Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», 2025, т. 14, № 1, с. 24–36

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

https://doi.org/10.26583/vestnik.2025.1.3

Оригинальная статья / *Original paper*

УДК 517.9

Нелинейное уравнение Шредингера общего вида: многофункциональная модель, редукции и точные решения

А. Д. Полянин [1], Н. А. Кудряшов [2]

[1] Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия
[2] Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

Представлена новая математическая модель, основанная на нелинейном уравнении Шредингера с шестью произвольными функциями и позволяющая учитывать различные факторы. Эта многофункциональная модель является обобщением более простых родственных нелинейных моделей, которые часто встречаются в различных разделах теоретической физики, включая нелинейную оптику, сверхпроводимость и физику плазмы. Для анализа рассматриваемого нелинейного уравнения используется комбинация метода функциональных связей и методов обобщенного разделения переменных. Описаны одномерные несимметрийные редукции, приводящие исследуемое сложное уравнение в частных производных к более простым обыкновенным дифференциальным уравнениям или системам таких уравнений. Найден ряд точных решений нелинейного уравнения Шредингера общего вида, которые выражаются в квадратурах или элементарных функциях. Получены периодические решения как по времени, так и по пространственной переменной. Особое внимание уделено некоторым более узким классам уравнений с меньшим числом произвольных функций. Описанная общая многофункциональная модель путем конкретизации вида произвольных функций позволяет эффективно анализировать многочисленные более простые модели и находить их точные решения. Полученные в данной работе точные решения могут использоваться в качестве тестовых задач, предназначенных для проверки адекватности и оценки точности численных и приближенных аналитических методов интегрирования нелинейных уравнений математической физики.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шредингера, нелинейные УЧП общего вида, нелинейная оптика, точные решения, решения в квадратурах, решения с обобщенным разделением переменных, несимметричные редукции.

1. Введение

Классическое уравнение Шредингера и родственные уравнения

Во многих разделах теоретической физики встречаются нелинейные уравнения Шредингера вида

$$iu_t + au_{xx} + f(|u|)\,u = 0, \tag{1}$$

где $u(x, t)$ – искомая комплекснозначная функция действительных аргументов, t – время, x – пространственная переменная, a – параметр уравнения, $f(|u|)$ – функция потенциала (в нелинейной оптике эта функция определяет закон взаимодействия светового импульса с материалом волокна), i – мнимая единица ($i^2 = -1$).

Классическое нелинейное уравнение Шредингера [1–6] является важным специальным случаем уравнения (1) при $f(|u|) = k|u|^2$. Это уравнение используется для математического моделирования рас-

✉ А.Д. Полянин: polyanin@ipmnet.ru
Н.А. Кудряшов: nakudr@gmail.com

Поступила в редакцию: 5.12.2024
После доработки: 21.12.2024
Принята к публикации: 24.12.2024

EDN DXKPEC

пространения волн в нелинейной оптике, теории сверхпроводимости, физике плазмы и других разделах теоретической физики, где рассматриваются нелинейные волновые процессы. Теоретическое и экспериментальное обоснование использования классического нелинейного уравнения Шредингера в нелинейной оптике дано в [7–10]. При описании распространения импульсов в оптическом волокне выражение со второй производной отвечает за дисперсию импульса, квадратичная функция $f(|u|) = k|u|^2$, называемая керровской нелинейностью, характеризует взаимодействие светового импульса с материалом волокна и определяет зависимость коэффициента преломления света в нелинейной среде. Классическое нелинейное уравнение Шредингера, являясь базовым уравнением для нелинейной оптики, относится к классу интегрируемых уравнений в частных производных (УрЧП) [5]. Это уравнение имеет бесконечное число законов сохранения, преобразования Бэклунда и проходит тест Пенлеве [4, 5, 11–13]. Задача Коши для уравнения (1) при $f(|u|)=k|u|^2$ с начальным условием общего вида решается методом обратной задачи рассеяния [4, 5]. Точные решения классического нелинейного уравнения Шредингера (1) приведены, например, в [14–16].

Точные решения уравнения (1) в случае степенной зависимости $f(|u|) = k|u|^n$ рассматривались, например, в [14–16]. В теории плазмы и лазерной физике встречается уравнение (1) с $f(|u|) = k(1-e^{a|u|})$ (см., например, [17]). Точные решения нелинейного уравнения Шредингера (1) для произвольной функции $f(|u|)$ приведены в [14, 16].

