ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА «МИФИ», 2024, т. 13, № 6, с. 403–410

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 517.95, 534.1

СИММЕТРИИ И ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ МОДИФИЦИРОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ ЛИНЯ – РЕЙССНЕРА – ТЗЯНА

***А.И. Землянухин*[1,*], *А.В. Бочкарев*[1,**]**

[1]*Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Саратов, 410054, Россия*

[*]*e-mail: azemlyanukhin@mail.ru*
[**]*e-mail: ab2009sar@list.ru*

Поступила в редакцию: 29.11.2024
После доработки: 7.12.2024
Принята к публикации: 10.12.2024

В статье проведен групповой анализ нелинейных уравнений в частных производных второго порядка, моделирующих распространение сдвиговых волн в нелинейно-упругой цилиндрической оболочке, взаимодействующей с внешней упругой средой. Уравнения содержат кубическую нелинейность и обобщают известные модели Линя – Рейсснера – Тзяна и Хохлова – Заболотской. Найдены их классические симметрии с использованием универсального алгоритма коммутативной алгебры, состоящего в построении базиса Гребнера системы определяющих уравнений для нахождения явного вида производящей функции группы симметрий. Для построения решений, инвариантных относительно группы сдвигов в пространстве независимых переменных, использован метод годографа, позволивший перейти от нелинейного уравнения в частных производных к системе линейных уравнений с переменными коэффициентами. Для автомодельного режима, инвариантного относительно растяжений, получено нелинейное уравнение, линейная часть которого точно решена в терминах функций Бесселя и тригонометрических функций. Установлены условия, необходимые для физической реализуемости точных решений.

Ключевые слова: нелинейные волны, групповой анализ, базис Гребнера, инвариантные решения.

DOI: 10.26583/vestnik.2024.6.4
EDN ORVJUU

ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Линя – Рейсснера – Тзяна (ЛРТ), описывающее нестационарное околозвуковое течение газа и известное более 75 лет [1], имеет вид

$$u_{xt}+u_x u_{xx}-u_{yy}=0 \qquad (1)$$

Групповые свойства этого уравнения подробно изучены [2], широкий класс точных решений приведен в [3]. Для функции $w=-\partial u/\partial x$ уравнение ЛРТ сводится к уравнению Хохлова – Заболотской [4]

$$w_{xt}-ww_{xx}-w_x^2-w_{yy}=0. \qquad (2)$$

которое можно трактовать как бездисперсионный вариант уравнения Кадомцева – Петвиашвили.

Уравнения типа ЛРТ нередко возникают в задачах нелинейной волновой динамики деформируемых систем. Так, в [5] при моделировании распространения пучка сдвиговых волн вдоль образующей нелинейно-упругой цилиндрической оболочки, для окружной компоненты смещения было получено модифицированное уравнение ЛРТ

$$u_{xt}+u_x^2 u_{xx}+u_{yy}=0. \qquad (3)$$

Знак перед кубически нелинейным слагаемым в (3) определяется типом физической нелинейности материала, из которого изготовлена оболочка: случаю «мягкой» нелинейности соответствует минус, а «жесткой» – плюс. По аналогии с (2), для функции $w=-\partial u/\partial x$ уравнение можно называть бездисперсионным модифицированным уравнением Кадомцева – Петвиашвили.

При качественном анализе уравнений типа (3) используется экспериментально установленный для кубически нелинейных сред факт существенного преобладания эффекта самовоздействия волны над эффектом генерации высших гармоник [6]. Это позволяет представить решение в виде одной гармоники с медленно меняющейся комплексной амплитудой и получить для этой амплитуды нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) или его обобщения [7, 8]. Возможность развития модуляционной неустойчивости, приводящей к разбиению малых периодических волн на уединенные волновые пакеты, также определяется типом физической нелинейности. Мягкая нелинейность приводит к дефокусирующей версии НУШ [7], запрещающей развитие модуляционной неустойчивости, в то время как жесткая нелинейность допускает возможность устойчивого распространения солитоноподобных волновых пакетов.

