ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ», 2024, т. 13, № 6, с. 380–393

УДК 517.9

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ, ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И КОНСЕРВАТИВНЫЕ ПЛОТНОСТИ ОБОБЩЕННОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕРДЖИКОВА–ИВАНОВА

***Д. Р. Нифонтов*[*]*, Н. А. Кудряшов*[**]**

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

[*]*e-mail: drnifontov@mephi.ru*
[**]*e-mail: nakudryashov@mephi.ru*

Поступила в редакцию 25.10.2024
После доработки: 08.11.2024
Принята к публикации: 12.11.2024

Рассматривается обобщенное уравнение Герджикова–Иванова. В последние годы это уравнение интенсивно изучается, поскольку оно используется для описания распространения импульсов в оптическом волокне. В отличие от классического уравнения Герджикова–Иванова, исследуемое уравнение не проходит тест Пенлеве, и задача Коши для этого уравнения не решается методом обратной задачи рассеяния. Этот вариант уравнения Герджикова–Иванова имеет лишь ограниченное число законов сохранения. С помощью множителей и прямых вычислений в работе построены законы сохранения рассматриваемого уравнения и найдены два закона сохранения без ограничений на параметры уравнения. Еще один дополнительный закон сохранения найден при дополнительном ограничении на параметры уравнения. В работе также получены первые интегралы для обыкновенных дифференциальных уравнений в результате редукции законов сохранения к переменным бегущей волны в обобщенном уравнении Герджикова–Иванова. Найдены аналитические решения рассматриваемого уравнения. Точные решения обобщенного уравнения Герджикова–Иванова представлены в форме оптических солитонов, а также через эллиптические функции Якоби. Используя вспомогательные интегралы, вычислены сохраняющиеся величины для оптического солитона. Консервативные плотности соответствуют физическим величинам: мощности, момента и энергии. Полученные сохраняющиеся величины имеют практическую пользу при численном и нейросетевом моделировании процессов распространения импульсов в оптическом волокне.

Ключевые слова: уравнение Герджикова–Иванова, законы сохранения, первые интегралы, точные решения, оптические солитоны, консервативные плотности.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.6.2
EDN LANWMF

ВВЕДЕНИЕ

В связи с необходимостью решения задач передачи информации на большие расстояния в последние десятилетия появился большой интерес к исследованию математических моделей распространения импульсов в нелинейно-оптических средах [1–3]. Основным уравнением, используемым для математической модели описания оптических солитонов [4–6], является нелинейное уравнение Шредингера

$$i q_t + a q_{xx} + b|q|^2 q = 0, \qquad (1)$$

где $q(x, t)$ – комплекснозначная функция; $i^2 = -1$; x и t – пространственная и временная координаты, соотвественно; a и b – действительные параметры математической модели. Уравнение описывает огибающую волнового пакета в среде с дисперсией и кубической нелинейностью. Известно, что нелинейное уравнение Шредингера принадлежит классу интегрируемых уравнений, для него найдены пара Лакса, преобразования Бэклунда и многосолитонные решения [7, 8]. Также оно имеет бесконечное количество законов сохранения.

Однако классического нелинейного уравнения Шредингера оказалось недостаточно для описания процессов распространения импульса в оптическом волокне. В последние годы для описания оптических импульсов на большие расстояния предложен ряд новых математических моделей, учитывающих такие физические процессы, как влияние дисперсии высокого порядка, сложных зависимостей коэффициентов преломления и ряда других факторов [9–12]. Все эти уравнения не относятся к классу уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния и, как правило, имеют три или менее законов сохранения. Законы сохранения некоторых математических моделей, описывающих распространение импульсов в оптических средах, можно найти в работах [13–17].

В данной работе изучается возмущенное уравнение Герджикова–Иванова [18]

$$iq_t + aq_{xx} + b\,|q|^4\,q + i\,cq^2q_x^* = \\ = i\left[\alpha q_x + \lambda\left(|q|^{2m} q\right)_x + \mu\left(|q|^{2m}\right)_x q\right], \tag{2}$$

где $q(x, t)$ – комплекснозначная функция; x и t – пространственная и временная координаты соответственно; $i^2 = -1$, a, b, c, α, λ, μ – действительные параметры математической модели.

Уравнение (2) является одним из широко известных нелинейных уравнений в частных производных, использующихся при описании оптических солитонов в оптоволокне. Уравнение не проходит тест Пенлеве, задача Коши для этого уравнения не решается методом обратной задачи рассеяния в общем случае. Лишь только при значениях параметров $\alpha = \lambda = \mu = 0$ уравнение (2) является интегрируемым, что показано в работах [19–21].

Цель данной работы – исследование обобщенного уравнения Герджикова–Иванова (2).

В данной работе применительно к уравнению (2) поставлены следующие задачи:

1) найти законы сохранения прямыми вычислениями для исследуемого уравнения;

2) построить первые интегралы для обобщенного уравнения, используя законы сохранения;

3) получить точные решения рассматриваемого уравнения;

4) вычислить сохраняющиеся величины для соответствующих решений.

Результаты работы представлены в следующем порядке. В разд. 1 показан алгоритм построения законов сохранения, и найдены три закона сохранения для обобщенного уравнения Герджикова–Иванова. В разд. 3, используя найденные для уравнения законы сохранения, получены первые интегралы уравнения в переменных бегущей волны. В разд. 3 представлены некоторые точные решения для обобщенного уравнения Герджикова–Иванова. В разд. 4 вычислены сохраняющиеся величины оптического солитона исследуемого уравнения.

1. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГЕРДЖИКОВА–ИВАНОВА

Законы сохранения являются одной из важнейших характеристик нелинейных эволюционных уравнений [22–25]. Они позволяют оценить некоторые сохраняющиеся характеристики математических моделей [26–29]. Также известно, что законы сохранения отражают свойство интегрируемости нелинейных уравнений в частных производных [30–32]. Так, уравнения в частных производных, интегрируемые методом обратной задачи рассеяния, такие как, например, уравнение Кортевега-де Вриза

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{3}$$

и классическое нелинейное уравнение Шредингера (1) имеют бесконечное число законов сохранения.

Существует несколько подходов к нахождению законов сохранения нелинейных уравнений в частных производных. В статье [33] был применен гамильтонов формализм для нелинейных уравнений Шредингера второго и четвертого порядков с использованием формализма Дирака–Бергмана для построения Гамильтониана. Однако законы сохранения для обобщенных нелинейных уравнений Шредингера можно искать, используя прямые преобразования уравнений, что показано в работах [34–37]. Данный раздел посвящен построению законов сохранения с помощью множителей и прямых вычислений.

Остановимся на общем определении законов сохранения.

Говорят, что уравнение в частных производных

$$E(u, u_x, u_t, \ldots, x, t) = 0 \tag{4}$$

имеет n законов сохранения, если оно представлено в виде

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} + \frac{\partial X_i}{\partial x} = 0,\ i = 1,\ \ldots, n, \tag{5}$$

где T_i – плотность; X_i – поток; причем T_i и X_i зависят от функции u и ее производных по x и t.

В предположении, что при $x \to \pm\infty$ имеем, что интегрируя (5) по x от $-\infty$ до $+\infty$ выражение (5), получим, полагая потоки $X_i = 0$, на бесконечности

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial T_i}{\partial t} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial X_i}{\partial x} dx = \frac{d}{dt}\int T_i dx + X_i \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0 \tag{6}$$

отсюда

$$I_i = \int_{-\infty}^{+\infty} T_i\, dx = \text{const}. \qquad (7)$$

Величина (7) называется *консервативной плотностью*. Она не зависит от времени и является сохраняющейся величиной.

В данном разделе построим три закона сохранения для обобщенного уравнения Герджикова–Иванова используя множители и прямые вычисления. Для получения законов сохранения уравнение запишем в виде системы, состоящей из двух уравнений, а именно уравнения (2)

$$\begin{aligned} &i\,q_t + a\,q_{xx} + b\,|\,q\,|^4\,q + i\,c\,q^2 q_x^* = \\ &= i\left[\alpha\,q_x + \lambda\left(|\,q\,|^{2m}\,q\right)_x + \mu\left(|\,q\,|^{2m}\right)_x q\right] \end{aligned} \qquad (8)$$

и комплексно-сопряженного к нему в виде

$$\begin{aligned} &-i\,q_t^* + a\,q_{xx}^* + b\,|\,q\,|^4\,q^* - i\,c q^{*2} q_x = \\ &= -i\left[\alpha\,q_x^* + \lambda\left(|\,q\,|^{2m}\,q^*\right)_x + \mu\left(|\,q\,|^{2m}\right)_x q^*\right]. \end{aligned} \qquad (9)$$

Построим первый закон сохранения для уравнения (8). Для этого умножаем уравнение (8) на q^*, уравнение (9) на $-q$, а затем сложим полученные уравнения. Результат преобразуем к следующему выражению

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{\partial X_1}{\partial x} = 0, \qquad (10)$$

