципиально отличается от обычного механизма рассеяния энергии при развитии любой неустойчивости, переводящего энергию в тепловую форму (см., например, [4, 6, 7]). Данная особенность связана с взаимодействием нелинейных радиальных и аксиальных плазменных колебаний, происходящих при локальном

нарушении квазинейтральности, обусловленной вращением потока. В результате этого процесса может происходить ускорение потока в аксиальном или азимутальном направлении.

Однако полученные результаты относятся к потокам холодной плазмы [14–16]. В этой связи возникает естественный вопрос, как учет конечной энергии ионов и электронов будет влиять на данный механизм перераспределения энергии/импульса. Чтобы подойти к решению данного вопроса, мы рассмотрим в рамках гидродинамического описания влияние электронного давления и собственного электростатического поля плазмы на электронную динамику, оставляя ионы холодными и неподвижными.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в начальный момент задан плазменный цилиндр радиусом R_0 и высотой d , ограниченный вакуумом (рис. 1), в котором холодные ионы создают неподвижный фон постоянной плотности n_0 , а подвижные электроны имеют конечную температуру T_e . При этом мы будем трактовать электронную составляющую как идеальный газ, удовлетворяющий уравнению состояния $p_e = T_e n_e$, где p_e и n_e – давление и плотность электронов. С другой стороны, в отсутствие диссипативных процессов в системе давление также описывается адиабатой Пуассона:

$$p_e n_e^{-\gamma} = \text{const}, \quad (1)$$

где γ – показатель адиабаты.

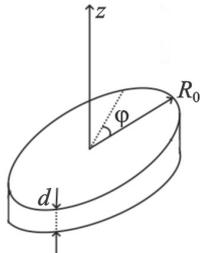


Рис. 1. Цилиндрический плазменный слой

Тогда основные уравнения, описывающие динамику электронов, есть

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \vec{v}_e) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} + (\vec{v}_e \cdot \nabla) \vec{v}_e = -\frac{1}{m_e n} \nabla (n_e T_e) - \frac{e}{m_e} \vec{E}, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi e (n_0 - n_e), \quad (4)$$

где \vec{v}_e – скорость электронов; m_e и e – масса и заряд электрона; \vec{E} – электростатическое поле.

Используя уравнение состояния идеального газа и уравнение непрерывности (2), перепишем уравнение адиабатичности (1) в дифференциальной форме, как

$$\frac{\partial T_e}{\partial t} + (\vec{v}_e \cdot \nabla) T_e = -(\gamma - 1) \nabla \cdot \vec{v}_e.$$

В настоящей работе обсуждается только изотермический предел ($\gamma = 1$), когда данное соотношение сводится к

$$\frac{\partial T_e}{\partial t} + (\vec{v}_e \cdot \nabla) T_e = 0. \quad (5)$$

Ограничиваясь пределом $d \ll R_0$ в аксиально-симметричной геометрии ($\partial_\phi = \partial_z = 0$), далее рассмотрим динамику цилиндрической волны в плоскости $r\theta\phi$.

Чтобы выделить управляющие параметры данной задачи, введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \frac{r}{R_0}, & \bar{t} &= \omega_{pe} t, & \bar{n} &= \frac{n_e}{n_0}, & \bar{E} &= \frac{E_r}{E_*}, \\ \bar{v}_r &= \frac{v_{er}}{v_*}, & \bar{v}_\phi &= \frac{v_{e\phi}}{v_*}, & \bar{T} &= \frac{T}{T_0}, \end{aligned} \quad (6)$$

здесь $\omega_{pe} = \sqrt{4\pi n_0 e^2 / m_e}$, $v_* = \omega_{pe} R_0$ и $E_* = 4\pi e n_0 R_0$, а T_0 – характерная температура электронов. В новых переменных, опуская знак математического акцента над безразмерными переменными, перепишем уравнения (2)–(5) в скалярном виде

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r n v_r)}{\partial r} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\phi^2}{r} = -\beta_T^2 \frac{1}{n} \frac{\partial (n T)}{\partial r} - E, \quad (8)$$

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_r v_\phi}{r} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r E)}{\partial r} = 1 - n, \quad (10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad (11)$$

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛН В ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ

где β_r – управляющий параметр

$$\beta_r^2 = \frac{T_0}{m_e \omega_{pe}^2 R_0^2} = \frac{a_r^2}{v_*^2}, \quad (12)$$

представляет собой квадрат отношения тепловой скорости $a_r = \sqrt{T_0/m_e}$ к характерной скорости $v_* = R_0 \omega_{pe}$.