Родственные и более сложные нелинейные уравнения типа Шредингера, которые встречаются в литературе, можно найти, например, в [14–16, 18–33].

Точные решения нелинейных уравнений в частных производных (терминология)

В данной статье под точными решениями уравнений в частных производных понимаются [34]:

a) решения, которые выражаются через элементарные функции;

b) решения, которые выражаются в квадратурах, т. е. через элементарные функции, функции, входящие в уравнение (это необходимо, если уравнение содержит произвольные или специальные функции) и неопределенные интегралы;

c) решения, которые выражаются через решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) или систем таких уравнений.

Допускаются также различные комбинации решений, описанных в пп. (*a*)–(*c*). В случаях (*a*) и (*b*) точное решение может быть представлено в явной, неявной или параметрической форме.

Важно отметить, что точные решения являются математическими эталонами, которые часто используются в качестве тестовых задач для проверки адекватности и оценки точности численных методов интегрирования нелинейных уравнений в частных производных. Наиболее предпочтительными для этих целей являются простые решения из пп. (*a*) и (*b*). Несколько таких и более сложных точных решений описано далее в данной статье.

2. Нелинейное уравнение Шредингера общего вида. Преобразование к системе действительных УРЧП

Нелинейное уравнение Шредингера общего вида

В данной работе будет исследоваться многофункциональное нелинейное уравнение Шредингера весьма общего вида

$$iu_t + [f(|u|)u]_{xx} + \frac{[g(|u|)]_{xx}}{|u|}u + h(|u|)u_x + p(|u|)u + i[q(|u|)u_x + r(|u|)u] = 0, \qquad (2)$$

где $u=u(x, t)$ – искомая комплекснозначная функция действительных аргументов, $f = f(\rho)$, $g=g(\rho)$, $h=h(\rho)$, $p=p(\rho)$, $q=q(\rho)$, $r=r(\rho)$ – произвольные действительные функции (f и g должны быть дважды непрерывно дифференцируемыми функциями, а h, p, q, r – непрерывными функциями), $i^2 = -1$.

Многофункциональное уравнение (2) является естественным обобщением многочисленных более простых родственных нелинейных уравнений (см., например, [14–16]), которые используются в различных областях теоретической физики, включая нелинейную оптику, сверхпроводимость и физику плазмы. Физический смысл мономов, входящих в уравнение (2), можно интерпретировать следующим образом. Второе слагаемое $[f(|u|)u]_{xx}$ в уравнении (2) отвечает за нелинейную дисперсию [35–37]. Третье слагаемое со второй производной $[g(|u|)]_{xx}$ обобщает широко известное резонансное выражение [38–42]. Функция $p(|u|)$ определяет потенциал. Член $q(|u|)u_x$ и остальные выражения в уравнении (2) отвечают за обострение фронта при распространении волны, которое наблюдалось в ряде экспериментов, потери при распространении волны и рассеяние за счет дифракции [43–46]. Комбинация двух последних слагаемых (с функциями q и r) в подобных уравнениях встречается в физике плазмы [14, 47].

Отметим, что уравнение (2) с двумя произвольными функциями $f=f(\rho)$ и $p=p(\rho)$ (остальные функции были равны нулю) исследовалось в [31, 32], где были получены его точные решения. Уравнение (2) при $f=\mathrm{const}$ и двумя произвольными функциями p и r (остальные функции равны нулю) рассматривалось в [14].

Свойство уравнения (2). Если $u(x, t)$ – решение уравнения (2), то функция

$$\overline{u} = e^{iC_1}u(x + C_2,\ t + C_3),$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные действительные постоянные, также является решением данного уравнения. Из этого свойства следует, что уравнение (2) допускает точные решения типа бегущей волны вида $u=U(z)$, $z=x-\lambda t$, где λ – произвольная постоянная (более сложные решения, включающие решения типа бегущей волны, будут рассмотрены в конце разд. 4).

Преобразование уравнения Шредингера к системе действительных УрЧП

Представим искомую функцию в показательной форме

$$u = \rho e^{i\varphi}, \quad \rho = |u|, \tag{3}$$

где $\rho=\rho(x, t)\ge 0$ и $\varphi=\varphi(x, t)$ – действительные функции.