где T_1 и X_1 имеют вид

$$\begin{aligned} &T_1 = |\,q\,|^2, \\ &X_1 = -ia\left(q^* q_x - q q_x^*\right) + \frac{c}{2}|q|^4 - \alpha|q|^2 - \\ &-\lambda\left(2 - \frac{1}{m+1}\right)|q|^{2(m+1)} - 2\mu\frac{m}{m+1}|q|^{2(m+1)}. \end{aligned} \qquad (11)$$

Для построения второго закона сохранения воспользуемся следующим подходом. Умножим уравнение (8) на q_x^*, а уравнение (9) на q_x и затем также сложим их. Получаем

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left(q^* q_x - q\,q_x^*\right) + \frac{\partial X_2^{(1)}}{\partial x} + 2\,c|q|^2\left(q\,q_{xx}^* - q^* q_{xx}\right) = \\ &= 2(\lambda + \mu)\left[|q|^{2m}\left(q\,q_{xx}^* - q^* q_{xx}\right)\right]. \end{aligned} \qquad (12)$$

где $X_2^{(1)}$ имеет вид

$$\begin{aligned} X_2^{(1)} = &\left(q q_t^* - q^* q_t\right) + 2\,ia|q_x|^2 + \frac{2}{3}\,ib|q|^6 - \\ &-2c\,|q|^2\left(q q_x^* - q^* q_x\right) + \\ &+2\,(\lambda + \mu)|q|^{2m}\left(q q_x^* - q^* q_x\right). \end{aligned} \qquad (13)$$

Данный вид не соответствует закону сохранения, однако его можно преобразовать к закону сохранения. Для этого рассмотрим еще одно выражение. Умножим уравнение (8) на $q^*|q|^{2k}$ и сложим с уравнением (9), умноженным на $-q|q|^{2k}$, где $k \in \mathbb{N}$. Тогда получим

$$\begin{aligned} &\frac{i}{k+1}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(|\,q\,|^{2k+2}\right) + \frac{\partial X_2^{(2)}}{\partial x} + \\ &+a\,|\,q\,|^{2k}\left(q^* q_{xx} - q q_{xx}^*\right) = 0, \end{aligned} \qquad (14)$$

где $X_2^{(2)}$ имеет вид

$$\begin{aligned} X_2^{(2)} = &\,i\frac{c}{k+2}|\,q\,|^{2(k+2)} - i\frac{\alpha}{k+1}|\,q\,|^{2(k+1)} - \\ &-i\lambda\frac{2m+1}{k+m+1}|\,q\,|^{2(k+m+1)} - \\ &-2\,i\,\mu\frac{m}{k+m+1}|\,q\,|^{2(k+m+1)}. \end{aligned} \qquad (15)$$

Затем сложим уравнение (12) с уравнением (14) при $k=1$ и уравнением (14) при $k=m$. Результат разделим на i и тогда получим второй закон сохранения

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} + \frac{\partial X_2}{\partial x} = 0, \qquad (16)$$

где T_2 и X_2 определяются как

$$\begin{aligned} &T_2 = -ia\left(q^* q_x - q q_x^*\right) + c\,|\,q\,|^4 - \frac{2\,(\lambda + \mu)}{m+1}|\,q\,|^{2m+2}, \\ &X_2 = -iaX_2^{(1)} - 2icX_2^{(2)}\big|_{k=1} + 2i\,(\lambda + \mu)\,X_2^{(2)}\big|_{k=m}. \end{aligned} \qquad (17)$$

Покажем как для исследуемого уравнения получить третий закон сохранения прямыми вычислениями. Сначала умножим уравнение (8) на q_t^*, уравнение (9) на q_t и сложим. Получим

$$\begin{aligned} &a\left(q_{xx} q_t^* + q_{xx}^* q_t\right) + b\,|\,q\,|^4\left(q q_t^* + q^* q_t\right) + \\ &+ic\left(q^2 q_x^* q_t^* - q^{*2} q_x q_t\right) = \\ &= i\left[\alpha\left(q_x q_t^* - q_x^* q_t\right) + \lambda\left(\left(|\,q\,|^{2m}\,q\right)_x q_t^* - \right.\right. \\ &\left.\left.-\left(|\,q\,|^{2m}\,q^*\right)_x q_t\right) + \mu\left(|\,q\,|^{2m}\right)_x\left(q q_t^* - q^* q_t\right)\right]. \end{aligned} \qquad (18)$$

Рассмотрим случай $\mu=-\lambda$ Тогда (18) принимает форму

$$\begin{gathered}a\left(q_{xx}q_t^*+q_{xx}^*q_t\right)+b|q|^4\left(qq_t^*+q^*q_t\right)+\\+ic\left(q^2q_x^*q_t^*-q^{*2}q_xq_t\right)=\\=i\left[\alpha\left(q_xq_t^*-q_x^*q_t\right)+\lambda|q|^{2m}\left(q_xq_t^*-q_x^*q_t\right)\right].\end{gathered}\tag{19}$$

На следующем шаге уравнение (19) запишем в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x}\left(a\left(q_xq_t^*+q_x^*q_t\right)\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(a|q_x|^2\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{b|q|^6}{3}\right)+\\+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{ic}{2}\left(q^2q^*q_t^*-q^{*2}qq_t\right)\right)+\\+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{ic}{2}\left(q^2q^*q_x^*-q^{*2}qq_x\right)\right)+ic|q|^2\left(q^*q_{xt}-q\,q_{xt}^*\right)=\\=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{i\alpha}{2}\left(q\,q_t^*-q^*q_t\right)\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{i\alpha}{2}\left(q_x\,q^*-q_x^*\,q\right)\right)+\\+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{i\lambda}{2\,(m+1)^2}\left(q^{m+1}\left(\left(q^*\right)^{m+1}\right)_t-\left(q^*\right)^{m+1}\left(q^{m+1}\right)_t\right)\right)+\\+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{i\lambda}{2\,(m+1)^2}\left(\left(q^{m+1}\right)_x\left(q^*\right)^{m+1}-\left(\left(q^*\right)^{m+1}\right)_x q^{m+1}\right)\right).\end{gathered}\tag{20}$$

Уравнение (20) можно представить в виде

$$\frac{\partial T_3^{(1)}}{\partial t}+ic|q|^2\left(q^*q_{xt}-qq_{xt}^*\right)+\frac{\partial X_3^{(1)}}{\partial x}=0,\tag{21}$$

где $T_3^{(1)}$ и $X_3^{(1)}$

$$\begin{gathered}T_3^{(1)}=\frac{b|q|^6}{3}-a|q_x|^2-\frac{ic|q|^2}{2}\left(q^*q_x-q\,q_x^*\right)-\\-\frac{i\alpha}{2}\left(q^*q_x-q\,q_x^*\right)-\frac{i\lambda|q|^{2m}}{2(m+1)}\left(q^*q_x-q\,q_x^*\right),\\X_3^{(1)}=a\left(q_xq_t^*+q_x^*q_t\right)+\frac{ic|q|^2}{2}\left(qq_t^*-q^*q_t\right)-\\-\frac{i\alpha}{2}\left(qq_t^*-q^*q_t\right)-\frac{i\lambda|q|^{2m}}{2(m+1)}\left(qq_t^*-q^*q_t\right).\end{gathered}\tag{22}$$

Далее дифференцируем уравнения (8) и (9) по переменной x, затем умножаем первое получившееся выражение на $c|q|^2q^*$, а второе на $c|q|^2q$. Получим

$$\begin{gathered}ic|q|^2\left(q^*q_{xt}-q\,q_{xt}^*\right)+ac|q|^2\left(q^*q_{3,x}+qq_{3,x}^*\right)+\\+\frac{5}{4}bc\frac{\partial}{\partial x}\left(|q|^8\right)+ic^2|q|^4\frac{\partial}{\partial x}\left(q\,q_x^*-q^*q_x\right)=\\=i\alpha c|q|^2\frac{\partial}{\partial x}\left(q^*q_x-q\,q_x^*\right)+\\+\frac{i\lambda c|q|^{2(m+1)}}{m+1}\frac{\partial}{\partial x}\left(q^*q_x-qq_x^*\right)+\\+\frac{i\lambda cm}{m+1}\frac{\partial}{\partial x}\left(|q|^{2(m+1)}\left(q^*q_x-q\,q_x^*\right)\right).\end{gathered}\tag{23}$$

Рассмотрим выражение

$$\begin{gathered}ac|q|^2\left(q^*q_{3,x}+qq_{3,x}^*\right)=\\=ac|q|^2\frac{\partial}{\partial x}\left(q^*q_{xx}+qq_{xx}^*-q_xq_x^*\right)=\\=ac|q|^2\frac{\partial}{\partial x}\left(q^*q_{xx}+qq_{xx}^*+2q_xq_x^*-3q_xq_x^*\right)=\\=ac|q|^2\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(|q|^2\right)-3ac|q|^2\frac{\partial}{\partial x}\left(q_xq_x^*\right)=\\=\frac{\partial}{\partial x}\left(ac|q|^2\left(|q|^2\right)_{xx}\right)-ac\left(|q|^2\right)_x\left(|q|^2\right)_{xx}-\\-3ac|q|^2\frac{\partial}{\partial x}\left(q_xq_x^*\right)=\\=\frac{\partial}{\partial x}\left(ac|q|^2\left(|q|^2\right)_{xx}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{ac}{2}\left(\left(|q|^2\right)_x\right)^2\right)-\\-3ac|q|^2\frac{\partial}{\partial x}\left(q_xq_x^*\right).\end{gathered}\tag{24}$$