Уравнения (7)–(11) с начальными условиями

$$\begin{aligned} n(t=0, r) = T(t=0, r) = 1, \quad E(t=0, r) = 0, \\ v_r(t=0, r) = v_{r0}(r), \quad v_\varphi(t=0, r) = v_{\varphi0}(r), \end{aligned} \quad (13)$$

где $v_{r0}(r)$ и $v_{\varphi0}(r)$ – гладкие, ограниченные функции, задающие начальное распределение поля электронных скоростей, составляют основу для исследования динамики цилиндрических волн в рассматриваемой системе.

2. ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ

Частное решение (7)–(11) можно построить с помощью подстановки

$$n = n(t), \quad (14)$$

$$\vec{v} = rA(t)\vec{e}_r + rB(t)\vec{e}_\varphi, \quad (15)$$

$$T = 1 \pm nr, \quad (16)$$

$$E = \frac{\varepsilon(t)}{2}r, \quad (17)$$

которая обращает уравнения в частных производных (7)–(11) в тождества, если пока что неизвестные функции $n(t)$, $A(t)$ и $B(t)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая получается при подстановке (14)–(17) в (7)–(11).

Подставив (14) и (15) в (7), получим

$$\frac{dn}{dt} = -2An. \quad (18)$$

Заметим, что подстановка (16) и (15) в (11) приводит к этому же уравнению (18). Из (10) с учетом (14) и (17) следует

$$\varepsilon = 1 - n. \quad (19)$$

Аналогичным образом из (9) с помощью (15) находим

$$\frac{dB}{dt} = -2AB. \quad (20)$$

Наконец, воспользовавшись (15), (16), (17) и (19) в (8), получим

$$\frac{dA}{dt} = -A^2 + B^2 - 2\beta_r^2 n + \frac{n-1}{2}. \quad (21)$$

Таким образом, соотношения (14)–(17), в которых временная зависимость задается уравнениями (18), (20) и (21) являются частными, точными решениями исходной начальной задачи (2)–(5) и (13) при соответствующем выборе начальных значений

$$\begin{aligned} n(t=0) = 1, \quad \varepsilon(t=0) = 0, \\ A(t=0) = A_0, \quad B(t=0) = B_0. \end{aligned}$$

Эти уравнения определяют динамику электронов и будут положены в основу дальнейшего анализа.

3. ДИНАМИКА ЭЛЕКТРОНОВ

Рассмотрим динамику электронов в случае вогнутого параболического профиля температуры (16), что соответствует знаку минус перед третьим членом в правой части уравнения (21). Для этого из (18) и (20) находим

$$\begin{aligned} n = \exp(-2\theta), \\ B = B_0 \exp(-2\theta), \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\theta = \int_0^t A(x) dx. \quad (23)$$

Как видно из (22) и (23), динамика плотности и азимутальной скорости электронов полностью определяется временной эволюцией радиальной составляющей скорости через нелокальную зависимость (23). Причем интегральная зависимость (23) показывает, что значительные колебания в радиальной составляющей могут относительно слабо влиять на азимутальную составляющую скорости и плотность. Поэтому далее можно ограничиться анализом радиальной составляющей $A(t)$.

Подставив (22) в (21) и воспользовавшись соотношением $A = \frac{d\theta}{dt}$, получим

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = [D + B_0^2 e^{-2\theta}] e^{-2\theta} - \frac{1}{2}, \quad (24)$$

где параметр

$$D_T = \frac{1 - 4\beta_T^2}{2} \quad (25)$$

отражает влияние тепловых эффектов.

Чтобы упростить (24), введем подстановку

$$W = \exp(\theta), \quad (26)$$

которая сводит данное уравнение к

$$\frac{d^2W}{dt^2} = \frac{D_T}{W} + \frac{B_0^2}{W^3} - \frac{W}{2}. \quad (27)$$

Умножив (27) на $y = \frac{dW}{dt}$, получим первый

интеграл (27) в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dW}{dt} \right)^2 - A_0^2 \right] &= D_T \ln W - \\ &- \frac{B_0^2}{2} \left(\frac{1}{W^2} - 1 \right) - \frac{1}{4} (W^2 - 1), \end{aligned} \quad (28)$$

где согласно (23) и (26) использовались $y(t=0) = A_0$ и $W(t=0) = 1$.