Дифференцируя (3), находим производные:

$$\begin{gathered} u_t = (\rho_t + i\rho\varphi_t)e^{i\varphi}, \quad u_x = (\rho_x + i\rho\varphi_x)e^{i\varphi}, \\ [f(|u|)]_x = (F_x + iF\varphi_x)e^{i\varphi}, \quad F = \rho f(\rho), \\ [f(|u|u]_{xx} = [F_{xx} - F\varphi_x^2 + i(2F_x\varphi_x + F\varphi_{xx})]e^{i\varphi}, \quad F = \rho f(\rho), \\ [g(|u|)_{xx} = [g(\rho)]_{xx}. \end{gathered} \tag{4}$$

Подставим (4) в (2), а затем разделим все члены на $e^{i\varphi}$. Приравнивая далее к нулю действительную и мнимую части полученного соотношения, приходим к следующей системе двух действительных уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} &-\rho\varphi_t + F_{xx} - F\varphi_x^2 + [g(\rho)]_{xx} + h(\rho)\rho_x + \rho p(\rho) - \rho q(\rho)\varphi_x = 0, \\ &\rho_t + 2F_x\varphi_x + F\varphi_{xx} + \rho h(\rho)\varphi_x + q(\rho)\rho_x + \rho r(\rho) = 0, \quad F = \rho f(\rho). \end{aligned} \tag{5}$$

Система (5) вместе с выражением (3) будут использованы далее для построения точных решений нелинейного уравнения Шредингера (2).

3. Метод функциональных связей

Поиск точных решений уравнения (2) затруднен тем, что оно содержит шесть произвольных функций: $f=f(\rho)$, $g=g(\rho)$, $h=h(\rho)$, $p=p(\rho)$, $q=q(\rho)$, $r=r(\rho)$. Для построения точных решений этого уравнения наложим на аргумент произвольных функций одно из четырех дополнительных соотношений:

$$|u| = \mathrm{const}, \tag{6}$$

$$|u| = \xi(x), \tag{7}$$

$$|u| = \eta(t), \tag{8}$$

$$|u| = \zeta(z), \qquad z = kx - \lambda t, \tag{9}$$

где $\xi(x)$, $\eta(t)$, $\zeta(z)$ – некоторые функции одного аргумента, z – переменная типа бегущей волны. При выполнении любого из первых трех соотношений (6)–(8) уравнение (2) «линеаризуется», что позволяет далее использовать стандартную процедуру разделения переменных, применяемую для линейных УрЧП [101] (или метод обобщенного разделения переменных, применяемый для нелинейных УрЧП [14, 34]). Аналогичный прием, основанный на привлечении дополнительных соотношений типа (6)–(8) и называемый *методом функциональных связей*, позволил найти много точных решений нелинейных УрЧП с запаздыванием [49–51]. Последнее соотношение (9) возникает в результате перехода от исходных переменных x, t к новым переменным z, t.

После перехода от комплексного уравнения (2) к системе действительных УрЧП (5) при построении точных решений следует использовать соотношения (6)–(8), положив в них $|u|=\rho$ (это следуют из представления (3)).

4. Точные решения нелинейного уравнения Шредингера общего вида

Ниже описаны точные решения нелинейного уравнения Шредингера общего вида (2), которое содержит шесть произвольных функций: $f=f(\rho)$, $g=g(\rho)$, $h=h(\rho)$, $p=p(\rho)$, $q=q(\rho)$, $r=r(\rho)$ (рассматриваются также частные случаи, когда некоторые из этих функций специальным образом задаются). Для построения этих решений, как отмечено выше, используются дополнительные функциональные связи (6)–(9) и методы разделения переменных.

Замечание 1. Для построения точных решений нелинейного уравнения в частных производных (2) можно использовать также принцип структурной аналогии решений, который формулируется следующим образом: точные решения более простых уравнений могут служить основой для построения решений более сложных родственных уравнений (см., например, [51, 52]). А именно, в данном случае для построения точных решений уравнения (2) можно взять за основу структуру известных точных решений более простого родственного уравнения с одной произвольной функцией (1) (эти вспомогательные точные решения приведены, например, в [14, 16]).