Преобразуем уравнение (23), используя (14) при значениях $k=1$, $k=2$ и $k=m+1$ а также полученное выражение (24):

$$\begin{gathered}ic|q|^2\left(q^*q_{xt}-qq_{xt}^*\right)=\\=-\frac{\partial}{\partial x}\left(ac|q|^2\left(|q|^2\right)_{xx}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{ac}{2}\left(\left(|q|^2\right)_x\right)^2\right]+\\+3ac|q|^2\frac{\partial}{\partial x}\left(q_xq_x^*\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{5}{4}bc|q|^8\right)+\\+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{c^2}{3a}|q|^6\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{ic^2}{a}X_2^{(2)}\right)\Big|_{k=2}+\\+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\alpha c}{2a}|q|^4\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{i\alpha c}{a}X_2^{(2)}\right)\Big|_{k=1}+\\+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\lambda c}{a(m+1)(m+2)}|q|^{2(m+2)}\right)-\\-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{i\lambda c}{a(m+1)}X_2^{(2)}\right)\Big|_{k=m+1}+\\+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{i\lambda cm}{m+1}|q|^{2(m+1)}\left(q^*q_x-qq_x^*\right)\right).\end{gathered}\tag{25}$$

Следующим шагом умножим уравнение (8) на $3c|q|^2q_x^*$, а уравнение (9) на $3c|q|^2q_x$, сложив их, получим

$$
\begin{gathered}
3ic\,|q|^2\left(q_t q_x^* - q_x q_t^*\right) + 3ac\,|q|^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(q_x q_x^*\right) + \\
+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3}{4} bc\,|q|^8\right) + \frac{3}{2} ic^2\,|q|^4 \frac{\partial}{\partial x}\left(q^* q_x - q q_x^*\right) - \\
-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3ic^2}{2}\,|q|^4\left(q^* q_x - q q_x^*\right)\right) = 0.
\end{gathered} \tag{26}
$$

Преобразуем (26), используя выражение (14) при $k=2$:

$$
\begin{gathered}
3ac\,|q|^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(q_x q_x^*\right) = \\
= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{3}{4}\, ic\,|q|^2\left(q^* q_x - q q_x^*\right)\right) + \\
+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3}{4} ic\,|q|^2\left(q q_t^* - q^* q_t\right)\right) - \\
-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3}{4} bc\,|q|^8\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{c^2}{2a}|q|^6\right) + \\
+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3ic^2}{2a} X_2^{(2)}\right)\Big|_{k=2} + \\
+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3ic^2}{2}|q|^4\left(q^* q_x - q q_x^*\right)\right).
\end{gathered} \tag{27}
$$

Подставляя (27) в (25) получаем

$$
ic\,|q|^2\left(q^* q_{xt} - q q_{xt}^*\right) = \frac{\partial T_3^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial X_3^{(2)}}{\partial x}, \tag{28}
$$

где $T_3^{(2)}$ и $X_3^{(2)}$ определяются как

$$
\begin{gathered}
T_3^{(2)} = -\frac{c^2}{6a}|q|^6 + \frac{\alpha c}{2a}|q|^4 + \\
+\frac{\lambda c}{a(m+1)(m+2)}|q|^{2(m+2)} + \\
+\frac{3}{4} ic\,|q|^2\left(q^* q_x - q q_x^*\right), \\
X_3^{(2)} = -ac\,|q|^2\left(|q|^2\right)_{xx} + \frac{ac}{2}\left(\left(|q|^2\right)_x\right)^2 - \\
-2bc\,|q|^8 + \frac{1}{2}\frac{ic^2}{a} X_2^{(2)}\big|_{k=2} - \frac{i\alpha c}{a} X_2^{(2)}\big|_{k=1} - \\
-\frac{i\lambda c}{a(m+1)} X_2^{(2)}\big|_{k=m+1} + \\
+\frac{i\lambda cm}{m+1}|q|^{2(m+1)}\left(q^* q_x - q q_x^*\right) + \\
+\frac{3}{4} ic\,|q|^2\left(q_t^* - q^* q_t\right) + \\
+\frac{3ic^2}{2}|q|^4\left(q^* q_x - q q_x^*\right).
\end{gathered} \tag{29}
$$

Затем подставляем (28) в (21) и после домножения на a получаем третий закон сохранения при $\mu=-\lambda$ в форме

$$
\frac{\partial T_3}{\partial t} + \frac{\partial X_3}{\partial x} = 0, \tag{30}
$$

где T_3 и X_3 имеют вид

$$
\begin{gathered}
T_3 = -\frac{c^2}{6}|q|^6 + \frac{\alpha c}{2}|q|^4 + \frac{\lambda c}{(m+1)(m+2)}|q|^{2(m+2)} + \\
+\frac{1}{4} iac|q|^2\left(q^* q_x - q q_x^*\right) + \frac{ab|q|^6}{3} - a^2|q_x|^2 - \\
-\frac{ia\alpha}{2}\left(q^* q_x - q q_x^*\right) - \frac{ia\lambda|q|^{2m}}{2(m+1)}\left(q^* q_x - q q_x^*\right), \\
X_3 = aX_3^{(1)} + aX_3^{(2)}.
\end{gathered} \tag{31}
$$

В результате при построении второго и третьего законов сохранения требуется большее количество шагов, чем для многих других обобщенных уравнений Шредингера, поскольку в процессе построения законов сохранения возникают некоторые слагаемые, имеющие нетривиальный вид.

2. ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ОБОБЩЕННОМУ УРАВНЕНИЮ ГЕРДЖИКОВА–ИВАНОВА

В этом разделе покажем, что, используя законы сохранения обобщенных нелинейных уравнений Шредингера, можно построить первые интегралы для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующей уравнениям в частных производных [38]. Суть метода заключается в следующем.

Рассмотрим нелинейное уравнение в частных производных

$$
E(q,\, q_t,\, q_x\, q_{xx}, \ldots) = 0. \tag{32}
$$

Если нам известны несколько законов сохранения для уравнения (32), представленные в виде

$$
\frac{\partial T_i}{\partial t} + \frac{\partial X_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1,\, \ldots,\, n, \tag{33}
$$

где T_i – плотность, а X_i – поток, а также уравнение (32) инвариантно относительно группы преобразований сдвига по x и по t, то в (33) делается переход к переменным бегущей волны

$$
z = x - C_0 t, \tag{34}
$$

где C_0 – скорость волны.

Подставляя (34) в уравнение (33), после интегрирования получаем следующее выражение

$$I_i = X_i(q, q_z, \dots) - C_0 T_i(q, q_z, \dots), \tag{35}$$

где I_i – произвольная постоянная.

Подставляя комплекснозначную функцию уравнения (32) в показательной форме

$$q(x,t) = y(z)\mathrm{e}^{i\psi(z)} \tag{36}$$

в уравнение (35), и учитывая соотношения

$$|q|^2 = y^2, \tag{37}$$

$$i\left(q^* q_x - q q_x^*\right) = -2y^2\psi_z, \tag{38}$$

$$i\left(q^* q_t - q q_t^*\right) = 2C_0 y^2 \psi_z \tag{39}$$

и

$$|q_x|^2 = y_z^2 + y^2\psi_z^2, \tag{40}$$

находим первые интегралы системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений.

В результате получим первые интегралы для системы обыкновенных дифференциальных уравнений на функции $y(z)$ и $\psi(z)$

$$X_i(y, \psi, y_z, \psi_z, \dots) - C_0 T_i(y, \psi, y_z, \psi_z, \dots) = C_i, \tag{41}$$

где C_i – произвольная постоянная.

Построим первые интегралы для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, полученной из обобщенного уравнения Герджикова–Иванова (2). Для построения первых интегралов в законах сохранения (10) и (16) делаем переход к переменным бегущей волны (34).

Подставляем (11) в (41), учитывая (36) и (34). Получаем первый интеграл в виде

$$\begin{gathered} 2ay^2\psi_z + \frac{c}{2}y^4 - \alpha y^2 - \lambda\left(2 - \frac{1}{m+1}\right) - \\ -2\mu\frac{m}{m+1}y^{2(m+1)} - C_0 y^2 = \tilde{C}_1, \end{gathered} \tag{42}$$

где $\tilde{C}_1$ – произвольная постоянная.

Подставляя (17) в (41), и учитывая (36) и (34), получаем первый интеграл вида

$$\begin{gathered} -2a^2y_z^2 - 2a^2y^2\psi_z^2 - 4acy^4\psi_z + \\ +4(\lambda+\mu)ay^{2m+2}\psi_z + +c(\alpha + C_0)y^4 - \\ -\frac{2}{3}\left(ab + c^2\right)y^6 - 2\frac{(\alpha + C_0)(\lambda+\mu)}{m+1}y^{2m+2} + \\ +2c\frac{\lambda(2m+2) + \mu(2m+1)}{m+2}y^{2m+4} - \\ -2(\lambda+\mu)\left(\lambda + \mu\frac{2m}{2m+1}\right)y^{4m+2} = \tilde{C}_2, \end{gathered} \tag{43}$$

где $\tilde{C}_2$ – произвольная постоянная.