При изучении нелинейной динамики реальных физических систем часто возникает необходимость учета взаимодействия деформируемой системы с внешней упругой (нелинейно-упругой) средой. Если нелинейно-упругая цилиндрическая оболочка окружена внешней упругой средой типа Винклера – Фусса [9, 10], то в уравнении (3) появляется дополнительное линейное дисперсионное слагаемое, характеризующее взаимодействие оболочки со средой:

$$u_{xt} + u_x^2 u_{xx} + u_{yy} + \delta u = 0. \tag{4}$$

Уравнение (4) можно называть бездисперсионным модифицированным уравнением Кадомцева – Петвиашвили – Островского [11] или пространственно-двумерным редуцированным уравнением Островского [12, 13]. Доминирующим фактором в (4) является кубическая нелинейность, поэтому здесь также уместен переход к НУШ. Однако, сценарии, описываемые НУШ, не единственно реализуемы, и более полный анализ волнового процесса возможен на основе использования групповых свойств уравнений (3), (4). В данной работе будут найдены группы симметрий этих уравнений и обсуждены некоторые редукции.

СИММЕТРИИ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ЛИНЯ – РЕЙССНЕРА – ТЗЯНА

Для нахождения групп симметрий нелинейных уравнений в частных производных можно использовать классический и неклассический методы [14 – 16], комбинацию неклассического метода с методом дифференциальных базисов Гребнера [17] или прямой метод Кларксона и Крускала [18]. Применительно к уравнениям (3), (4) классический метод состоит в использовании инфинитезимального критерия инвариантности [2, 15]. Нужно подействовать на уравнение дважды продолженным оператором группы симметрии и, сгруппировав члены при одинаковых степенях зависимой переменной, потребовать их одновременного обращения в нуль. В результате получим «определяющую» систему – переопределенную систему линейных уравнений в частных производных для коэффициентов искомого векторного поля. В неклассическом методе исходное уравнение в частных производных дополняется условием инвариантной поверхности, и «определяющая» система состоит из нелинейных УЧП, число которых меньше, чем в классическом случае, следовательно, множество решений в общем случае больше. Мы будем применять комбинированный подход в духе [19, 20] с использованием дифференциальных базисов Гребнера [17], представляющих собой универсальный алгоритм коммутативной алгебры.

Введем в рассмотрение дополнительный параметр ε и запишем условие на классические симметрии в виде системы уравнений:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u}_{tx} + u_{xx}u_x^2 + u_{yy} + \delta u = 0, \\ &\boldsymbol{u}_{\varepsilon} - F(t, x, y, u, u_t, u_x, u_y) = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где F – производящая функция группы симметрий [19, 20]. Далее получим соотношения на производящую функцию, а затем, построив базис Гребнера для определяющих уравнений, получим явный вид производящей функции группы симметрий. В (5) жирным выделены лидирующие производные для лексико-графического упорядочения $\varepsilon \succ t \succ x \succ y$. Для второго уравнения системы введем полные производные от F:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= F_t + F_u u_t + F_{u_t} u_{tt} + F_{u_x} u_{tx} + F_{u_y} u_{ty}, \\ \frac{dF}{dx} &= F_x + F_u u_x + F_{u_t} u_{tx} + F_{u_x} u_{xx} + F_{u_y} u_{xy}, \\ \frac{dF}{dy} &= F_y + F_u u_y + F_{u_t} u_{ty} + F_{u_x} u_{xy} + F_{u_y} u_{yy}. \end{aligned} \tag{6}$$

Условие интегрируемости (совместности) данной системы можно записать через S-полином в соответствии с выбранным лексикографическим упорядочением:

$$\left(\boldsymbol{u}_{tx}+u_{xx}u_x^2+u_{yy}+\delta u\right)_\varepsilon-\boldsymbol{u}_{\varepsilon tx}+\frac{d^2}{dtdx}F=0. \quad (7)$$

В (7), в силу правила дифференцирования Лейбница, производная по ε входит в условие интегрируемости линейно.

$$2u_{xx}u_{\varepsilon x}u_x+u_{\varepsilon xx}u_x^2+u_{\varepsilon yy}+\delta u_\varepsilon+\frac{d^2}{dtdx}F=0. \quad (8)$$

С учетом (6), заменим u_ε на F, используя выражения для полных производных от F:

$$\begin{gathered}2u_{xx}u_x\frac{d}{dx}F+u_x^2\frac{d^2}{dx^2}F+\frac{d^2}{dy^2}F+\\+\delta F+\frac{d^2}{dtdx}F=0.\end{gathered} \quad (9)$$