Решения типа бегущей волны с постоянной амплитудой

Используем простейшее дополнительное соотношение (6), положив $|u|=\rho=C_1$. В этом случае система (5) имеет простое точное решение

$$\rho=C_1, \quad \varphi=Ax+Bt+C_2, \tag{10}$$

где C_1, C_2 – произвольные действительные постоянные ($C_1>0$), а константы A и B определяются по формулам

$$A=-\frac{r(C_1)}{h(C_1)}, \quad B=p(C_1)-A^2f(C_1)-Aq(C_1). \tag{11}$$

Здесь считается, что $h(C_1)\neq 0$.

В специальном случае, когда $h(\rho)=r(\rho)\equiv 0$, система (5) также допускает точное решение вида (10), где A – произвольная постоянная, а B находится с помощью второй формулы (11).

Подставив (10) в (3), получим решение типа бегущей волны рассматриваемого нелинейного уравнения (2):

$$\begin{gathered} u = C_1 e^{i(Ax+Bt+C_2)}, \\ B = p(C_1) - A^2 f(C_1) - Aq(C_1), \end{gathered} \tag{12}$$

где константа A определяется по первой формуле (11) (если $h(C_1)\neq 0$) или A – произвольная действительная постоянная (если $h(C_1)=r(C_1)\equiv 0$). Решение (12) является периодическим по пространству и времени с постоянной амплитудой C_1. Отметим, что третье слагаемое в уравнении (2) на этом решении обращается в нуль.

Периодические по времени решения с амплитудой, зависящей от пространственной переменной

Используя дополнительное соотношение (7), можно показать, что система (5) допускает более сложное, чем (10), периодическое по времени t точное решение

$$\rho = \rho(x), \quad \varphi = C_1 t + \theta(x), \tag{13}$$

где C_1 – произвольная постоянная, а функции $\rho=\rho(x)$ и $\theta=\theta(x)$ описываются системой ОДУ

$$\begin{gathered} F''_{xx} + [g(\rho)]''_{xx} - F(\theta'_x)^2 + h(\rho)\rho'_x - \rho q(\rho)\theta'_x + \rho p(\rho) - C_1\rho = 0, \\ F\theta''_{xx} + 2F'_x\theta'_x + \rho h(\rho)\theta'_x + q(\rho)\rho'_x + \rho r(\rho) = 0, \quad F = \rho f(\rho). \end{gathered} \tag{14}$$

В общем случае подстановка $\xi = \theta'_z$ позволяет понизить порядок этой системы на единицу.

Пусть $h(\rho)=r(\rho)\equiv 0$. В этом частном случае второе уравнение (14) допускает первый интеграл

$$F^2\theta'_x + \int q(\rho)F\,d\rho = C_2, \tag{15}$$

где C_2 – произвольная постоянная. Исключив θ'_x из первого уравнения (14) с помощью (15), можно получить одно ОДУ для функции $\rho = \rho(x)$. В частности, при $C_2 = 0$ это уравнение записывается так:

$$\begin{gathered} [F + g(\rho)]''_{xx} - F^{-3}I^2 + \rho q(\rho)F^{-2}I + \rho p(\rho) - C_1\rho = 0, \\ F = \rho f(\rho), \quad I = \int q(\rho)F\,d\rho. \end{gathered} \tag{16}$$

Для дальнейшего анализа нелинейное ОДУ второго порядка (16) удобно представить в компактной форме

$$[\Phi(\rho)]''_{xx} = \Psi(\rho), \tag{17}$$

где использованы обозначения

$$\Phi(\rho) = F + g(\rho), \quad \Psi(\rho) = F^{-3}I^2 - \rho q(\rho)F^{-2}I - \rho p(\rho) + C_1\rho. \tag{18}$$

Нетрудно проверить, что уравнение (17) допускает первый интеграл

$$[\Phi'_\rho(\rho)\rho'_x]^2 = 2\int \Psi(\rho)\Phi'_\rho(\rho)\,d\rho + C_3, \tag{19}$$

который после разрешения относительно производной ρ'_x приводится к ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными. Интегрируя это уравнение, получим общее решение уравнения (17) в неявном виде:

$$\int \Phi'_\rho(\rho)[2\int \Psi(\rho)\Phi'_\rho(\rho)d\rho + C_3]^{-1/2} d\rho = C_4 \pm x, \tag{20}$$

где C_3 и C_4 – произвольные постоянные.