Выражая ψ_z из (42) и сделав замену $C_1 = \frac{\tilde{C}_1}{2}$, имеем

$$\begin{gathered} \psi_z = \frac{C_0 + \alpha}{2a} - \frac{c}{4a}y^2 + \\ +\left(\frac{(2m+1)\lambda + 2m\mu}{2a(m+1)}\right)y^{2m} + \frac{C_1}{ay^2}. \end{gathered} \tag{44}$$

Подставляя ψ_z из (44) в (43) и принимая во внимание замену

$$C_2 = -\left(\frac{C_1(C_0 + \alpha)}{2a} + \frac{\tilde{C}_2}{4a}\right),$$

получим

$$\begin{gathered} \frac{a}{2}y_z^2 + \left(\frac{\alpha^2}{8a} + \frac{C_0{}^2}{8a} + \frac{3cC_1}{4a} + \frac{C_0\alpha}{4a}\right)y^2 + \\ +\left(\frac{c\alpha}{8a} + \frac{C_0 c}{8a}\right)y^4 + \frac{C_1^2}{2ay^2} + \left(\frac{b}{6} - \frac{5c^2}{96a}\right)y^6 - \\ -\left(\frac{\lambda C_1 + 2\mu C_1}{2(1+m)a}\right)y^{2m} + \left(\frac{c(5m\lambda + 6\mu m + 2\lambda)}{8a(1+m)(2+m)}\right)y^{4+2m} + \\ +\left(\frac{\lambda C_0 + \lambda\alpha}{4a(1+m)}\right)y^{2+2m} - \\ -\left(\frac{4\mu^2m^2 + 4\lambda\mu m^2 - 2\lambda^2 m - \lambda^2}{8a(1+m)^2(1+2m)}\right)y^{2+4m} - C_2 = 0. \end{gathered} \tag{45}$$

Решение уравнения (45) найти затруднительно и по-видимому оно не имеет общего решения, однако можно найти некоторые точные решения при ограничениях на параметры уравнения.

3. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГЕРДЖИКОВА–ИВАНОВА

В этом разделе проиллюстрируем построение некоторых точных решений для обобщенного уравнения Герджикова–Иванова (2). Для этого используем первый интеграл (45).

Рассмотрим случай $m=1$. Запишем первый интеграл (45) при $m=1$ в следующей форме

$$\frac{a}{2}y_z^2+\left(\frac{b}{6}-\frac{5c^2}{96a}-\frac{\lambda\mu}{24a}-\frac{\mu^2}{24a}+\frac{\lambda^2}{32a}+\frac{7\lambda c}{48a}+\frac{c\mu}{8a}\right)y^6+ \\ +\left(\frac{C_0c}{8a}+\frac{c\alpha}{8a}+\frac{\lambda C_0}{8a}+\frac{\lambda\alpha}{8a}\right)y^4+\left(\frac{3cC_1}{4a}+\frac{C_0{}^2}{8a}+\right. \\ \left.+\frac{C_0\alpha}{4a}+\frac{\alpha^2}{8a}-\frac{\lambda C_1}{4a}-\frac{C_1\mu}{2a}\right)y^2+\frac{C_1^2}{2ay^2}-C_2=0. \tag{46}$$

Используя замену

$$y(z)=\sqrt{V(z)}, \tag{47}$$

в уравнении (46), имеем уравнение

$$V_z^2+A_1V^4+B_1V^3-E_1V^2-\frac{8C_2}{a}V+\frac{4C_1^2}{a^2}=0, \tag{48}$$

где A_1, B_1 и E_1 определяются следующим выражением

$$A_1=\frac{4b}{3a}-\frac{5c^2}{12a^2}-\frac{\mu^2}{3^2}+\frac{\lambda^2}{4a^2}-\frac{\lambda\mu}{3a^2}+\frac{7\lambda c}{6a^2}+\frac{c\mu}{a^2}, \\ B_1=\frac{C_0c}{a^2}+\frac{c\alpha}{a^2}+\frac{\lambda C_0}{a^2}+\frac{\lambda\alpha}{a^2}, \\ E_1=-\frac{C_0{}^2}{a^2}-\frac{2C_0\alpha}{a^2}-\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{2\lambda C_1}{a^2}+\frac{4\mu C_1}{a^2}-\frac{6cC_1}{a^2}. \tag{49}$$

Полагая $C_1=0$ и $C_2=0$ решение уравнения (46) имеет вид уединенной волны

$$V(z)=\frac{4E_1\,\mathrm{e}^{\sqrt{E_1}(z-z_0)}}{4A_1E_1+\left(B_1+\mathrm{e}^{\sqrt{E_1}(z-z_0)}\right)^2}, \tag{50}$$

где z_0 – произвольная постоянная.

Тогда решение $y_1(z)$ записывается как

$$y_1(z)=\left[\frac{4E_1\,e^{\sqrt{E_1}(z-z_0)}}{4A_1E_1+\left(B_1+e^{\sqrt{E_1}(z-z_0)}\right)^2}\right]^{1/2}. \tag{51}$$

Оптический солитон $q_1(x,t)$ для обобщенного уравнения Герджикова–Иванова (2) в таком случае имеет вид

$$q_1(x,t)=\left[\frac{4E_1\,\mathrm{e}^{\sqrt{E_1}(x-C_0t-z_0)}}{4A_1E_1+\left(B_1+\mathrm{e}^{\sqrt{E_1}(x-C_0t-z_0)}\right)^2}\right]^{1/2}\times \\ \times\mathrm{e}^{i\psi(x-C_0t)}. \tag{52}$$

Функцию $\psi(z)$ можно выразить в явном виде. Она имеет вид

$$\psi_1(z)=\frac{2\mu+3\lambda-c}{2a\sqrt{A_1}}\left\{\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{E_1}(z-z_0)}+B_1}{2\sqrt{A_1E_1}}\right\}+ \\ +\left(\frac{C_0+\alpha}{2a}\right)z. \tag{53}$$

График решения (51) демонстрируется на рис. 1 при значениях $z_0=3.0$, $A_1=1.0$, $B_1=2.0$ и $E_1=5.0$.

Общее решение уравнения (46) можно выразить через эллиптические функции Якоби. Известно, что решение уравнения (46) можно представить через эллиптический синус или через функцию Вейерштрасса. Запишем общее решение при $C_1\neq0$ и $C_2\neq0$ уравнения (46) в виде

$$y_2(z)=\left[\frac{V_1(V_4-V_2)sn^2\{S_1(z-z_0);k_1\}+V_4(V_2-V_1)}{(V_4-V_2)sn^2\{S_1(z-z_0);k_1\}+V_2-V_1}\right]^{1/2}, \tag{54}$$

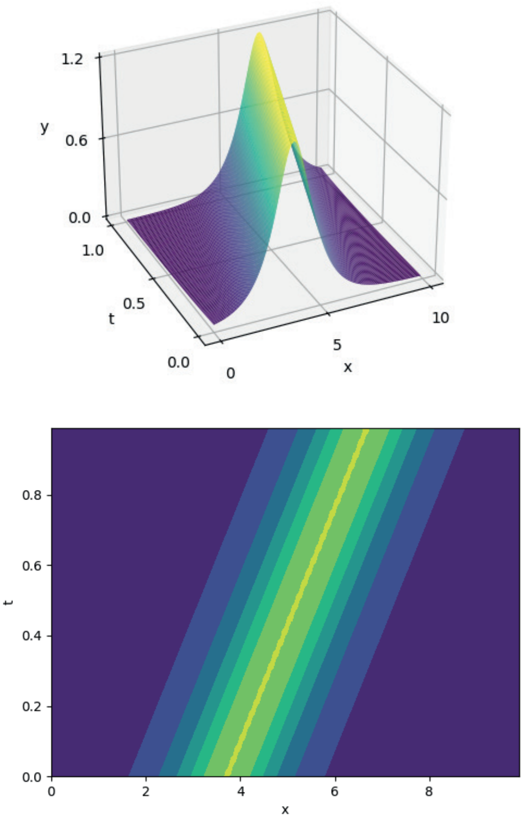

Рис. 1. Решение $y_1(x,t)$ при $z_0=3.0$, $A_1=1.0$, $B_1=2.0$ и $E_1=5.0$

где z_0 – произвольная постоянная, V_1, V_2, V_3 и V_4 корни следующего уравнения

$$\begin{aligned} &A_1V^4 + B_1V^3 - E_1V^2 - \frac{8C_2}{a}V + \frac{4C_1^2}{a^2} = \\ &= A_1(V-V_1)(V-V_2)(V-V_3)(V-V_4) = 0, \end{aligned} \qquad (55)$$

S_1 и k_1 определяются как

$$S_1 = \frac{1}{2}\sqrt{A_1(V_4-V_3)(V_2-V_1)}, \qquad (56)$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{(V_3-V_1)(V_4-V_2)}{(V_4-V_3)(V_2-V_1)}}. \qquad (57)$$

Периодическое решение $q_2(x,t)$ для обобщенного уравнения Герджикова–Иванова (2) при $m=1$ находится по формуле (36), используя (54).