Соотношение (28) удобно переписать в более наглядной форме, как

$$\begin{aligned} \left(\frac{dW}{dt} \right)^2 + \frac{B_0^2}{W^2} + \frac{1}{2} W^2 &= \\ = A_0^2 + B_0^2 + \frac{1}{2} + 2D_T \ln W. \end{aligned} \quad (29)$$

Поскольку левая часть (29) всегда положительна, то это накладывает определенные ограничения на D_T . Так, при $W < 1$, что реализуется для $A < 0$, необходимо, чтобы $D_T < 0$, т.е.

$$4\beta_T^2 > 1. \quad (30)$$

При $W > 1$, что отвечает $A(t) > 0$, будет $D_T > 0$, а значит, выполняется противоположное (30) условие. При $D_T = 0$, когда $4\beta_T^2 = 1$, как и для $\beta_T = 0$, влияния теплового эффекта нет.

В качестве иллюстрации влияния тепловых эффектов на развитие цилиндрических электронных волн рассмотрим волновую динамику для наиболее характерных случаев β_T .

На рис. 2 представлены зависимости радиальной A и азимутальной B составляющих скорости электронов вместе с плотностью n при отсутствии начального возмущения в поле скоростей, но при ненулевом значении теплового параметра β_T . Как видно из приведенных графиков, в этом случае радиальная скорость и электронная плотность испытывают почти гармонические колебания ленгмюровского типа из-за действия β_T и возникающего электрического поля ϵ , тогда как азимутальная составляющая скорости остается невозмущенной.

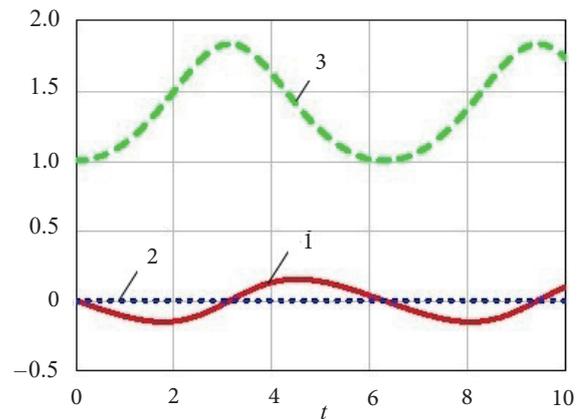


Рис. 2. Зависимости величин A, B, n от времени при $\beta_T = 0.25; A_0 = 0; B_0 = 0; n(0) = 1$, где 1 — зависимость $A(t)$; 2 — зависимость $B(t)$; 3 — зависимость $n(t)$

Совершенно другая картина реализуется (рис. 3), когда имеется начальное возмущение в радиальной скорости. Для выбранного β_T раскачиваются сильно нелинейные колебания в радиальной скорости A , за конечное время профиль волны опрокидывается, что приводит к коллапсу плотности. Следовательно, конечное давление в данном случае не препятствует развитию сингулярности, но при этом азимутальная скорость не меняется.

Теперь посмотрим, что будет происходить при увеличении β_T с наличием начального вращения и радиального движения (рис. 4). В этом случае возникающие нелинейные радиальные колебания скорости не приводят возникновению коллапса плотности из-за действия тепловых эффектов, препятствующих развитию сингулярности. Как и следует из уравнений (18) и (20), профили азимутальной скорости и плотности для выбранных начальных условий совпадают.

Несколько иная картина наблюдается при наличии начального вращения и невозмущенном радиальном профиле скоростей (рис. 5), когда все величины испытывают почти гармонические колебания. Данные примеры показывает, что

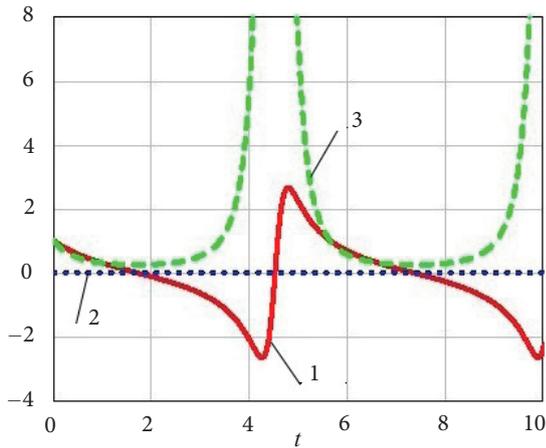


Рис. 3. Зависимости величин A, B, n от времени при $\beta_T=0.25; A_0=1; B_0=0; n(0)=1$, где 1 – зависимость $A(t)$; 2 – зависимость $B(t)$; 3 – зависимость $n(t)$