Применяя соотношения для полных производных (6), получим

$$\begin{gathered}F\delta+F_{tu_t}u_{tx}+F_{tu_x}u_{xx}+F_{tu_y}u_{xy}+F_{tu}u_x+F_{tx}+\\+F_{u_tu_t}u_{tt}u_{tx}+F_{u_tu_t}u_{tx}^2u_x^2+F_{u_tu_t}u_{ty}^2+F_{u_tu_x}u_{tt}u_{xx}+\\F_{u_tu_x}u_{tx}^2+2F_{u_tu_x}u_{tx}u_{xx}u_x^2+2F_{u_tu_x}u_{ty}u_{xy}+\\+F_{u_tu_y}u_{tt}u_{xy}+F_{u_tu_y}u_{tx}u_{ty}+2F_{u_tu_y}u_{tx}u_{xy}u_x^2+\\+2F_{u_tu_y}u_{ty}u_{yy}+F_{u_tx}u_{tt}+2F_{u_tx}u_{tx}u_x^2+2F_{u_tx}u_{ty}+\\+F_{u_t}u_{ttx}+F_{u_t}u_{txx}u_x^2+2F_{u_t}u_{tx}u_{xx}u_x+F_{u_t}u_{tyy}+\\+F_{u_xu_x}u_{tx}u_{xx}+F_{u_xu_x}u_{xx}^2u_x^2+F_{u_xu_x}u_{xy}^2+F_{u_xu_y}u_{tx}u_{xy}+\\+F_{u_xu_y}u_{ty}u_{xx}+2F_{u_xu_y}u_{xx}u_{xy}u_x^2+2F_{u_xu_y}u_{xy}u_{yy}+F_{u_xx}u_{tx}+\\+2F_{u_xx}u_{xx}u_x^2+2F_{u_xy}u_{xy}+F_{u_x}u_{txx}+F_{u_x}u_{xxx}u_x^2+\\+2F_{u_x}u_{xx}^2u_x+F_{u_x}u_{xyy}+F_{u_yu_y}u_{ty}u_{xy}+F_{u_yu_y}u_{xy}^2u_x^2+\\+F_{u_yu_y}u_{yy}^2+F_{u_yx}u_{ty}+2F_{u_yx}u_{xy}u_x^2+2F_{u_yy}u_{yy}+F_{u_y}u_{txy}+\\+F_{u_y}u_{xxy}u_x^2+2F_{u_y}u_{xx}u_{xy}u_x+F_{u_y}u_{yyy}+F_{uu_t}u_tu_{tx}+\\+F_{uu_t}u_xu_{tt}+2F_{uu_t}u_xu_{tx}u_x^2+2F_{uu_t}u_yu_{ty}+F_{uu_x}u_tu_{xx}+\\+F_{uu_x}u_xu_{tx}+2F_{uu_x}u_xu_{xx}u_x^2+2F_{uu_x}u_yu_{xy}+F_{uu_y}u_tu_{xy}+\\+F_{uu_y}u_xu_{ty}+2F_{uu_y}u_xu_{xy}u_x^2+2F_{uu_y}u_yu_{yy}+F_{uu}u_tu_x+\\+F_{uu}u_x^2u_x^2+F_{uu}u_y^2+F_{ux}u_t+2F_{ux}u_xu_x^2+2F_{uy}u_y+\\+2F_uu_xu_{xx}u_x+F_uu_{tx}+F_uu_{xx}u_x^2+F_uu_{yy}+F_{xx}u_x^2+\\+2F_xu_{xx}u_x+F_{yy}=0.\end{gathered} \quad (10)$$

Учитывая, согласно (4),

$$\begin{aligned}&u_{tx}=-u_{xx}u_x-u_{yy}-\delta u,\\&u_{ttx}=-u_{txx}u_x-u_{xx}\left(-u_{xx}u_x-u_{yy}\right)-u_{tyy}-\delta u_t,\\&u_{txx}=-u_{xxx}u_x-u_{xxx}u_{xx}-u_{xyy}-\delta u_x,\\&u_{txy}=-u_{xxy}u_x-u_{xxx}u_{xy}-u_{yyy}-\delta u_y,\\&\ldots\end{aligned} \quad (11)$$

и то, что F не зависит от производных выше первого порядка, получаем систему линейных уравнений для F:

$$\begin{aligned}&F\delta-F_{tu_t}\delta u+F_{tu}u_x+F_{tx}+F_{u_tu_t}\delta^2u^2u_x^2+F_{u_tu_x}\delta^2u^2-\\&-2F_{u_tx}\delta uu_x^2-F_{u_t}\delta u_t-F_{u_xx}\delta u-F_{u_x}\delta u_x-F_{u_y}\delta u_y-\\&-F_{uu_t}\delta uu_t-2F_{uu_t}\delta uu_x^3-F_{uu_x}\delta uu_x+F_{uu}u_tu_x+\\&+F_{uu}u_x^4+F_{uu}u_y^2+F_{ux}u_t+2F_{ux}u_x^3+\\&+2F_{uy}u_y-F_u\delta u+F_{xx}u_x^2+F_{yy}=0,\\&-F_{u_tu_y}\delta u+2F_{u_ty}+F_{u_yx}+2F_{uu_t}u_y+F_{uu_y}u_x=0,\\&F_{u_tu_t}=0,\\&-F_{tu_t}u_x^2+F_{tu_x}+2F_{u_tu_t}\delta uu_x^4-2F_{u_tx}u_x^4-F_{u_xu_x}\delta u+\\&+F_{u_xx}u_x^2-F_{uu_t}u_tu_x^2-2F_{uu_t}u_x^5+F_{uu_x}u_t+F_{uu_x}u_x^3+\\&+2F_uu_x^2+2F_xu_x=0,\\&-F_{u_tu_y}u_x^2+F_{u_xu_y}=0,\\&F_{u_tu_t}u_x^6-F_{u_tu_x}u_x^4=0,\\&-F_{tu_t}+2F_{u_tu_t}\delta uu_x^2+2F_{u_tu_x}\delta u-2F_{u_tx}u_x^2-F_{u_xx}+\\&+2F_{u_yy}-F_{uu_t}u_t-2F_{uu_t}u_x^3-F_{uu_x}u_x+2F_{uu_y}u_y=0,\\&F_{u_tu_t}=0,\\&2F_{u_tu_t}u_x^4-F_{u_xu_x}=0,\\&F_{u_tu_t}u_x^2+F_{u_tu_x}+F_{u_yu_y}=0,\\&F_{tu_y}-2F_{u_tu_y}\delta uu_x^2-F_{u_xu_y}\delta u+2F_{u_xy}+2F_{u_yx}u_x^2+\\&+2F_{uu_x}u_y+F_{uu_y}u_t+2F_{uu_y}u_x^3=0,\\&2F_{u_tu_x}+F_{u_yu_y}=0,\\&-2F_{u_tu_y}u_x^4+F_{u_xu_y}u_x^2=0,\\&-2F_{u_tu_y}u_x^2+F_{u_xu_y}=0,\\&F_{u_xu_x}+F_{u_yu_y}u_x^2=0,\\&-F_{u_tu_t}\delta u+F_{u_tx}+F_{uu_t}u_x=0,\\&-F_{u_tu_t}u_x^2+F_{u_tu_x}=0,\\&-F_{u_tu_t}=0,\qquad F_{u_tu_y}=0.\end{aligned} \quad (12)$$

Случай $\delta = 0$ (взаимодействие с внешней средой отсутствует)

Для системы построим базис Гребнера в лексико-графическом упорядочении с порядком переменных $t \succ x \succ y \succ u \succ u_t \succ u_x \succ u_v$:

$$\begin{aligned}
&u_x F_{yu_y} - 2F_x - u_x F_u = 0,\\
&2F_{yu_x} + F_{tu_y} = 0,\\
&F_{yu_t} = F_{yu} = F_{yy} = F_{xu_y} = F_{xu_y} = 0,\\
&u_x F_{xu_x} - F_x = 0,\\
&F_{xu_t} = F_{xu} = F_{xy} = F_{xx} = F_{tu_x} = 0,\\
&-u_x F_{tu_t} + 3F_x + 2u_x F_u = 0,\\
&F_{tu} = F_{tyu_y} = F_{tx} = F_{ttu_y} = 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Из построенного базиса Гребнера (13) видно, что F линейно зависит от u, u_t, u_x, u_y, т.е

$$\begin{aligned}
F = A(t,x,y)u_t + B(t,x,y)u_x + C(t,x,y)u_y +\\
+D(t,x,y)u + E(t,x,y).
\end{aligned} \tag{14}$$

Подставляя (14) в (13) и собирая слагаемые при u, u_t, u_x, u_y, получим систему на функции A, B, C, D, E:

$$\begin{aligned}
&2E_x = 2D_x = 2C_x = 0,\\
&2B_x - C_y + D = 0,\\
&2A_x = 0,\\
&2B_y + C_t = 0,\\
&A_y = D_y = E_{yy} = D_{yy} = C_{yy} = B_{yy} = A_{yy} = 0,\\
&C_x = -E_x = -D_x = -C_x = -A_x = A_x = D_x = 0,\\
&E_{xy} = D_{xy} = C_{xy} = B_{xy} = A_{xy} = E_{xx} = D_{xx} =\\
&= C_{xx} = B_{xx} = A_{xx} = B_t = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Для системы (15) снова строим базис Гребнера:

$$\begin{aligned}
&A_y = A_x = 0,\\
&-2A_t + 3C_y + D = 0,\\
&B_{yy} = 0,\\
&2B_x - C_y + D = 0,\\
&B_t = C_{yy} = C_x = 0,\\
&C_t + 2B_y = 0,\\
&D_y = D_x = D_t = E_{yy} = E_x = 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

