

УДК 517.9

НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА С ДИСПЕРСИЕЙ И ПОТЕНЦИАЛОМ ОБЩЕГО ВИДА: ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ И РЕДУКЦИИ

А. Д. Полянин^{1,*}, Н. А. Кудряшов^{2,**}

¹ Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия

² Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

*e-mail: polyanin@ipmnet.ru

**e-mail: nakudr@gmail.com

Поступила в редакцию: 17.10.2024

После доработки: 30.10.2024

Принята к публикации: 12.11.2024

Исследуется нелинейное уравнение Шредингера общего вида, в котором хроматическая дисперсия и потенциал задаются двумя произвольными функциями. Рассматриваемое уравнение является естественным обобщением широкого класса родственных нелинейных уравнений, которые часто встречаются в различных разделах теоретической физики, включая нелинейную оптику, сверхпроводимость и физику плазмы. Найдены точные решения нелинейного уравнения Шредингера общего вида, которые выражаются в квадратурах. Описаны одномерные несимметричные редукции, приводящие исследуемое уравнение в частных производных к более простым обыкновенным дифференциальным уравнениям или системам таких уравнений. Специальное внимание уделено уравнениям, дисперсия которых задается степенной функцией. Полученные в данной работе точные решения могут использоваться в качестве тестовых задач, предназначенных для оценки точности численных методов интегрирования нелинейных уравнений математической физики.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шредингера, нелинейные УрЧП общего вида, нелинейная оптика, точные решения, решения в квадратурах, решения с обобщенным разделением переменных, несимметричные редукции.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.6.3

EDN OEBIJV

ВВЕДЕНИЕ

Классическое нелинейное уравнение Шредингера. Во многих разделах теоретической физики встречается классическое нелинейное уравнение Шредингера с кубической нелинейностью [1–6]:

$$iu_t + u_{xx} + k|u|^2u = 0, \quad (1)$$

где $u(x, t)$ – искомая комплекснозначная функция действительных аргументов; t – время; x – пространственная переменная; k – параметр уравнения; $i^2 = -1$.

Уравнение (1) применяется для математического моделирования распространения волн практически во всех разделах физики, где рассматриваются нелинейные волновые процессы. Теоретическое и экспериментальное обоснование использования нелинейного уравнения

Шредингера в нелинейной оптике дано в [7–10]. При описании распространения импульсов в оптическом волокне выражение со второй производной отвечает за дисперсию импульса, квадратичный множитель $k|u|^2$, называемый керровской нелинейностью, характеризует взаимодействие светового импульса с материалом волокна и определяет зависимость коэффициента преломления света в нелинейной среде. Уникальность уравнения (1) объясняется не только тем, что это уравнение является базовым уравнением для описания процессов передачи информации в оптической среде, но и тем, что оно относится к классу интегрируемых уравнений в частных производных (УрЧП) [5]. Уравнение (1) имеет бесконечное число законов сохранения, преобразования Бэклунда, и проходит тест Пенлеве [4, 5, 11–13]. Задача Коши для уравнения (1) с начальным условием общего вида решается методом обратной задачи рассеяния [4, 5]. Точ-

ные решения нелинейного уравнения Шредингера (1) приведены в [14–16].

Родственные нелинейные уравнения с частными производными вида

$$iu_t + u_{xx} + g(|u|)u = 0, \quad (2)$$

и более сложные нелинейные уравнения типа Шредингера, которые встречаются в литературе, можно найти, например, в [14–29] (см. также разд. 1 этой статьи). В нелинейной оптике потенциал $g(|u|)$ в уравнении (2) определяет закон взаимодействия светового импульса с материалом волокна.

Точные решения уравнения (2) в случае степенной зависимости $g(|u|) = k|u|^n$ рассматривались, например, в [14–16]. В теории плазмы и лазерной физике встречается уравнение (2) с $g(|u|) = k(1 - e^{a|u|})$ (см., например, [30]). Точные решения нелинейного уравнения Шредингера (2) для произвольной функции $g(|u|)$ приведены в [14, 16].

Точные решения нелинейных уравнений в частных производных (терминология). В данной статье под точными решениями уравнений в частных производных понимаются следующие решения [31]:

a) решения, которые выражаются через элементарные функции;

b) решения, которые выражаются в квадратурах, т.е. через элементарные функции, функции, входящие в уравнение (это необходимо, если уравнение содержит произвольные или специальные функции) и неопределенные интегралы;

c) решения, которые выражаются через решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) или систем таких уравнений.

Допускаются также различные комбинации решений, описанных в пп. a–c. В случаях a и b точное решение может быть представлено в явной, неявной или параметрической форме.