Решение (54) представлено на рисунке 2 при $z_0=1.0$, $A_1=1.0$, $V_1=1.0$, $V_2=3.0$, $V_3=2.0$ и $V_4=4.0$.

Далее рассмотрим случай $m=2$.

Уравнение (45) при $m=2$ принимает форму

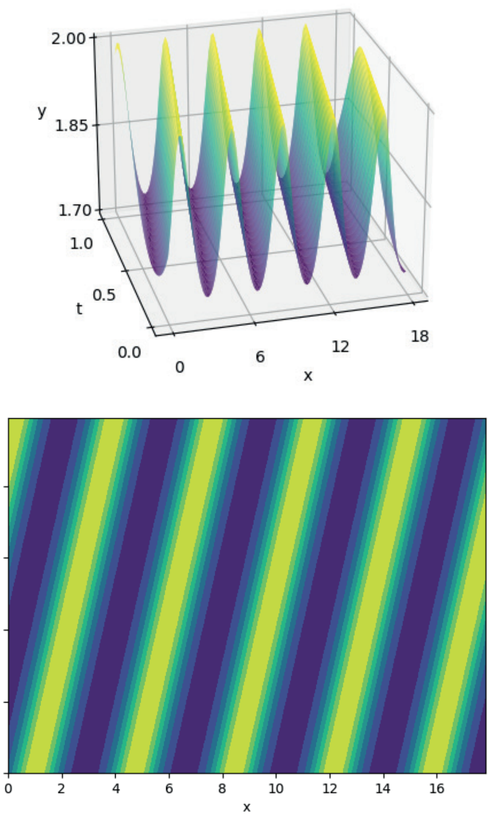

Рис. 2. Решение при z_0=1.0, A_1=1.0, V_1=1.0, V_2=3.0, V_3=2.0 и V_4=4.0

$$\begin{aligned} &\frac{a}{2}y_z^2 - C_2 + \frac{C_1^2}{2ay^2} + \\ &+\left(\frac{3cC_1}{4a} + \frac{\alpha^2}{8a} + \frac{C_0\alpha}{4a} + \frac{C_0^{\,2}}{8a}\right)y^2 + \\ &+\left(\frac{C_0c}{8a} + \frac{c\alpha}{8a} - \frac{C_1\mu}{3a} - \frac{\lambda C_1}{6a}\right)y^4 + \\ &+\left(\frac{b}{6} - \frac{5c^2}{96a} + \frac{\lambda\alpha}{12a} + \frac{\lambda C_0}{12a}\right)y^6 + \\ &+\left(\frac{c\lambda}{8a} + \frac{c\mu}{8a}\right)y^8 + \\ &+\left(\frac{\lambda^2}{72a} - \frac{2\lambda\mu}{45a} - \frac{2\mu^2}{45a}\right)y^{10} = 0. \end{aligned} \qquad (58)$$

Рассмотрим уравнение (58) при выполнении следующих условий

$$C_2 = 0, \ \ \mu = -\lambda, \ \ C_0 = -\alpha - \frac{4\lambda C_1}{3c} \qquad (59)$$

и после этого сделаем в нем замену

$$y = W(z)^{1/4}, \qquad (60)$$

тогда получим

$$\begin{aligned} &W_z^2 + \frac{16C_1^2}{a^2}W + \left(\frac{24cC_1}{a^2} + \frac{64}{9}\frac{\lambda^2C_1^{\,2}}{a^2c^2}\right)W^2 + \\ &+\left(\frac{16b}{3a} - \frac{5c^2}{3a^2} - \frac{32}{9}\frac{\lambda^2C_1}{a^2c}\right)W^3 + \frac{4\lambda^2}{9a^2}W^4 = 0. \end{aligned} \qquad (61)$$

Запишем уравнение (61) в форме

$$W^2 + \frac{16\,{}^{2}_{1}}{a^2}W - RW^2 + NW^3 + \frac{4\lambda^2}{9a^2}W^4 = 0, \qquad (62)$$

где

$$R = -\left(\frac{24cC_1}{a^2} + \frac{64}{9}\frac{\lambda^2C_1^{\,2}}{a^2c^2}\right), \qquad (63)$$

$$N = \left(\frac{16b}{3a} - \frac{5c^2}{3a^2} - \frac{32}{9}\frac{\lambda^2C_1}{a^2c}\right). \qquad (64)$$

Общее решение уравнения (62) можно представить через эллиптический синус в виде

$$W(z) = \frac{W_3W_1}{(W_3-W_1)sn^2\{S_2(z-z_0);k_2\} + W_1}, \qquad (65)$$

где W_1, W_2, W_3 корни уравнения

$$\frac{16C_1^2}{a^2} - RW + NW^2 + \frac{4\lambda^2}{9a^2}W^3 = 0, \qquad (66)$$

а параметры S_2 и k_2 имеют вид

$$S_2 = \frac{\lambda}{3a}\sqrt{(W_3 - W_2)W_1}, \qquad (67)$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{(W_3 - W_1)W_2}{(W_3 - W_2)W_1}}. \qquad (68)$$

Тогда решение для (58) при условиях (59) запишется в виде

$$y_3(z) = \left[\frac{W_3 W_1}{(W_3 - W_1)sn^2\{S_2(z - z_0); k_2\} + W_2}\right]^{1/4}. \qquad (69)$$

Решение (69) показано на рис. 3 при значениях $z_0 = 1.0$; $a = 1.0$; $\lambda = 3.0$; $W_1 = 3.0$; $W_2 = 2.0$ и $W_3 = 4.0$.

Если положить $C_1 = 0$ то получим уединенную волну для (61) вида

$$W(z) = \frac{36\,R\,a^2\,e^{\sqrt{R}(z_0 - z)}}{144\lambda^2 Ra^2 + \left(9Na^2 + e^{\sqrt{R}(z_0 - z)}\right)^2}. \qquad (70)$$

Выразим решение уравнения (58), которое будет иметь вид

$$y_4(z) = \left[\frac{36Ra^2\,e^{\sqrt{R}(z_0 - z)}}{144\lambda^2 Ra^2 + \left(9Na^2 + e^{\sqrt{R}(z_0 - z)}\right)^2}\right]^{1/4}. \qquad (71)$$

Оптический солитон для уравнения (2) ищется, используя (71) и (36).

Решение (71) представлено на рис. 4 при $z_0 = 20.0$; $a = 2{,}0$; $\lambda = 4.0$; $R = 1.0$ и $N = 2.0$.

Также существуют некоторые частные решения в случае произвольного m для обобщенного уравнения Герджикова–Иванова. Они представлены в работе [18].

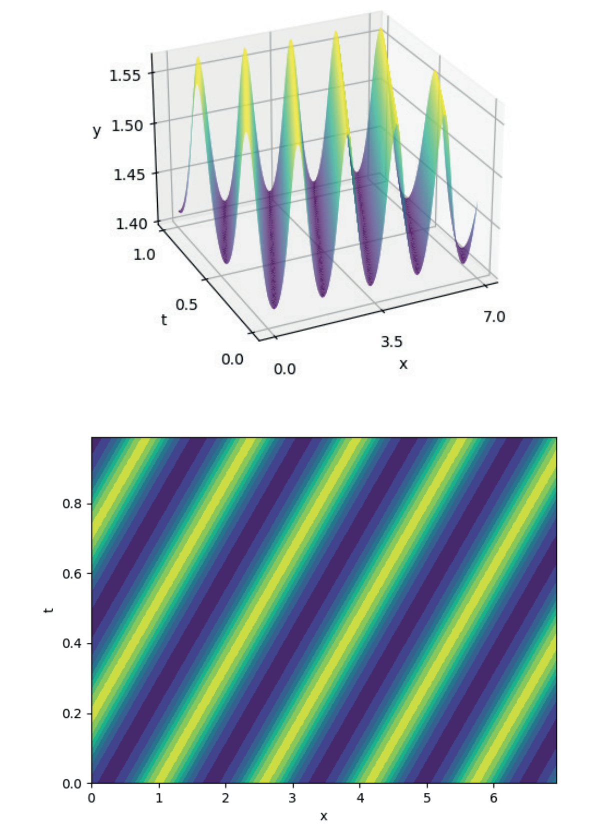

Рис. 3. Решение $y_3(x, t)$ при $z_0 = 1.0$; $a = 1.0$; $\lambda = 3.0$; $W_1 = 3.0$; $W_2 = 2.0$ и $W_3 = 4.0$