Из (16) определяем функции A, B, C, D, E и получаем явный вид F:

$$\begin{aligned}
F = A_0 u_t + B_0 u_x - 2B_3 t u_y + B_3 u_x y + C_0 u_y +\\
+\frac{3C_2 t u_t}{2} + \frac{C_2 u_x x}{2} + C_2 u_y y + \frac{D_0 t u_t}{2} +\\
+D_0 u - \frac{D_0 u_x x}{2} + yE_0(t) + E_0(t),
\end{aligned} \tag{17}$$

где A_0, B_0, B_3, C_0, C_2, D_0 – произвольные постоянные, $E_0(t)$ – произвольная функция времени.

Из вида F в (17) можно записать базис алгебры Ли соответствующей группы преобразований:

$$\begin{aligned}
&X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial y},\\
&X_4 = -2t\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial x},\\
&X_5 = \frac{3t}{2}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y},\\
&X_6 = \frac{t}{2}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u},\\
&X_7 = \left(yE_0(t) + E_0(t)\right)\frac{\partial}{\partial u}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Случай $\delta \neq 0$ (учитывается взаимодействие с внешней средой)

Проводя аналогичные рассуждения и вычисления, получим группу преобразований:

$$\begin{aligned}
&X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial y},\\
&X_4 = t\frac{\partial}{\partial y} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial x},\\
&X_5 = \frac{t}{2}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u},\\
&X_6 = E(t,y)\frac{\partial}{\partial u},
\end{aligned} \tag{19}$$

где $E(t,y)$ – функция, удовлетворяющая обыкновенному дифференциальному уравнению 2 порядка $E_{yy} + \delta E = 0$.

Сравнение групп симметрий уравнений (3) и (4) позволяет сделать вывод, что учет взаимодействия с внешней упругой средой ($\delta \neq 0$) уменьшает «автомодельность» рассматриваемой системы. Так, в (18) имеются два оператора растяжений X_5, X_6, в то время как в (19) – единственный оператор X_5, совпадающий с X_6 из

(18). Видно, что разность $X_5 - X_6$ в (18) имеет вид $t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + u\frac{\partial}{\partial u}$ и характеризует подгруппу одинаковых растяжений всех независимых и зависимой переменной. Дополнительное слагаемое с коэффициентом $\delta \neq 0$ в (4) запрещает растяжение независимой переменной y. Сдвиги по независимым переменным, допустимые в обоих случаях, позволяют отыскивать инвариантные решения в виде бегущих волн.

НЕКОТОРЫЕ ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ

Во введении упоминалось о том, что уравнение (3) было выведено в [5] при моделировании распространения пучка сдвиговых волн вдоль образующей цилиндрической оболочки. В этом случае для физической состоятельности искомых компонент смещений требуются их ограниченность по обеим пространственным координатам и периодичность по окружной координате. Поскольку (3) допускает сдвиги по всем трем независимым переменным, а возмущение распространяется вдоль оси x, медленно изменяясь во времени t и по окружной координате y, введем в рассмотрение новую независимую переменную $z = x + t$ и перепишем (3) в виде

$$u_{zz} + u_z^2 u_{zz} = u_{yy}. \tag{20}$$

Обозначая $u_z = V$, можно представить (20) в виде равносильной системы уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \left(1+V^2\right)V_z = W_y, \\ V_y = W_z. \end{cases} \tag{21}$$

Применим к (21) преобразование годографа, т.е. поменяем местами независимые и зависимые переменные: $z = z(V, W)$, $y = y(V, W)$. В результате вместо (21) имеем систему линейных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} z_V = \left(1+v^2\right) y_W, \\ z_W = y_V, \end{cases} \tag{22}$$

из которой получаются линейные уравнения гиперболического типа с переменными коэффициентами

$$\begin{cases} y_{WW} = \dfrac{1}{1+V^2} y_{VV}, \\ z_{WW} = \dfrac{1}{1+V^2} z_{VV} - \dfrac{2V}{\left(1+V^2\right)^2} z_V. \end{cases} \tag{23}$$