Важно отметить, что точные решения являются математическими эталонами, которые часто используются в качестве тестовых задач для проверки адекватности и оценки точности численных методов интегрирования нелинейных уравнений в частных производных. Наиболее предпочтительными для этих целей являются простые решения из пп. a и b. Несколько таких и более сложных точных решений описано далее в данной статье.

1. НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА ОБЩЕГО ВИДА. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ К СИСТЕМЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ УрЧП

Нелинейное уравнение Шредингера общего вида. В данной работе будем исследовать нелинейное уравнение Шредингера общего вида

$$iu_t + [f(|u|)u]_{xx} + g(|u|)u = 0, \quad (3)$$

где $u = u(x, t)$ – искомая комплекснозначная функция действительных аргументов; $f(z)$ и $g(z)$ – произвольные действительные функции (f должна быть дважды непрерывно дифференцируемой; g – непрерывной); $i^2 = -1$. Уравнение (3) с нелинейной дисперсией, которая задается функцией $f(z)$, является существенным обобщением уравнения (2), соответствующего частному случаю $f(z) = \text{const}$.

В случае степенных функций

$$f(z) = az^k, \quad g(z) = bz^m + cz^n \quad (4)$$

нелинейное уравнение Шредингера (3) рассматривалось в работе [21], где были описаны его решения типа стационарных солитонов вида $u = r(x)e^{i\varphi}$. При произвольной функции $f(|u|)$ и $g(|u|) \equiv 0$ некоторые точные решения уравнения (3) приведены в [14].

Свойство уравнения (3). Если $u(x, t)$ – решение уравнения (3), то функции

$$\bar{u} = e^{iC_1} u(\pm x + C_2, t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные действительные постоянные, также являются решениями данного уравнения. Из этого свойства следует, что уравнение (3) допускает точные решения типа бегущей волны вида $u = U(z)$, $z = x - \lambda t$, где λ – произвольная постоянная (более сложные решения, включающие решения типа бегущей волны, будут рассмотрены в конце разд. 2).

Преобразование уравнения Шредингера к системе действительных УрЧП. Представим искомую функцию в показательной форме

$$u = re^{i\varphi}, \quad r = |u|, \quad (5)$$

где $r = r(x, t) \geq 0$ и $\varphi = \varphi(x, t)$ – действительные функции.

Дифференцируя (5), находим производные:

$$\begin{aligned} u_t &= (r_t + ir\varphi_t)e^{i\varphi}, \\ [f(|u|)u]_x &= (h_x + ih\varphi_x)e^{i\varphi}, \quad h = rf(r), \\ [f(|u|)u]_{xx} &= [h_{xx} - h\varphi_x^2 + i(2h_x\varphi_x + h\varphi_{xx})]e^{i\varphi}, \\ h &= rf(r). \end{aligned} \quad (6)$$

Подставим (6) в (3) и сократим все члены на $e^{i\varphi}$. Приравняв далее к нулю действительную и мнимую части полученного соотношения, приходим к следующей системе двух действительных уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} -r\varphi_t + h_{xx} - h\varphi_x^2 + rg(r) &= 0, \\ r_t + 2h_x\varphi_x + h\varphi_{xx} &= 0, \quad h = rf(r). \end{aligned} \quad (7)$$

Система (7) вместе с выражением (5) будут использованы далее для построения точных решений нелинейного уравнения Шредингера (3).

Из каких соображений ищутся точные решения. Поиск точных решений уравнения (3) затруднен тем, что оно содержит две произвольные функции $f(z)$ и $g(z)$. Для построения точных решений этого уравнения наложим на аргумент произвольных функций одно из трех дополнительных соотношений

$$\begin{aligned} |u| &= \text{const}, & (8) \\ |u| &= p(x), & (9) \\ |u| &= g(t), & (10) \end{aligned}$$

где $p(x)$ и $g(t)$ – некоторые функции одного аргумента. При выполнении любого из соотношений (8)–(10) уравнение (3) «линеаризуется», что позволяет далее использовать стандартную процедуру разделения переменных, применяемую для линейных УрЧП [32] (или метод обобщенного разделения переменных, применяемый для нелинейных УрЧП [14, 31]). Аналогичный прием, основанный на привлечении дополнительных соотношений типа (8)–(10) и называемый методом функциональных связей, позволил найти много точных решений нелинейных УрЧП с запоздыванием [33–35].

После перехода от комплексного уравнения (3) к системе действительных УрЧП (7) при построении точных решений следует использовать соотношения (8)–(10), положив в них $|u|=r$ (это следует из представления (5)).

2. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ОБЩЕГО ВИДА

Ниже описаны точные решения нелинейного уравнения Шредингера общего вида (3), которое содержит две произвольные функции $f(z)$ и $g(z)$. Для построения этих решений, как отмечено выше, используются дополнительные соотношения (8)–(10) и методы разделения переменных.

Решения типа бегущей волны с постоянной амплитудой. Используем простейшее дополнительное соотношение (8), положив $|u|=r=C_1$. В этом случае система (7) имеет простое точное решение

$$\begin{aligned} r &= C_1, \quad \varphi = C_2x + C_3 + Bt, \\ B &= g(C_1) - C_2^2 f(C_1), \end{aligned} \quad (11)$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные действительные постоянные ($C_1 > 0$). Подставив (11) в (5), получим решение типа бегущей волны рассматриваемого нелинейного уравнения (3):

$$u = C_1 e^{i(C_2x + C_3 + Bt)}, \quad B = g(C_1) - C_2^2 f(C_1). \quad (12)$$

Это решение – периодическое по пространству и времени с постоянной амплитудой C_1 .

В случае степенных функций (4) решение (12) принимает вид

$$u = C_1 e^{i(C_2x + C_3 + Bt)}, \quad B = bC_1^m + cC_1^n - aC_1^k C_2^2.$$

Периодические по времени решения с амплитудой, зависящей от пространственной переменной. Используя дополнительное соотношение (9), можно показать, что система (7) допускает более сложное, чем (11), периодическое по времени t точное решение

$$r = r(x), \quad \varphi = C_1 t + \theta(x), \quad (13)$$

где C_1 – произвольная постоянная, а функции $r = r(x)$ и $\theta = \theta(x)$ описываются системой ОДУ

$$\begin{aligned} h_{xx} - h(\theta'_x)^2 - C_1 r + rg(r) &= 0, \quad h = rf(r), \\ 2h'_x \theta'_x + h\theta''_{xx} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Частному случаю $\theta(x) \equiv \text{const}$ в (13) соответствуют решения (5) типа стационарных солитонов, у которых фаза φ не зависит от пространственной координаты. При $\theta(x) \equiv \text{const}$ второе уравнение (14) удовлетворяется тождественно, и остается только одно первое ОДУ, в котором надо положить $\theta'_x = 0$.

В общем случае, интегрируя дважды второе уравнение (14), последовательно находим

$$\begin{aligned} \theta'_x &= C_2 h^{-2}, \\ \theta &= C_2 \int h^{-2} dx + C_3 = C_2 \int [rf(r)]^{-2} dx + C_3, \end{aligned} \quad (15)$$

где C_2, C_3 – произвольные постоянные. Подста-

НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА С ДИСПЕРСИЕЙ И ПОТЕНЦИАЛОМ ОБЩЕГО ВИДА: ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ И РЕДУКЦИИ

вив (15) в первое уравнение (14), получим нелинейное ОДУ второго порядка автономного вида

$$h''_{xx} - C_2^2 h^{-3} - C_1 r + r g(r) = 0, \quad h = r f(r). \quad (16)$$

Общее решение уравнения (16) можно представить в неявной форме (подробные пояснения даны в разд. 5):

$$\begin{aligned} \int [-C_2^2 h^{-2} + 2 \int [C_1 r - r g(r)] dh + C_4]^{-1/2} dh = \\ = C_5 \pm x, \quad (17) \\ h = r f(r), \quad dh = [f(r) + r f'_r(r)] dr, \end{aligned}$$

где C_4, C_5 – произвольные постоянные. Таким образом показано, что система (7) допускает точное решение (13), которое можно выразить в квадратурах.

В частном случае, который соответствует $\theta \equiv \text{const}$, в формулах (15) и (17) следует положить $C_2 = 0$.

Отметим, что для уравнения со степенной дисперсией $f(r) = ar^k$ функция $r = r(x)$, входящая в решение (13) системы (7), задается неявно:

$$\begin{aligned} a(k+1) \int \left[-C_2^2 a^{-2} r^{-2(k+1)} + \frac{2C_1 a(k+1)}{k+2} r^{k+2} - \right. \\ \left. - 2a(k+1) \int r^{k+1} g(r) dr + C_4 \right]^{-1/2} r^k dr = C_5 \pm x, \end{aligned}$$

а функция $\theta = \theta(r)$ определяется с помощью второго соотношения (15).