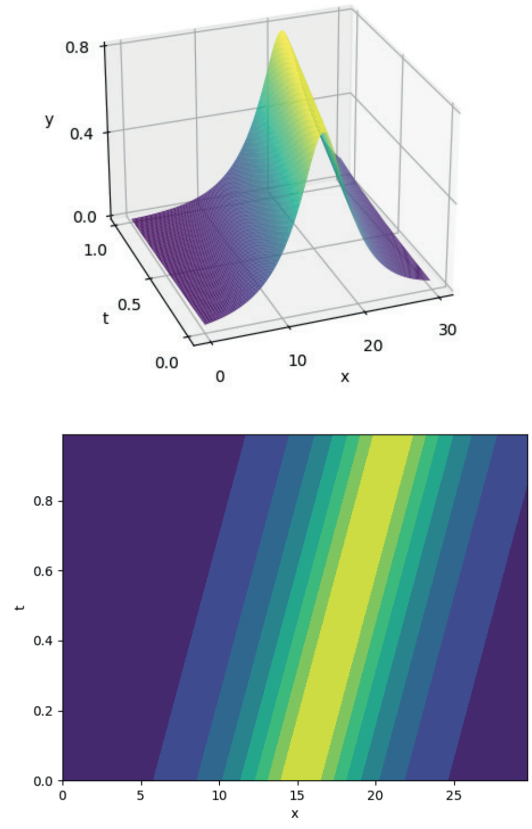

Рис. 4. Решение $y_4(x, t)$ при $z_0 = 20.0$; $a = 2.0$; $\lambda = 4.0$; $R = 1.0$ и $N = 2.0$

4. КОНСЕРВАТИВНЫЕ ПЛОТНОСТИ ОПТИЧЕСКОГО СОЛИТОНА ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГЕРДЖИКОВА–ИВАНОВА

Найдем сохраняющиеся величины для обобщенного уравнения Герджикова–Иванова.

Рассмотрим решение (52) и найдем консервативные плотности для него. Для этого разберем следующие вспомогательные интегралы:

$$L_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y_1^2 dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{4E_1 \mathrm{e}^{\sqrt{E_1}(x - C_0 t - z_0)}}{4A_1E_1 + \left(B_1 + \mathrm{e}^{\sqrt{E_1}(x - C_0 t - z_0)}\right)^2} dx = \frac{2}{\sqrt{A_1}}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\gamma\right), \tag{72}$$

$$L_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y_1^4 dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{4E_1 \mathrm{e}^{\sqrt{E_1}(x - C_0 t - z_0)}}{4A_1E_1 + \left(B_1 + \mathrm{e}^{\sqrt{E_1}(x - C_0 t - z_0)}\right)^2}\right)^2 dx = \frac{\sqrt{E_1}}{A_1}(-\pi\gamma + 2\gamma \operatorname{arctg}\gamma + 2), \tag{73}$$

$$L_3 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y_1^6 dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{4E_1 \mathrm{e}^{\sqrt{E_1}(x - C_0 t - z_0)}}{4A_1E_1 + \left(B_1 + \mathrm{e}^{\sqrt{E_1}(x - C_0 t - z_0)}\right)^2}\right)^3 dx = \frac{E_1}{2A_1\sqrt{A_1}}\left(-2\left(3\gamma^2 + 1\right)\operatorname{arctg}\gamma + 3\gamma(\pi\gamma - 2) + \pi\right), \tag{74}$$

$$L = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y_{1x}^2 dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{E_1^2 \mathrm{e}^{\sqrt{E_1}(x - C_0 t - z_0)}}{4A_1E_1 + \left(B_1 + \mathrm{e}^{\sqrt{E_1}(x - C_0 t - z_0)}\right)^2} \times \left(1 - \frac{2\left(B_1 \mathrm{e}^{\sqrt{E_1}(x - C_0 t - z_0)} + \mathrm{e}^{2\sqrt{E_1}(x - C_0 t - z_0)}\right)}{4A_1E_1 + \left(B_1 + \mathrm{e}^{\sqrt{E_1}(x - C_0 t - z_0)}\right)^2}\right)^2 dx = \frac{1}{32A_1\sqrt{A_1}}\left(-2\left(\gamma^2 + 1\right)\operatorname{arctg}\gamma + \gamma(\pi\gamma - 2) + \pi\right), \tag{75}$$

где $\gamma = \dfrac{B_1}{2\sqrt{A_1E_1}}$.

Из плотности T_1 получаем первую сохраняющуюся велину для решения (52) в виде

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} T_1 dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |q_1|^2 dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y_1^2 dx = L_1. \tag{76}$$

Интегрирование плотности T_2 с подставленным решением (52) и имеющимся ψ_z дает следующее выражение:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} T_2 dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(-ia\left(q_1^* q_{1x} - q_1 q_{1x}^*\right) + c|q_1|^4 - (\lambda + \mu)|q_1|^4\right) dx = \\ &= 2a\int\limits_{-\infty}^{\infty} y_1^2 \psi_x dx + (c - \lambda - \mu)\int\limits_{-\infty}^{\infty} y_1^4 dx = \\ &= (C_0 + \alpha)\int\limits_{-\infty}^{\infty} y_1^2 dx + \frac{c + \lambda}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} y_1^4 dx = \\ &= (C_0 + \alpha)L_1 + \frac{c + \lambda}{2}L_2. \end{aligned} \tag{77}$$

Интегрирование плотности T_3 с учетом решения (52) и выражения для ψ_z дает следующее выражение:

$$\begin{aligned} I_3 &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} T_3 dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{c^2}{6}|q_1|^6 + \frac{\alpha c}{2}|q_1|^4 + \frac{\lambda c}{6}|q_1|^6 + \frac{iac}{4}|q_1|^2\left(q_1^* q_{1x} - q_1 q_{1x}^*\right) + \right. \\ &\left. + \frac{ba|q_1|^6}{3} - a^2|q_{1x}|^2 - \frac{i\alpha a}{2}\left(q_1^* q_{1x} - q_1 q_{1x}^*\right) - \frac{i\lambda a\,|q_1|^2}{4}\left(q_1^* q_{1x} - q_1 q_{1x}^*\right)\right) dx = \\ &= \left(\frac{\alpha^2 - C_0^2}{4}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty} y_1^2 dx + \left(\frac{\alpha(\lambda + c)}{4} - \frac{C_0(\lambda + \mu)}{2}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty} y_1^4 dx + \\ &+ \left(\frac{\lambda c}{24} + \frac{ba}{3} - \frac{3\lambda^2}{16} - \frac{\mu\lambda}{2} - \frac{\mu^2}{4} - \frac{5c^2}{48}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty} y_1^6 dx - a^2\int\limits_{-\infty}^{\infty} y_{1x}^2 dx = \\ &= \left(\frac{\alpha^2 - C_0^2}{4}\right)L_1 + \left(\frac{\alpha(\lambda + c)}{4} - \frac{C_0(\lambda + \mu)}{2}\right)L_2 + \\ &+ \left(\frac{\lambda c}{24} + \frac{ba}{3} - \frac{3\lambda^2}{16} - \frac{\mu\lambda}{2} - \frac{\mu^2}{4} - \frac{5c^2}{48}\right)L_3 - a^2 L. \end{aligned} \tag{78}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследовано обобщенное уравнение Герджикова–Иванова. Представлен алгоритм построения законов сохранения методом прямых вычислений. Найдено два закона сохранения для исследуемого уравнений без ограничений на параметры, а также третий закон с одним ограничением на параметры уравнения. Построены первые интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений, соответсвующей обобщенному уравнению Герджикова–Иванова. Найдены решения рассматриваемого уравнения в форме оптических солитонов, а также через эллиптические функции Якоби. Для оптического солитона рассчитаны сохраняющиеся величины. Полученные законы сохранения и консервативные плотности можно использовать для численного и нейросетевого моделирования. Помимо этого сохраняющиеся величины имеют практическую пользу при оценки некоторых характеристик, измеряемых при распространении импульсов в оптических волокнах.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00141, https://rscf.ru/project/22-11-00141/.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kivshar Y.S., Agrawal G.P.* Optical Solitons. From Fibers to Photonic Crystals. Academic Press, 2003.

2. *Kivshar Yu.S. and Malomed B.A.* Dynamics of solitons in nearly integrable systems // Rev. Mod. Phys., 1989. V. 63. P.763–915.

3. *Kivshar Yu.S., Pelinovsky D. E.* Self – focusing and transversive instabilities of solitary waves // Phys. Reports, 2000. V. 331(4). P. 117–195.

4. *Hasegawa A., Tappert F.* Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion // Applied Physics Letters, 1973. V. 23. P. 142–144. DOI: 10.1063/1.1654836.

5. *Hasegawa A., Tappert F.* Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. II. Normal dispersion // Applied Physics Letters, 1973. V. 23. P. 171–172. DOI: 10.1063/1.1654847.

6. *Tai K., Hasegawa A., Tomita A.* Observation of modulational instability in optical fibers // Physical Review Letters, 1986. V. 56. Iss.2. P. 135–138. DOI: 10.1103/PhysRevLett.56.135.

7. *Zakharov V.E., Shabat A.B.* Exact theory of two-dimensional self-focussing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media // Soviet Physics JETP, 1972. V. 34. № 1. P. 62–67.