Выбирая какое-либо частное решение $y = y_1(V, W)$ первого уравнения системы (23) и подставляя его в (22), определяем функцию $z = z_1(V, W)$, соответствующую этому частному решению. Исключая из системы равенств $y = y_1(V, W)$, $z = z_1(V, W)$ параметр W, получим решение уравнения (20) в неявной форме: $F(z, y, V) = 0$, где $V = u_z$. Например, для частного решения

$$y_1 = a_1 V W + a_2 V + a_3 W + a_4, \tag{24}$$

содержащего произвольные постоянные $a_1 - a_4$, получаем

$$z_1 = \frac{a_1}{4}V^4 + \frac{a_3}{3}V^3 + \frac{a_1}{2}\left(V^2 + W^2\right) + \\ + a_3 V + a_2 W + C, \tag{25}$$

и решение уравнения принимает вид

$$\frac{a_1}{4}V^4 + \frac{a_3}{3}V^3 + \frac{a_1}{2}V^2 + a_3 V + \frac{a_1\left(a_2 V + a_4 - y\right)^2}{2\left(a_1 V + a_3\right)^2} - \\ - \frac{a_2\left(a_2 V + a_4 - y\right)}{a_1 V + a_3} + C - z = 0. \tag{26}$$

АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

Уравнение (4), учитывающее взаимодействие цилиндрической оболочки с упругой средой, инвариантно относительно группы преобразований (19). Попробуем построить автомодельные решения (4), т.е. решения, инвариантные относительно действия оператора

$X_5 = \frac{t}{2}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u}$, и обсудить условия их физической реализуемости. Принимая в качестве инвариантов

$$\xi = xt, \;\; v = x^2 u, \tag{27}$$

преобразуем (4) к уравнению с двумя независимыми переменными – автомодельной переменной ξ и окружной пространственной координатой y:

$$\left(\xi^4 v_\xi^2 + 4\xi^3 v v_\xi + 4\xi^2 v^2 + \xi\right) v_{\xi\xi} + v_{yy} + 4\xi^3 v_\xi^3 + \\ +18\xi^2 v v_\xi^2 + \left(24\xi v^2 + 3\right) v_\xi + 8v^3 + \delta v = 0. \quad (28)$$

Учитывая малость компонент смещений срединной поверхности цилиндрической оболочки, ограничимся линейной частью (28):

$$v_{yy} + \xi v_{\xi\xi} + 3v_\xi + \delta v = 0. \quad (29)$$

Уравнение (29) имеет точное решение с разделенными переменными вида

$$v = F_1(\xi) F_2(y) \quad (30)$$

где функции $F_1(\xi)$, $F_2(y)$ удовлетворяют уравнениям

$$\xi F_1'' = CF_1 - 3F_1', \quad F_2'' = -\left(\delta + C\right) F_2 \quad (31)$$

с общими решениями

$$F_1 = \frac{1}{\xi}\left[C_1 J_2\left(2\sqrt{-C\xi}\right) + C_2 Y_2\left(2\sqrt{-C\xi}\right)\right], \\ F_2 = C_3 \cos\left(\sqrt{\delta + C}\, y\right) + C_4 \sin\left(\sqrt{\delta + C}\, y\right), \quad (32)$$

где J_2, Y_2 – функции Бесселя 1-го и 2-го рода, соответственно, C, C_1–C_4 – произвольные постоянные. Для ограниченности и периодичности по y полученных решений необходимо выполнение условий:

$$C_2 = 0, \; C < 0, \; \delta + C > 0, \; \xi > 0, \quad (33)$$

откуда получаем $\delta > 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При вычислении классических симметрий обобщенных модифицированных уравнений Линя – Рейсснера – Тзяна был применен подход, основанный на построении базисов Гребнера определяющих систем уравнений для нахождения явного вида производящих функций групп симметрий. Выбор этого подхода объясняется легкостью его алгоритмизации и личными предпочтениями авторов. Установлено, что наличие дополнительного линейного дисперсионного члена в уравнении, характеризующего влияние внешней упругой среды на волновой процесс, приводит к тому, что в группе симметрий остается единственный оператор растяжения. Получено точное решение, описывающее простейший автомодельный режим, выявлены условия физической реализуемости данного решения. Для решений, инвариантных относительно группы сдвигов независимых переменных, получено уравнение, линеаризуемое методом годографа.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-29-00071, https://rscf.ru/project/24-29-00071/.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарны профессору Ю.А. Блинкову за предоставленную возможность использования разработанных им программных модулей для построения базисов Гребнера и вычисления групп симметрий, а также – за мотивирующие обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lin C.C., Reissner E., Tsien H.S.* On two-dimensional non steady motion of a slender body in a compressible fluid // J. Math. and Phys., 1948. V. 27. № *3*. P. 220–231.