Решения с обобщенным разделением переменных, амплитуда которых зависит от времени. Используя дополнительное соотношение (10), покажем, что система (7) допускает точное решение с обобщенным разделением переменных вида

$$r = r(t), \quad \varphi = a(t)x^2 + b(t)x + c(t). \quad (18)$$

Для этого подставим (18) в (7). В результате первое уравнение системы приводится к квадратному уравнению относительно x , коэффициенты которого зависят от времени. Приравняв нулю функциональные коэффициенты этого квадратного уравнения и добавляя второе уравнение системы, которое в данном случае зависит только от t , получим следующую систему, состоящую из четырех ОДУ:

$$\begin{aligned} a'_t &= -4a^2 f(r), \\ b'_t &= -4abf(r), \\ c'_t &= -b^2 f(r) + g(r), \\ r'_t &= -2arf(r). \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь первые три уравнения были сокращены на r .

Из первого, второго и четвертого уравнения системы (19) можно получить два интеграла

$$a = C_1 r^2, \quad b = C_2 r^2, \quad (20)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Подставим первое выражение (20) в первое уравнение (19). Интегрируя полученное ОДУ, находим зависимость $r = r(t)$ в неявной форме

$$\int \frac{dr}{r^3 f(r)} = -2C_1 t - C_3, \quad (21)$$

где C_3 – произвольная постоянная. Интегрируя третье уравнение системы (19), получим

$$c = -C_2^2 \int r^4 f(r) dt + \int g(r) dt + C_4. \quad (22)$$

Для простоты полагая в (20) и (22) $C_2 = 0$ и подставляя полученные выражения в (18), находим функции, определяющие решение (5):

$$r = r(t), \quad \varphi = C_1 r^2 (x + A)^2 + \int g(r) dt + C_4, \quad (23)$$

где функция $r = r(t)$ задана неявно выражением (21). Отметим, что во вторую формулу добавлена произвольная постоянная A , поскольку система (7) инвариантна относительно произвольного постоянного сдвига по пространственной переменной.

Для уравнения (3) со степенной дисперсией $f(r) = ar^k$ в решении (23) надо положить

$$r(t) = \left[a(k+2)(2C_1 t + C_3) \right]^{-\frac{1}{k+2}}.$$

Эта формула получена из (21).

Решения, представляющие собой нелинейные суперпозиции бегущих волн. Система (7) допускает точные решения вида

$$r = r(z), \quad \varphi = C_1 t + C_2 x + \theta(z), \quad z = x - \lambda t, \quad (24)$$

где C_1, C_2, λ – произвольные постоянные, которое обобщает решение (13). Частному случаю

$C_1 = C_2 = 0$ в (24) соответствует решение типа бегущей волны.

Подставив (24) в (7), получим смешанную нелинейную систему, состоящую из двух ОДУ:

$$\begin{aligned} -r(C_1 - \lambda\theta'_z) + h''_{zz} - h(C_2 + \theta'_z)^2 + g(r)r &= 0, \\ -\lambda r'_z + 2h'_z(C_2 + \theta'_z) + h\theta''_{zz} &= 0, \quad h = rf(r). \end{aligned} \quad (25)$$

Подстановка $\xi = \theta'_z$ позволяет понизить порядок этой системы на единицу.

Замечание. Решение (24) можно получить, например, используя следующие соображения. Сначала заметим, что одну из двух произвольных постоянных C_1 или C_2 в (24) без ограничения общности можно положить равной нулю (это соответствует переопределению функции θ). После этого в уравнении (3) или системе (7) переходим от переменных x, t к новым независимым переменным z, t , где $z = x - \lambda t$. Затем по аналогии с (9) введем дополнительное соотношение $|u| = p(z)$. Далее используется процедура разделения переменных.

Опишем также другой более простой способ получения решения (24). Сначала в уравнении (3) делается замена $u = e^{i(C_1 t + C_2 x)} w$, где C_1 и C_2 – произвольные действительные постоянные. Затем ищется решение типа бегущей волны преобразованного уравнения, т. е. полагается $w = W(z)$, где $z = x - \lambda t$.

3. НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

Ниже описывается структура точных решений более общих, чем (3), родственных нелинейных уравнений, которые явно зависят от одной из независимых переменных.

1. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$i u_t + [f(|u|)u]_{xx} + (n-1)x^{-1}[f(|u|)u]_x + g(|u|)u = 0, \quad (26)$$

которое описывает радиально-симметричные решения n -мерного уравнения Шредингера общего

вида, где $x = \left(\sum_{m=1}^n x_m^2\right)^{1/2}$ – радиальная координата;

x_m – пространственные переменные. При $n=1$ уравнение (26) переходит в одномерное уравнение (3), плоским и пространственным задачам соответствуют значения $n=2$ и $n=3$.