8. *Захаров В.Е., Шабат А.Б.* Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I // Функциональный анализ и его приложения, 1974. Т. 8. № 3. С. 43–53.

9. *Kudryashov N.A.* A generalized model for description of propagation pulses in optical fiber // Optik, 2019. V. 189. P. 42–52.

10. *Кутуков А.А., Кудряшов Н.А.* Оптические солитоны системы дифференциальных уравнений типа нелинейного уравнения Шредингера с нелинейностью третьей, пятой и седьмой степени // Вестник НИЯУ МИФИ, 2020. Т. 9. № 5. С. 438–441. DOI: 10.1134/S2304487X20050090

11. *Лаврова С.Ф., Кудряшов Н.А*. Нелинейные динамические процессы, описываемые системой уравнений Радхакришнана–Кунду–Лаксманана // Вестник НИЯУ МИФИ, 2020. Т. 9. № 1. С. 45–49. DOI: 10.1134/S2304487X20010058

12. *Сафонова Д.В., Кудряшов Н.А.* Точные решения дифференциального уравнения четвертого порядка для описания оптических импульсов // Вестник НИЯУ МИФИ, 2020. Т. 9. № 5. С. 412–419. DOI: 10.1134/S2304487X20050120.

13. *Biswas A., Sonmezoglu. A., Ekici M., Kara A.H., Alzahrani A.K., Belic M.R.* CubicQuartic Optical Solitons and Conservation Laws with Kudryashovs Law of Refractive Index by Extended Trial Function // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2021. V. 61. № 12. P. 1995–2003.

14. *Yildirim Y., Biswas A., Kara A.H., Ekici M., Zayed E.M.E., Alzahrani A.K., Belic M.R.* Optical solitons and conservation law with Kudryashovs form of arbitrary refractive index // Journal of Optics (India), 2021. V. 50. № 4. P. 542–547.

15. *Kudryashov N.A., Nifontov D.R.* Conservation laws and Hamiltonians of the mathematical model with unrestricted dispersion and polynomial nonlinearity // Chaos, Solitons & Fractals, 2023. V. 175. 114076.

16. *Kudryashov N., Lavrova S. Nifontov D.* Analytical solutions and conservation laws of the generalized model for propagation pulses with four powers of nonlinearity // Opt .Quant. Electron, 2024. V.56. 1110. DOI: 10.1007/s11082-024-06598-y.

17. *Kudryashov N.A., Kutukov A.A. Nifontov D.R.* Analytical solutions and conservation laws of the generalized nonlinear Schrödinger equation with anti-cubic and cubic-quintic-septic nonlinearities // Opt. Quant. Electron., 2024. V.56. 1157. DOI: 10.1007/s11082-024-07092-1.

18. *Kudryashov N.* Traveling wave solutions of the generalized Gerdjikov-Ivanov equation // Optik, 2020. V. 219. 165193.

19 *Gerdjikov V.S., Ivanov M.I.* Expansions over the squared solutions and inhomgeneous nonlinear schrodinger equation // Inverse Problems, 1992. V. 8 (6). P. 831–847.

20. *Zahran Emad H.M., Bekir A.* New unexpected explicit optical soliton solutions to the perturbed GerdjikovIvanov

equation // Journal of Optics (India), 2023. V. 52. № 3. P. 1142–1147.

21 *Onder I., Secer A.,Ozisik M., Bayram M.* Investigation of optical soliton solutions for the perturbed Gerdjikov-Ivanov equation with full-nonlinearity // Heliyon, 2023. V. 9. Iss.2. e13519. DOI: 10.1016/j.heliyon.2023.e13519.

22. *Olver P.J.* Applications of Lie groups to differential equations. Spriner-Verlag, New York inc, 1986.

23. *Malomed B.A*. Inelastic collisions of polarized solitons in a birefringent optical fiber // Journal of the Optical Society of America B: Optical Physics, 1992. V. 9 (11). P. 2075–2082.

24. *Dmitriev S.V., Kevrekidis P.G., Malomed B.A., Frantzeskakis D.J.* Two-soliton collisions in a near-integrable lattice system // Physical Review E – Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics, 2003. V. 68. Iss.5. 056603. DOI: 10.1103/PhysRevE.68.056603

25. *Biswas A.* Chirp-free bright optical solitons and conservation laws for complex Ginzburg-Landau equation with three nonlinear forms // Optik, 2018. V. 174, P. 207–215.

26. *Biswas A., Kara A.H., Zhou Q., Alzahrani A.K., Belic M.R.* Conservation Laws for Highly Dispersive Optical Solitons in Birefringent Fibers // Regular and Chaotic Dynamics, 2020. V. 25. Iss. 2. P. 166–177.

27. *Kudryashov N.A., Biswas A., Kara A.H.,Yildirim Y.* Cubicquartic optical solitons and conservation laws having cubicquinticsepticnonic self-phase modulation // Optik, 2022. V. 269. 169834.

28. *Alshehri A.M., Alshehri H.M., Alshreef A.N., Kara A.H., Biswas A., Yildirim Y.* Conservation laws for dispersive optical solitons with Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanan model having quadrupled power-law of self-phase modulation // Optik, 2022. V. 267. 169715.

29. *Zayed E.M.E., Shohib R.M.A., Alngar M.E.M., Biswas A., Kara A.H., Dakova A., Khan S., Alshehri H.M., Belic M.R*. Solitons and conservation laws in magneto-optic waveguides with generalized Kudryashov's equation by the unified auxiliary equation approach // Optik, 2021. V. 245. 167694.

30. *Drazin P.G., Johnson R.S.* Soliton: an introduction. Cambridge University press, 1989.

31. *Ablowitz M.J., Clarkson P.A.* Solitons, Nonlinear Equations and Inverse Scattering. Cambridge University press, 1991.

32. *Ablowitz M.J., Segur H.* Solitons and the Inverse Scattering Transform, SIAM Philadelphia, 1981.

33. *Pazarci A., Turhan U.C., Ghazanfari N., Gahramanov I.* Hamiltonian formalism for nonlinear Schrger equations // Commun Nonlinear Sci. Numer Simul., 2023. V.121. 107191. DOI: 10.1016/j.cnsns.2023.107191

34. *Kudryashov N.A.* Conservation laws and Hamiltonian of the nonlinear Schrodinger equation of the fourth order with arbitrary refractive index // Optik, 2023. V.286. 170993. DOI: 10.1016/j.ijleo.2023.170993.

35. *Kudryashov N.A*. Hamiltonians of the Generalized Nonlinear Schrodinger Equations // Mathematics, 2023. V.11 (10). 2304. DOI: 10.3390/math11102304

36. *Kudryashov N.A.* Conservation laws of the complex Ginzburg-Landau equation // Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics, 2023. V. 481. 128994.

37. *Kudryashov N.A., Nifontov D.R.* Exact solutions and conservation laws of the fourth-order nonlinear Schrödinger equation for the embedded solitons // Optik, 2024. V. 303. 171752.

38. *Kudryashov N.A., Nifontov D.R.* From conservation laws of generalized Schrödinger equations to exact solutions // Journal of Optics, 2024. https://doi.org/10.1007/s12596-024-01965-0

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2024, vol. 13, no. 6, pp. 380–393

CONSERVATION LAWS, FIRST INTEGRALS AND CONSERVATIVE DENSITIES OF THE GENERALIZED NONLINEAR GERDJIKOV–IVANOV EQUATION

***D. R. Nifontov*[*], *N. A. Kudryashov*[**]**

National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia

[*]*e-mail: drnifontov@mephi.ru*
[**]*e-mail: nakudryashov@mephi.ru*

Received October 25, 2024; revised November 8, 2024; accepted November 12, 2024

The generalized Gerdjikov–Ivanov equation is considered. In recent years, this equation has been intensively studied, since this equation is used to describe pulse propagation in optical fiber. Unlike the classical Gerdjikov–Ivanov equation, the equation under study does not pass the Painlevé test and the Cauchy problem for this equation cannot be solved by the inverse scattering method. This version of the Gerdjikov –Ivanov equation has only a limited number of conservation laws. Using multipliers and direct calculations, conservation laws for the equation under consideration are constructed in this paper and two conservation laws are found without restrictions on the parameters of the equation. One more additional conservation law is found under an additional restriction on the parameters of the equation. In this paper, first integrals for ordinary differential equations are also obtained by reducing the conservation laws to the variables of a traveling wave in the generalized Gerdjikov–Ivanov equation. Analytical solutions of the equation under consideration are found. Exact solutions of the generalized Gerdjikov–Ivanov equation are presented in the form of optical solitons, as well as through the Jacobi elliptic functions. Using auxiliary integrals, conserved quantities for an optical soliton are calculated. Conservative densities correspond to physical quantities: power, momentum, and energy. The obtained conserved quantities are of practical use in numerical and neural network modeling of pulse propagation processes in optical fiber.

Keywords: Gerdjikov–Ivanov equation, conservation laws, first integrals, exact solutions, optical solitons, conservative densities.

REFERENCES

1. *Kivshar Y.S., Agrawal G.P.* Optical Solitons. From Fibers to Photonic Crystals. Academic Press, 2003.