2. *Ibragimov N.H.* A practical course in differential equations and mathematical modelling. Higher Education Press and World Scientific, Beijing, Singapore, 2009.

3. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of nonlinear partial differential equations, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.

4. *Руденко О.В.* К 40-летию уравнения Хохлова – Заболотской // Акустический журнал, 2010. Т. 56(4). С. 452–462.

5. *Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V., Artamonov N.A.* Shear waves in a nonlinear elastic cylindrical shell // Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024. V. 24. Iss. 4. P. 578–586.

6. *Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Нелинейные явления при распространении упругих волн в твердых телах // Успехи физических наук, 1970. Т. 102(4). С. 549–586.

7. *Рыскин Н.М., Трубецков Д.И.* Нелинейные волны. М.: Ленанд, 2017. 312 с.

8. *Полянин А.Д., Кудряшов Н.А.* Нелинейные уравнения Шредингера с запаздыванием: точные решения, редукции и преобразования // Вестник НИЯУ МИФИ, 2024. Т. 13(5). С. 340–349.

9. *Kaplunov J., Prikazchikov D., Sultanova L.* Justification and refinement of Winkler–Fuss hypothesis // Z. Angew. Math. Phys., 2018. V. 69. P. 80.

10. *Dillard D.A., Mukherjee B., Karnal P., Batra R.C., Frechette J.* A review of Winkler's foundation and its profound influence on adhesion and soft matter applications // Soft Matter, 2018. V. 14. P. 3669–3683.

11. *Степанянц Ю.А.* Нелинейные волны во вращающемся океане (уравнение Островского, его обобщения и приложения) // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана, 2020. Т. 56(1). С. 20–42.

12. *Ostrovsky L.* Asymptotic perturbation theory of waves, London: Imperial College Press, 2014.

13. *Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V., Andrianov I.V., Erofeev V.I.* The Schamel-Ostrovsky equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells // J. Sound Vib., 2021. V. 491. 115752.

14. *Olver P.* Applications of Lie groups to differential equations. Springer: New York, NY, USA, 1993.

15. *Кудряшов Н.А.* Методы нелинейной математической физики: учебное пособие. Долгопрудный: Интеллект, 2010.

16. *Clarkson P.A., Mansfield E.L.* Algorithms for the nonclassical method of symmetry reductions // SIAM Journal on Applied Mathematics, 1994. V. 54. (6). P. *1693–1719.*

17. *Cox D., Little J., O'Shea D.* Ideals, varieties, and algorithms: An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra. N.Y.: Springer-Verlag, 1992.

18. *Clarkson P.A., Kruskal M.D.* New similarity reductions of the Boussinesq equation // Journal of Mathematical Physics, 1989. V. 30. P. 2201–2213.

19. *Krasil'shchik I.S., Lychagin V.V., Vinogradov A.M.* Introduction to the geometry of nonlinear differential equations, Adv. Stud. Contemp. Math. V. 1. New York: Gordon and Breach science publishers, 1986. 441 p.

20. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / Под ред. А.М. Виноградова, И.С. Красильщика. М.: Факториал, 1997. 461 с.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2024, vol. 13, no. 6, pp. 403–410

SYMMETRIES AND INVARIANT SOLUTIONS OF GENERALIZED MODIFIED LIN – REISSNER – TSIEN EQUATIONS

***A. I. Zemlyanukhin*[1,*]*, A. V. Bochkarev*[1,**]**

[2]*Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, 410054, Russia*

[*]*e-mail: azemlyanukhin@mail.ru*
[**]*e-mail: ab2009sar@list.ru*

Received November 29, 2024; revised December 7, 2024; accepted December 10, 2024

The article provides a group analysis of nonlinear second-order partial differential equations that model the propagation of shear waves in a nonlinear elastic cylindrical shell interacting with an external elastic medium. The equations contain cubic nonlinearity and generalize the well-known models of Lin – Reissner – Tsien and Khokhlov – Zabolotskaya. Their classical symmetries are found using a universal algorithm of commutative algebra, which consists of constructing a Gröbner basis of a system of defining equations to find the explicit form of the generating function of the symmetry group. To construct solutions that are invariant under a group of shifts in the space of independent variables, the hodograph method was used, which made it possible to move from a nonlinear partial differential equation to a system of linear equations with variable coefficients. For the self-similar regime, invariant under extensions, a nonlinear equation is obtained, the linear part of which is exactly solved in terms of Bessel functions and trigonometric functions. The conditions necessary for the physical realizability of exact solutions are established.