Уравнение (26) имеет решения с обобщенным разделением переменных

$$U = r(x) \exp[iC_1 t + i\theta(x)], \quad (27)$$

где C_1 – произвольная действительная постоянная, а действительные функции $r(x)$ и $\theta(x)$ описываются соответствующей системой ОДУ, которая здесь опускается. Частному случаю $\theta(x) \equiv 0$ в (27) соответствуют стационарные солитоны.

2. Рассмотрим теперь более общее, чем (3), одномерное нелинейное уравнение Шредингера, зависящее явно от пространственной переменной x , вида

$$i u_t + [f(x, |u|)u]_{xx} + g(x, |u|)u = 0,$$

где $f(x, z)$ и $g(x, z)$ – произвольные функции двух аргументов. Это уравнение также допускает решения вида (27), где функции $r=r(x)$ и $\theta=\theta(x)$ описываются системой ОДУ, которую можно получить из (14), формально заменив в ней функции $f(r)$ и $g(r)$ на $f(x, r)$ и $g(x, r)$.

3. Приведем также другое более общее, чем (3), одномерное нелинейное уравнение Шредингера, зависящее явно от времени t , вида

$$i u_t + [f(t, |u|)u]_{xx} + g(t, |u|)u = 0,$$

где $f(t, z)$ и $g(t, z)$ – произвольные функции двух аргументов. Можно показать, что это уравнение допускает решения с обобщенным разделением переменных

$$u = r(t) \exp\left\{i\left[a(t)x^2 + b(t)x + c(t)\right]\right\},$$

где функции $r=r(t)$, $a=a(t)$, $b=b(t)$, $c=c(t)$ описываются системой ОДУ, которую можно получить из (19), формально заменив в ней функции $f(r)$ и $g(r)$ на $f(t, r)$ и $g(t, r)$.

4. РЕШЕНИЕ ОДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Рассмотрим класс автономных ОДУ второго порядка специального вида

$$h''_{xx} = \Phi(h) + \Psi(r), \quad h = \Theta(r), \quad (28)$$

где $\Phi(h)$, $\Psi(r)$, $\Theta(r)$ – заданные функции. ОДУ (16) является частным случаем уравнения (28) при

$$\begin{aligned} \Phi(h) &= C_2^2 h^{-3}, \quad \Psi(r) = C_1 r - r g(r), \\ \Theta(r) &= r f(r), \end{aligned} \quad (29)$$

При $\Psi(r) \equiv 0$ общее решение ОДУ (28) можно

НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА С ДИСПЕРСИЕЙ И ПОТЕНЦИАЛОМ ОБЩЕГО ВИДА: ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ И РЕДУКЦИИ

представить в неявной форме [36]:

$$\int \left[2 \int \Phi(h) dh + A_1 \right]^{-1/2} dh = A_2 \pm x, \quad (30)$$

$$h = \Theta(r),$$

где A_1 и A_2 – произвольные постоянные. В общем случае во втором слагаемом правой части уравнения (28) перейдем от переменной r к переменной h , положив $\Psi_1(h) = \Psi(r)$, где $h = \Theta(r)$. Имеем

$$h''_{xx} = \Phi(h) + \Psi_1(h). \quad (31)$$

Общее решение этого уравнения определяется формулой (30), в которой $\Phi(h)$ надо заменить на $\Phi(h) + \Psi_1(h)$, или

$$\int \left[2 \int \Phi(h) dh + 2 \int \Psi_1(h) dh + A_1 \right]^{-1/2} dh = A_2 \pm x, \quad (32)$$

$$h = \Theta(r),$$

Первый внутренний интеграл в (32) не меняем, а во втором внутреннем интеграле вернемся от переменной h к переменной r . Учитывая соотношения $\Psi_1(h) = \Psi(r)$ и $dh = \Theta'_r(r) dr$, в итоге получим

$$\int \left[2 \int \Phi(h) dh + 2 \int \Psi(r) \Theta'_r(r) dr + A_1 \right]^{-1/2} dh = A_2 \pm x, \quad (33)$$

$$h = \Theta(r).$$

Подставив в (33) выражения (29), находим общее решение уравнения (16):

$$\int \left[-C_2^2 h^{-2} + 2 \int [C_1 r - r g(r)] dh + A_1 \right]^{-1/2} dh = A_2 \pm x,$$