2. *Kivshar Yu.S. and Malomed B.A.* Dynamics of solitons in nearly integrable systems. Rev. Mod. Phys., 1989. Vol. 63. Pp. 763–915.

3. *Kivshar Yu.S., Pelinovsky D. E.* Self – focusing and transversive instabilities of solitary waves. Phys. Reports, 2000. Vol. 331(4). Pp. 117–195.

4. *Hasegawa A., Tappert F.* Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion. Applied Physics Letters, 1973. Vol. 23. Pp. 142–144. DOI: 10.1063/1.1654836.

5. *Hasegawa A., Tappert F.* Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. II. Normal dispersion. Applied Physics Letters, 1973. Vol. 23. Pp. 171–172. DOI: 10.1063/1.1654847.

6. *Tai K., Hasegawa A., Tomita A.* Observation of modulational instability in optical fibers. Physical Review Letters, 1986. Vol. 56. Iss. 2. Pp. 135–138. DOI: 10.1103/PhysRevLett.56.135.

7. *Zakharov V.E., Shabat A.B.* Exact theory of two-dimensional self-focussing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. Soviet Physics JETP, 1972. Vol. 34. No. 1. Pp. 62–67.

8. *Zakharov, V.E., Shabat, A.B.* A scheme for integrating the nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem. I. Funct. Anal. Its Appl., 1974. Vol. 8. Pp. 226–235. DOI: 10.1007/BF01075696.

9. *Kudryashov N.A.* A generalized model for description of propagation pulses in optical fiber. Optik, 2019. Vol. 189. Pp. 42–52.

10. *Kutukov A.A., Kudryashov N.A.* Opticheskie solitony sistemy differencial'nyh uravnenij tipa nelinejnogo uravneniya SHryodingera s nelinejnost'yu tret'ej, pyatoj i sed'moj stepeni [Solitary Wave Solutions of the Coupled Nonlinear Schrödinger Equation with Cubic–Quintic–Septic Nonlinearity]. Vestnik NIYaU MIFI, 2020. Vol. 9. No. 5. Pp. 438–441 (in Russian). DOI: 10.1134/S2304487X20050090.

11. *Lavrova S.F., Kudryashov N.A.* Nelinejnye dinamicheskie processy, opisyvaemye sistemoj uravnenij Radh akrishnana–Kundu–Laksmanana. [Nonlinear Dynamic Processes Described by the Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanan Equations]. Vestnik NIYaU MIFI, 2020. Vol. 9. No. 1. Pp. 45–49 (in Russian). DOI: 10.1134/S2304487X20010058.

12. *Safonova D.V., Kudryashov N.A.* Tochnye resheniya differencial'nogo uravneniya chetvertogo poryadka dlya opisaniya opticheskih impul'sov [Exact Solution of Fourth Order Differential Equations for Description of Optical Pulses]. Vestnik *NIYaU* MIFI, 2020. Vol. 9. No. 5. Pp. 412 – 419 (in Russian). DOI: 10.1134/S2304487X20050120.

13. *Biswas A., Sonmezoglu. A., Ekici M., Kara A.H., Alzahrani A.K., Belic M.R.* CubicQuartic Optical Solitons and Conservation Laws with Kudryashovs Law of Refractive Index by Extended Trial Function. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2021. Vol. 61. No. 12. Pp. 1995 – 2003.

14. *Yildirim Y., Biswas A., Kara A.H., Ekici M., Zayed E.M.E., Alzahrani A.K., Belic M.R.* Optical solitons and conservation law with Kudryashovs form of arbitrary refractive index. Journal of Optics (India), 2021. Vol. 50. No. 4. Pp. 542 – 547.

15. *Kudryashov N.A., Nifontov D.R.* Conservation laws and Hamiltonians of the mathematical model with unrestricted dispersion and polynomial nonlinearity. Chaos, Solitons & Fractals, 2023, Vol. 175, 114076.

16. *Kudryashov N., Lavrova S. Nifontov D.* Analytical solutions and conservation laws of the generalized model for propagation pulses with four powers of nonlinearity. Opt. Quant. Electron, 2024. Vol. 56, 1110. DIO: 10.1007/s11082-024-06598-y.

17. *Kudryashov N.A., Kutukov A.A. Nifontov D.R.* Analytical solutions and conservation laws of the generalized nonlinear Schrödinger equation with anti-cubic and cubic-quintic-septic nonlinearities. Opt. Quant. Electron., 2024. Vol. 56, 1157. DOI: 10.1007/s11082-024-07092-1.

18. *Kudryashov N.* Traveling wave solutions of the generalized Gerdjikov-Ivanov equation. Optik, 2020. Vol. 219, 165193.

19 *Gerdjikov V.S., Ivanov M.I.* Expansions over the squared solutions and inhomgeneous nonlinear schrodinger equation. Inverse Problems, 1992. Vol. 8 (6) Pp. 831 – 847.

20. *Zahran Emad H.M., Bekir A.* New unexpected explicit optical soliton solutions to the perturbed GerdjikovIvanov equation. Journal of Optics (India), 2023. Vol. 52. No. 3. Pp. 1142 – 1147.

21 *Onder I., Secer A.,Ozisik M., Bayram M.* Investigation of optical soliton solutions for the perturbed Gerdjikov-Ivanov equation with full-nonlinearity. Heliyon, 2023. Vol. 9. Iss.2, e13519. DOI: 10.1016/j.heliyon.2023.e13519.

22. *Olver P.J.* Applications of Lie groups to differential equations. Spriner-Verlag, New York inc., 1986.

23. *Malomed B.A*. Inelastic collisions of polarized solitons in a birefringent optical fiber. Journal of the Optical Society of America B: Optical Physics, 1992. Vol. 9 (11). Pp. 2075 – 2082.

24. *Dmitriev S.V., Kevrekidis P.G., Malomed B.A., Frantzeskakis D.J.* Two-soliton collisions in a near-integrable lattice system. Physical Review E – Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics, 2003. Vol. 68. Iss. 5, 056603. DOI: 10.1103/PhysRevE.68.056603.

25. *Biswas A.* Chirp-free bright optical solitons and conservation laws for complex Ginzburg-Landau equation with three nonlinear forms. Optik, 2018. Vol. 174. Pp. 207 – 215.

26. *Biswas A., Kara A.H., Zhou Q., Alzahrani A.K., Belic M.R.* Conservation Laws for Highly Dispersive Optical Solitons in Birefringent Fibers. Regular and Chaotic Dynamics, 2020. Vol. 25. Iss. 2. Pp. 166 – 177.

27. *Kudryashov N.A., Biswas A., Kara A.H.,Yildirim Y.* Cubicquartic optical solitons and conservation laws having cubicquinticsepticnonic self-phase modulation. Optik, 2022. Vol. 269, 169834.

28. *Alshehri A.M., Alshehri H.M., Alshreef A.N., Kara A.H., Biswas A., Yildirim Y.* Conservation laws for dispersive optical solitons with Radhakrishnan – Kundu – Lakshmanan model having quadrupled power-law of self-phase modulation. Optik, 2022, Vol. 267, 169715.

29. *Zayed E.M.E., Shohib R.M.A., Alngar M.E.M., Biswas A., Kara A.H., Dakova A., Khan S., Alshehri H.M., Belic M.R*. Solitons and conservation laws in magneto-optic waveguides with generalized Kudryashov's equation by the unified auxiliary equation approach. Optik, 2021. Vol. 245, 167694.

30. *Drazin P. G., Johnson R. S.* Soliton: an introduction. Cambridge University press, 1989.

31. *Ablowitz M.J., Clarkson P.A.* Solitons, Nonlinear Equations and Inverse Scattering. Cambridge University press, 1991.

32. *Ablowitz M.J., Segur H.* Solitons and the Inverse Scattering Transform. SIAM Philadelphia, 1981.

33. *Pazarci A., Turhan U.C., Ghazanfari N., Gahramanov I.* Hamiltonian formalism for nonlinear Schrger equations. Commun Nonlinear Sci. Numer Simul., 2023. Vol. 121, 107191. DOI: 10.1016/j.cnsns.2023.107191

34. *Kudryashov N.A.* Conservation laws and Hamiltonian of the nonlinear Schrodinger equation of the fourth order with arbitrary refractive index. Optik, 2023. Vol. 286, 170993. DOI: 10.1016/j.ijleo.2023.170993.

35. *Kudryashov N.A*. Hamiltonians of the Generalized Nonlinear Schrodinger Equations. Mathematics, 2023. Vol. 11 (10), 2304. DOI: 10.3390/math11102304.

36. *Kudryashov N.A.* Conservation laws of the complex Ginzburg – Landau equation. Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics, 2023. Vol. 481, 128994.

37. *Kudryashov N.A., Nifontov D.R.* Exact solutions and conservation laws of the fourth-order nonlinear Schrödinger equation for the embedded solitons. Optik, 2024. Vol. 303, 171752.

38. *Kudryashov N.A., Nifontov D.R.* From conservation laws of generalized Schrödinger equations to exact solutions. Journal of Optics, 2024. https://doi.org/10.1007/s12596-024-01965-0.