Keywords: nonlinear waves, group analysis, Gröbner basis, invariant solutions.

REFERENCES

1. *Lin C.C., Reissner E., Tsien H.S.* On two-dimensional non steady motion of a slender body in a compressible fluid. J. Math. and Phys. 1948. Vol. 27. No. 3. Pp. 220–231.

2. *Ibragimov N.H.* A practical course in differential equations and mathematical modelling. Higher Education Press and World Scientific, Beijing, Singapore, 2009.

3. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of nonlinear partial differential equations, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.

4. *Rudenko O.V.* K 40-letiyu uravneniya Hohlova–Zabolotskoj. [The 40th anniversary of the Khokhlov – Zabolotskaya equation]. Akusticheskij zhurnal, 2010. Vol. 56. Pp. 457–466 (in Russian).

5. *Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V., Artamonov N.A.* Shear waves in a nonlinear elastic cylindrical shell. Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024. Vol. 24. Iss. 4. Pp. 578–586.

6. *Zarembo L.K., Krasil'nikov V.A.* Nelinejnye yavleniya pri rasprostranenii uprugih voln v tverdyh telah [Nonlinear phenomena in the propagation of elastic waves in solids]. Uspekhi fizicheskih nauk, 1971. Vol. 13. Iss. 6. Pp. 778–797 (in Russian).

7. *Ryskin N.M., Trubetskov D.I.* Nelineynye volny [Nonlinear waves]. Moscow, Lenand Publ., 2017. 312 p. (in Russian).

8. *Polyanin A.D., Kudryashov N.A.* Nelineinye uravneniya Shredingera s zapazdyvaniem: tochnyie resheniya, reductsii i transformatsii [Nonlinear Schrödinger equations with delay: exact solutions, reductions, and transformations]. Vestnik NIYaU MIFI, 2024. Vol. 13(5). Pp. 340–349 (in Russian).

9. *Kaplunov J., Prikazchikov D., Sultanova L.* Justification and refinement of Winkler–Fuss hypothesis. Z. Angew. Math. Phys., 2018. Vol. 69. Pp. 80.

10. *Dillard D.A., Mukherjee B., Karnal P., Batra R.C., Frechette J.* A review of Winkler's foundation and its profound influence on adhesion and soft matter applications. Soft Matter, 2018. Vol. 14. Pp. 3669–3683.

11. *Stepanyants Y.* Nelinejnye volny vo vrashchayushchemsya okeane (uravnenie Ostrovskogo, ego obobshcheniya i prilozheniya) [Nonlinear waves in a rotating ocean (the Ostrovsky equation and its generalizations and applications)]. Izv. RAN. Fizika atmosfery i okeana, 2020. Vol. 56. Pp. 16–32 (in Russian).

12. *Ostrovsky L.* Asymptotic perturbation theory of waves, London, Imperial College Press, 2014.

13. *Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V., Andrianov I.V., Erofeev V.I.* The Schamel-Ostrovsky equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells. J. Sound Vib., 2021. Vol. 491. 115752.

14. Olver P. Applications of Lie groups to differential equations. Springer, New York, NY, USA, 1993.

15. *Kudryashov N.A.* Metody nelineinoi matematicheskoi fiziki: uchebnoye posobie [Methods of nonlinear mathematical physics: tutorial]. Dolgoprudnyi, Intellekt, 2010 (in Russian).

16. *Clarkson P.A., Mansfield E.L.* Algorithms for the nonclassical method of symmetry reductions. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1994. Vol. 54(6). Pp. 1693–1719.

17. *Cox D., Little J., O'Shea D.* Ideals, varieties, and algorithms: An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra. N.Y., Springer-Verlag, 1992.

18. *Clarkson P.A., Kruskal M.D.* New similarity reductions of the Boussinesq equation // Journal of Mathematical Physics, 1989. Vol. 30. Pp. 2201–2213.

19. *Krasil'shchik I.S., Lychagin V.V., Vinogradov A.M.* Introduction to the geometry of nonlinear differential equations, Adv. Stud. Contemp. Math. Vol. 1. New York, Gordon and Breach science publishers, 1986, 441 p.

20. Symmetries and conservation laws for differential equations of mathematical physics. ed. Krasil'shchik I.S., Vinogradov A.M. Providence, RI: Transl. Math. Monogr., 182, Amer. Math. Soc., 1999.