$$h = r f(r), \quad dh = [f(r) + r f'_r(r)] dr.$$

5. КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Исследуется нелинейное уравнение Шредингера общего вида, дисперсия и потенциал которых задаются двумя произвольными функциями. Найдены точные решения этого уравнения, которые выражаются в квадратурах или элементарных функциях. Описаны одномерные редукции, приводящие рассматриваемое нелинейное УрЧП к более простым системам ОДУ. Полученные решения могут использоваться в качестве тестовых задач для численных методов интегрирования нелинейных уравнений математической физики.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена по темам государственного задания (№№ госрегистрации 124012500440-9 и FSWU-2023-0031).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агравал Г.* Нелинейная волоконная оптика. М: Мир, 1996.
2. *Кившарь Ю.С., Агравал Г.* Оптические солитоны. От волоконных световодов к фотонным кристаллам. М: Физматлит, 2005.
3. *Kodama Y., Hasegawa A.* Nonlinear pulse propagation in a monomode dielectric guide // IEEE Journal of Quantum Electronics, 1987. V. 23. № 5. P. 510–524.
4. *Drazin P.G., Johnson R.S.* Solitons: An Introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
5. *Ablovitz M.J., Clarkson P.A.* Solitons Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.
6. *Kivshar Yu.S., Malomed B.A.* Dynamics of solitons in nearly integrable systems // Rev. Mod. Phys., 1989. V. 63. P. 763–915.
7. *Ахманов С.А., Сухоруков А.П., Хохлов Р.В.* Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде // Успехи физических наук, 1967. Т. 93. № 1. С. 19–70.
8. *Hasegawa A., Tappert F.* Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion // Applied Physics Letters, 1973. V. 23. № 3. P. 142–144.
9. *Hasegawa A., Tappert F.* Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. II. Normal dispersion // Applied Physics Letters, 1973. V. 23. № 4. P. 171–172.
10. *Tai K., Hasegawa A., Tomita A.* Observation of modulational instability in optical fibers // Physical Review Letters, 1986. V. 56. № 2. P. 135–138.
11. *Weiss J., Tabor M., Carnevale G.* The Painleve property for partial differential equations // J. Math. Phys., 1982. V. 24. № 3. P. 522–526.
12. *Kudryashov N.A.* Painlevé analysis of the resonant third-order nonlinear Schrödinger equation // Appl. Math. Letters, 2024. V. 158. 109232.
13. *Kudryashov N.A.* Painlevé analysis of the Sasa–Satsuma equation // Phys. Letters A, 2024. V. 525. 129900.
14. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.
15. *Al Khawaja U., Al Sakkaf L.* Handbook of Exact Solutions to the Nonlinear Schrödinger Equations. Bristol: Institute of Physics Publ., 2019.
16. *Polyanin A.D.* Handbook of Exact Solutions to Mathematical Equations. Boca Raton: CRC Press–Chapman & Hall, 2025.

17. Kudryashov N.A. A generalized model for description of propagation pulses in optical fiber // *Optik*, 2019. V. 189. № 42. 52.
18. Kudryashov N.A. Solitary and periodic waves of the hierarchy for propagation pulse in optical fiber // *Optik*, 2019. V. 194. 163060.
19. Kudryashov N.A. Mathematical model of propagation pulse in optical fiber with power nonlinearities // *Optik*, 2020. V. 212. 164750.
20. Kudryashov N.A. Solitary waves of the non-local Schrödinger equation with arbitrary refractive index // *Optik*, 2021. V. 231. 166443.
21. Kudryashov N.A. Stationary solitons of the generalized nonlinear Schrödinger equation with nonlinear dispersion and arbitrary refractive index. *Applied Mathematics Letters*, 2022, Vol. 128. 107888.
22. Kudryashov N.A. Almost general solution of the reduced higher-order nonlinear Schrödinger equation // *Optik*, 2021. V. 230. 66347.
23. Yildirim Y. Optical solitons to Schrodinger–Hirota equation in DWDM system with modified simple equation integration architecture // *Optik*, 2019. V. 182. P. 694–701.
24. Zayed E.M.E., Shohib R.M.A., Biswas A., Ekici M., Alshomrani A.S., Khan S., Zhou Q., Belic M.R. Dispersive solitons in optical fibers and DWDM networks with Schrodinger–Hirota equation // *Optik*, 2019. V. 199. 163214.
25. Zayed E.M.E., Shohib R.M.A., Alngar M.E.M., Biswas A., Moraru L., Khan S., Yildirim Y., Alshehri H.M., Belic M.R. Dispersive optical solitons with Schrodinger–Hirota model having multiplicative white noise via Ito Calculus // *Physics Letters A: General, Atomic and Solid State Physics*, 2022. V. 445. 128268.
26. Wang G., Kara A.H., Biswas A., Guggilla P., Alzahrani A.K., Belic M.R. Highly dispersive optical solitons in polarization-preserving fibers with Kerr law nonlinearity by Lie symmetry // *Physics Letters A: General, Atomic and Solid State Physics*, 2022. V. 421. 127768.
27. Biswas A., Hubert M.B., Justin M., Betchewe G., Doka S.Y., Crepin K.T., Ekici M., Zhou Q., Moshokoa S., Belic M. Chirped dispersive bright and singular optical solitons with Schrodinger–Hirota equation // *Optik*, 2018. V. 168. P. 192–195.
28. Zhou Q., Xu M., Sun Y., Zhong Y., Mirzazadeh M. Generation and transformation of dark solitons, anti-dark solitons and dark double-hump solitons // *Nonlinear Dynamics*, 2022. V. 110. № 2. P. 1747–1752.
29. Полянин А.Д., Кудряшов Н.А. Нелинейные уравнения Шредингера с запаздыванием: Точные решения, редукции и преобразования // *Вестник НИЯУ МИФИ*, 2024. Т. 13. № 5. С. 340–349.
30. Bullough R.K. Solitons // *Physics Bulletin*, 1978. V. 29. № 2. P. 78–82.
31. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear PDEs. Boca Raton–London: CRC Press, 2022.
32. Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E. Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists, 2nd ed. Boca Raton–London: CRC Press, 2016.
33. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014. V. 19. № 3. P. 417–430.
34. Polyanin A.D., Zhurov A.I. The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients // *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014. V. 67. P. 267–277.
35. Polyanin A.D., Sorokin V.G., Zhurov A.I. Delay Ordinary and Partial Differential Equations. Boca Raton–London: CRC Press, 2024.
36. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems. Boca Raton–London: CRC Press, 2018.

NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION WITH DISPERSION AND POTENTIAL OF THE GENERAL FORM: EXACT SOLUTIONS AND REDUCTIONS

A. D. Polyanin^{1,*}, N. A. Kudryashov^{2,**}

¹ *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526, Russia*

² *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409, Russia*

*e-mail: polyanin@ipmnet.ru

**e-mail: nakudr@gmail.com

Received October 17, 2024; revised October 30, 2024; accepted November 12, 2024

The nonlinear Schrödinger equation of a general form is investigated, in which the chromatic dispersion and the potential are given by two arbitrary functions. The equation under consideration is a natural generalization of a wide class of related nonlinear equations that are often encountered in various sections of theoretical physics, including nonlinear optics, superconductivity, and plasma physics. Exact solutions of the nonlinear Schrödinger equation of general form are found, which are expressed in quadratures. One-dimensional non-symmetry reductions are described, which reduce the studied partial differential equation to simpler ordinary differential equations or systems of such equations. Special attention is paid to equations whose dispersion is given by a power function. The exact solutions obtained in this work can be used as test problems intended to assess the accuracy of numerical methods for integrating nonlinear equations of mathematical physics.

Keywords: nonlinear Schrödinger equation, general nonlinear PDEs, nonlinear optics, exact solutions, solutions in quadratures, generalized separable solutions, non-symmetry reductions.

REFERENCES

1. Agrawal G.P. Nonlinear Fiber Optics, 4th ed. New York: Academic Press, 2007.
2. Kivshar Yu.S., Agrawal G.P. Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals. San Diego: Academic Press, 2003.
3. Kodama Y., Hasegawa A. Nonlinear pulse propagation in a monomode dielectric guide. IEEE Journal of Quantum Electronics, 1987. Vol. 23. No. 5. Pp. 510–524.
4. Drazin P.G., Johnson R.S. Solitons: An Introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
5. Ablowitz M.J., Clarkson P.A. Solitons Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.
6. Kivshar Yu.S., Malomed B.A. Dynamics of solitons in nearly integrable systems. Rev. Mod. Phys., 1989. Vol. 63. Pp. 763–915.
7. Akhmanov S.A., Sukhorukov A.P., Khokhlov R.V. Self-focusing and diffraction of light in a nonlinear medium. Soviet Physics Uspekhi, 1968. Vol. 10. No. 5. Pp. 609–636.
8. Hasegawa A., Tappert F. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion. Applied Physics Letters, 1973. Vol. 23. No. 3. Pp. 142–144.
9. Hasegawa A., Tappert F. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. II. Normal dispersion. Applied Physics Letters, 1973. Vol. 23. No. 4. Pp. 171–172.
10. Tai K., Hasegawa A., Tomita A. Observation of modulational instability in optical fibers. Physical Review Letters, 1986. Vol. 56. No. 2. Pp. 135–138.
11. Weiss J., Tabor M., Carnevale G. The Painleve property for partial differential equations. J. Math. Phys., 1982. Vol. 24. No. 3. Pp. 522–526.
12. Kudryashov N.A. Painlevé analysis of the resonant third-order nonlinear Schrödinger equation. Appl. Math. Letters, 2024. Vol. 158. 109232.
13. Kudryashov N.A. Painlevé analysis of the Sasa–Satsuma equation. Phys. Letters A, 2024. Vol. 525. 129900.
14. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.
15. Al Khawaja U., Al Sakkaf L. Handbook of Exact Solutions to the Nonlinear Schrödinger Equations. Bristol: Institute of Physics Publ., 2019.
16. Polyanin A.D. Handbook of Exact Solutions to Mathematical Equations. Boca Raton: CRC Press–Chapman & Hall, 2025.