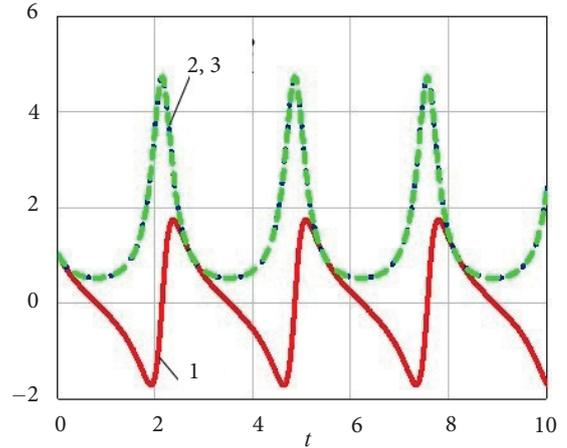


Рис. 4. Зависимости величин A, B, n от времени при $\beta_T=1; A_0=1; B_0=1; n(0)=1$, где 1 – зависимость $A(t)$; 2 – зависимость $B(t)$; 3 – зависимость $n(t)$

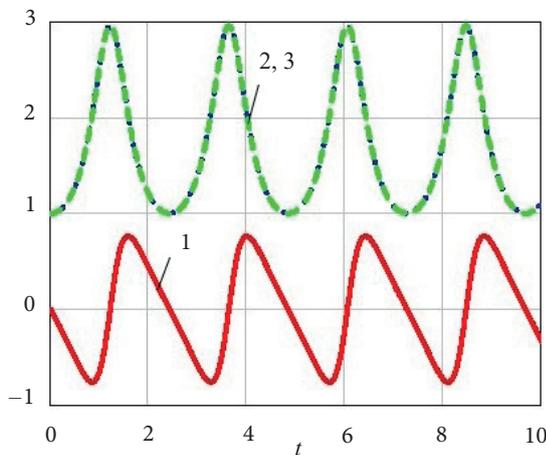


Рис. 5. Зависимости величин A, B, n от времени при $\beta_T=1; A_0=0; B_0=1; n(0)=1$, где 1 – зависимость $A(t)$; 2 – зависимость $B(t)$; 3 – зависимость $n(t)$

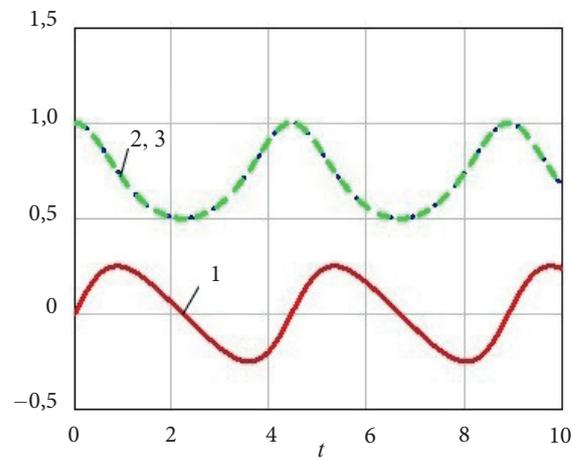


Рис. 6. Зависимости величин A, B, n от времени при $\beta_T=0.5; A_0=0; B_0=1; n(0)=1$, где 1 – зависимость $A(t)$; 2 – зависимость $B(t)$; 3 – зависимость $n(t)$

в рассматриваемой модели за развитие сингулярностей отвечают колебания в радиальной скорости.

В заключение рассмотрим особый случай $\beta_T=0.5$, в котором полностью должно отсутствовать влияние конечной температуры электронов. Зависимости, представленные на рис. 6, качественно близки кривым на рис. 2, где не было проявления ни собственной нелинейности, как на рис. 3, ни дисперсии, связанной с тепловым движением плазмы, как в случае рис. 4, что подтверждает ранее сделанные выводы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе в рамках гидродинамического описания рассматривалась нелинейная динамика цилиндрических волн с конечным электронным давлением и неподвижными холодными ионами в двухмерной геометрии. Считая

систему адиабатической, давление электронов описывалось формулой Пуассона (1) или в дифференциальной форме соотношением (5) в изотермическом пределе $\gamma=1$. Такая постановка задачи позволила использовать подстановку (14)–(17), которая превращает уравнения гидродинамики в систему обыкновенных уравнений (18), (20) и (21). При этом стоит отметить, что уравнения (5) и (7) порождают одно и то же эволюционное уравнение (18). Таким образом, точное частное решение (14)–(17) при определенных начальных условиях описывает начальную стадию развития нелинейных электронных волн до тех пор, пока ионы можно считать неподвижными, электроны – изотермическими.