17. Kudryashov N.A. A generalized model for description of propagation pulses in optical fiber. *Optik*, 2019. Vol. 189. No. 42. 52.
18. Kudryashov N.A. Solitary and periodic waves of the hierarchy for propagation pulse in optical fiber. *Optik*, 2019. Vol. 194. 163060.
19. Kudryashov N.A. Mathematical model of propagation pulse in optical fiber with power nonlinearities. *Optik*, 2020. Vol. 212. 164750.
20. Kudryashov N.A. Solitary waves of the non-local Schrödinger equation with arbitrary refractive index. *Optik*, 2021. Vol. 231. 166443.
21. Kudryashov N.A. Stationary solitons of the generalized nonlinear Schrödinger equation with nonlinear dispersion and arbitrary refractive index. *Applied Mathematics Letters*, 2022. Vol. 128. 107888.
22. Kudryashov N.A. Almost general solution of the reduced higher-order nonlinear Schrödinger equation. *Optik*, 2021. Vol. 230. 66347.
23. Yildirim Y. Optical solitons to Schrodinger–Hirota equation in DWDM system with modified simple equation integration architecture. *Optik*, 2019. Vol. 182. Pp. 694–701.
24. Zayed E.M.E., Shohib R.M.A., Biswas A., Ekici M., Alshomrani A.S., Khan S., Zhou Q., Belic M.R. Dispersive solitons in optical fibers and DWDM networks with Schrodinger–Hirota equation. *Optik*, 2019. Vol. 199. 163214.
25. Zayed E.M.E., Shohib R.M.A., Alngar M.E.M., Biswas A., Moraru L., Khan S., Yildirim Y., Alshehri H.M., Belic M.R. Dispersive optical solitons with Schrodinger–Hirota model having multiplicative white noise via Ito Calculus. *Physics Letters A: General, Atomic and Solid State Physics*, 2022. Vol. 445. 128268.
26. Wang G., Kara A.H., Biswas A., Guggilla P., Alzahrani A.K., Belic M.R. Highly dispersive optical solitons in polarization-preserving fibers with Kerr law nonlinearity by Lie symmetry. *Physics Letters A: General, Atomic and Solid State Physics*, 2022. Vol. 421. 127768.
27. Biswas A., Hubert M.B., Justin M., Betchewe G., Doka S.Y., Crepin K.T., Ekici M., Zhou Q., Moshokoa S., Belic M. Chirped dispersive bright and singular optical solitons with Schrodinger–Hirota equation. *Optik*, 2018. Vol. 168. Pp. 192–195.
28. Zhou Q., Xu M., Sun Y., Zhong Y., Mirzazadeh M. Generation and transformation of dark solitons, anti-dark solitons and dark double-hump solitons. *Nonlinear Dynamics*, 2022. Vol. 110. No. 2. Pp. 1747–1752.
29. Polyanin A.D., Kudryashov N.A. Nelineynyye uravneniya Shredingera s zapazdyvaniyem: Tochnyye resheniya, reduktsii i preobrazovaniya [Nonlinear Schrödinger equations with delay: Exact solutions, reductions, and transformations]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2024. Vol. 13. No. 5. Pp. 340–349 (in Russian).
30. Bullough R.K. Solitons, *Physics Bulletin*, 1978. Vol. 29. No. 2. Pp. 78–82.
31. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear PDEs. Boca Raton–London: CRC Press, 2022.
32. Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E. Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists, 2nd ed. Boca Raton–London: CRC Press, 2016.
33. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014. Vol. 19. No. 3. Pp. 417–430.
34. Polyanin A.D., Zhurov A.I. The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014. Vol. 67. Pp. 267–277.
35. Polyanin A.D., Sorokin V.G., Zhurov A.I. Delay Ordinary and Partial Differential Equations. Boca Raton–London: CRC Press, 2024.
36. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems. Boca Raton–London: CRC Press, 2018.