Введенный безразмерный параметр β_T отражает проявление теплового эффекта и начальных характеристик в динамике рассматриваемой системы [см. уравнение (21)]. Этот управляющий

параметр в принципе позволяет выделить область значений, где будет проявляться тепловой эффект в динамике электронных нелинейных волн, исключая развитие гидродинамических сингулярностей. Приведенное рассмотрение показывает, что развитие сингулярного поведения за счет собственной нелинейности можно избежать при учете тепловых эффектов и начального вращения электронного потока, т.е. регулярная динамика отвечает не только определенным значениям β_T , но также следует учитывать величину B_0 .

Следует подчеркнуть, что решение с неподвижными ионами является ограниченным и описывает только начальную стадию развития нелинейных плазменных волн. Данная задача только позволяет выделить диапазон параметров системы, при которых возможна реализация регулярного поведения. На более больших интервалах времени следует учитывать движение ионной компоненты, как это было сделано в [14–16], а также выйти за пределы изотермического приближения. Настоящая постановка допускает такое обобщение, что позволит подойти к решению ряда технических и естественных задач.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение о предоставлении из федерального бюджета гранта на проведение крупных научных проектов по приоритетным направлениям научно-технологического развития № 075-15-2021-1361 от 7 октября 2021 г.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Davidson R.C. *Methods in Nonlinear Plasma Theory*. New York: Academic Press, 1972. 384 p.

2. Ахиезер А.И., Ахиезер И.А., Половин Р.В. и др. *Электродинамика плазмы*. М.: Наука, 1974. 719 с.

3. Infeld E., Rowlands G. *Nonlinear Waves, Solitons and Chaos*. Cambridge: Cambridge university press, 2000. 412 p.

4. Pécseli H. L. *Waves and Oscillations in Plasmas*. London: Taylor and Francis, 2012. 575 p.

5. Tsytovich V. N. *Nonlinear Effects in Plasma*. New York: Plenum, 1970. 332 p.

6. Stenflo L. Kinetic theory of three-wave interaction in a magnetized plasma // *Journal of Plasma Physics*, 1970. V. 4. № 3. P. 585–593.

7. Kadanoff L. P. *From Order to Chaos II Essays: Critical Chaotic and Otherwise*. Hong Kong: World Scientific, 1999. 768 p.

8. Anand M., Gibbon P. and Krishnamurthy M. Laser absorption in microdroplet plasmas // *Europhysics Letters*, 2007. V. 80. № 2. P. 25002.

9. Panwar J., Sharma S. C. Modeling the emission of high power terahertz radiation using Langmuir wave as a wiggler // *Physics of Plasmas*, 2017. V. 24. № 8. P. 083101.

10. Modena A., Najmudin Z, Dangor A., et al. Electron acceleration from the breaking of relativistic plasma waves // *Nature*, 1995. V. 377. № 6550. P. 606–608.

11. Faure J., Rechatin C., Norlin A., et al. Controlled injection and acceleration of electrons in plasma wakefields by colliding laser pulses // *Nature*, 2006. V. 444. № 7120. P. 737–739.

12. Кудряшов Н.А. *Методы нелинейной математической физики*. М.: МИФИ, 2008. 352 с.

13. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 318 с.

14. Karimov A.R. Nonlinear waves in twirling plasmas // *Journal of Plasma Physics*, 2009. V. 75. № 6. P. 817–828.

15. Karimov A.R., Stenflo L. and Yu M. Coupled azimuthal and radial flows and oscillations in a rotating plasma // *Physics of Plasmas*, 2009. V. 16. № 6. P. 062313.

16. Karimov A.R., Stenflo L. and Yu M. Coupled flows and oscillations in asymmetric rotating plasmas // *Physics of Plasmas*, 2009. V. 16. № 10. P. 102303.

NONLINEAR DYNAMICS OF CYLINDRICAL WAVES IN AN ISOTHERMAL PLASMA

A. R. Karimov^{1,2,}, G. O. Buyanov¹*

¹ National Research Nuclear University MEPhI, Moscow, 115409, Russia

² Joint Institute of High Temperatures, Russian Academy of Sciences, Moscow, 127412, Russia

*e-mail: frontlines.07@gmail.com

Received September 27, 2024; revised November 30, 2024; accepted December 3, 2024

Within the framework of hydrodynamic description, the dynamics of nonlinear cylindrical Langmuir waves has been studied for an isothermal plasma where ions form a stationary background. The problem is considered in the electrostatic formulation for two-dimensional geometry. Using a partial, exact solution for the equations of hydrodynamics, a system of differential equations describing the dynamics of electrons with the finite temperature is obtained. In these calculations, a parabolic on radius, concave temperature profile associated with an electron density changing only in time was used. In the framework of this model, the influence of initial conditions and thermal effects on the regular dynamics of excited waves and the development of hydrodynamic singularities in the electron beam is discussed. Estimates are obtained that specify the permissible range of plasma parameters at which either regular wave behavior is realized or the electron wave breaks down. It is shown that the development of singular behavior due to the intrinsic nonlinearity can be avoided by taking into account the thermal effects and the initial rotation of electron beam. These results may be useful for establishing the mechanisms of nonequilibrium energy/momentum transfer in plasma media with finite electron and ion temperatures. Estimations specifying the admissible range of plasma parameters are derived.

Keywords: cylindrical waves, nonlinear dynamics, ideal gas, density collapse, Poisson adiabatic equation.

REFERENCES

1. Davidson R.C. *Methods in Nonlinear Plasma Theory*. New York, Academic Press, 1972. 384 p.
2. Akhiezer A.I., Akhiezer I.A., Polovin R.V. et al. *Plasma Electrodynamics*. Oxford, Pergamon, 1975. Vol. 1. 428 p.
3. Infeld E., Rowlands G. *Nonlinear Waves, Solitons and Chaos*. Cambridge, Cambridge university press, 2000. 412 p.
4. Pécseli H.L. *Waves and Oscillations in Plasmas*. London, Taylor and Francis, 2012. 575 p.
5. Tsytovich V.N. *Nonlinear Effects in Plasma*. New York, Plenum, 1970. 332 p.
6. Stenflo L. Kinetic theory of three-wave interaction in a magnetied plasma. *Journal of Plasma Physics*, 1970. Vol. 4. No. 3. Pp. 585–593.
7. Kadanoff L.P. *From Order to Chaos II Essays: Critical Chaotic and Otherwise*. Hong Kong, World Scientific, 1999. 768 p.
8. Anand M., Gibbon P. and Krishnamurthy M. Laser absorption in microdroplet plasmas. *Europhysics Letters*, 2007. Vol. 80. No. 2. P. 25002.
9. Panwar J., Sharma S.C. Modeling the emission of high power terahertz radiation using Langmuir wave as a wiggler. *Physics of Plasmas*, 2017. Vol. 24. No. 8. Pp. 083101.
10. Modena A., Najmudin Z, Dangor A., et al. Electron acceleration from the breaking of relativistic plasma waves. *Nature*, 1995. Vol. 377. No. 6550. Pp. 606–608.
11. Faure J., Rechatin C., Norlin A., et al. Controlled injection and acceleration of electrons in plasma wakefields by colliding laser pulses. *Nature*, 2006. Vol. 444. No. 7120. Pp. 737–739.
12. Kudryashov N. A. *Methods of nonlinear mathematical physics*. Moscow, MEPhI Publ., 2008. 352 p. (in Russian).
13. Tabor M. *Chaos and integrability in nonlinear dynamics*. New York, Wiley, Cop., 1989. 364 p.
14. Karimov A.R. Nonlinear waves in twirling plasmas. *Journal of Plasma Physics*, 2009. Vol. 75. No. 6. Pp. 817–828.
15. Karimov A.R., Stenflo L. and Yu M. Coupled azimuthal and radial flows and oscillations in a rotating plasma. *Physics of Plasmas*, 2009. Vol. 16. No. 6. Pp. 062313.
16. Karimov A.R., Stenflo L. and Yu M. Coupled flows and oscillations in asymmetric rotating plasmas. *Physics of Plasmas*, 2009. Vol. 16. No. 10. Pp. 102303.