Подставив в (20) функции $\Phi(\rho)$ и $\Psi(\rho)$, которые определены в (18), можно найти общее решение нелинейного ОДУ второго порядка (16).

Решения с обобщенным разделением переменных, амплитуда которых зависит от времени

1. *Общий случай.* Используя дополнительное соотношение (8), можно показать, что в общем случае система (5) допускает периодическое по пространственной координате x точное решение с обобщенным разделением переменных вида

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = C_1 x + a(t), \tag{21}$$

где C_1 – произвольная постоянная, а функции $\rho = \rho(t)$ и $a = a(t)$ описываются системой автономных ОДУ первого порядка

$$\begin{aligned} &a'_t + C_1^2 f(\rho) - p(\rho) + C_1 q(\rho) = 0, \\ &\rho'_t + C_1 \rho h(\rho) + \rho r(\rho) = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Поскольку второе уравнение системы (22) является изолированным (т. е. оно не зависит от первого уравнения), общее решение этой системы удается выразить в квадратурах

$$\begin{aligned} &\int \frac{d\rho}{\rho[C_1 h(\rho) + r(\rho)]} = C_2 - t, \\ &a(t) = \int [p(\rho) - C_1^2 f(\rho) - C_1 q(\rho)]dt + C_3, \end{aligned} \tag{23}$$

где функция $\rho = \rho(t)$ задана в неявном виде, а C_2 и C_3 – произвольные постоянные.

Отметим, что третье слагаемое в уравнении (2) на решении (3) с функциями (21) обращается в нуль.

2. *Специальный случай* $h(\rho) \equiv 0$. Используя дополнительное соотношение (8), покажем, что система (5) при $h(\rho) \equiv 0$ допускает точное решение с обобщенным разделением переменных вида

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = a(t)x^2 + b(t)x + c(t). \tag{24}$$

Для этого подставим (24) в (5). В результате первое уравнение системы приводится к квадратному уравнению относительно x, коэффициенты которого зависят от времени. Приравнивая нулю функциональные коэффициенты этого квадратного уравнения и добавляя второе уравнение системы, которое в данном случае зависит только от t, получим следующую систему, состоящую из четырех ОДУ автономного вида:

$$\begin{aligned} &a'_t = -4a^2 f(\rho), \\ &b'_t = -4abf(\rho) - 2aq(\rho), \\ &c'_t = -b^2 f(\rho) - bq(\rho) + p(\rho), \\ &\rho'_t = -2a\rho f(\rho) - \rho r(\rho). \end{aligned} \tag{25}$$

Здесь первые три уравнения были сокращены на ρ.

Отметим, что третье слагаемое в уравнении (2) на решении (3) с функциями (24) обращается в нуль.

Первое и последнее уравнения системы (25) образуют независимую подсистему уравнений. Исключив из этих двух уравнений t, можно получить одно нелинейное ОДУ первого порядка, которое является уравнением Абеля второго рода относительно искомой функции $a=a(\rho)$. Большой список разрешимых ОДУ этого вида можно найти в справочнике [53].

Рассмотрим подробнее частный случай $r(\rho)\equiv 0$. Из первого и четвертого уравнения системы (25) при $r(\rho)\equiv 0$ получим интеграл

$$a=C_1\rho^2, \tag{26}$$

где C_1 – произвольная постоянная. Подставим выражение (26) в первое уравнение (25). Интегрируя полученное ОДУ, находим зависимость $\rho=\rho(t)$ в неявной форме

$$\int\frac{d\rho}{\rho^3 f(\rho)}=-2C_1t-C_2, \tag{27}$$

где C_2 – произвольная постоянная. Второе ОДУ системы (25) является линейным относительно b, а третье ОДУ – линейным относительно c. Последовательно интегрируя эти уравнения, имеем

$$\begin{aligned}&b=C_3E(t)-2E(t)\int\frac{aq(\rho)}{E(t)}dt, \quad E(t)=\exp\Bigl(-4\int af(\rho)dt\Bigr);\\ &c=\int\bigl[p(\rho)-b^2f(\rho)-bq(\rho)\bigr]dt+C_4,\end{aligned} \tag{28}$$

где C_3 и C_4 – произвольные постоянные, а функции $a = a(t)$ и $\rho = \rho(t)$ определяются по формулам (26) и (27).

Решения, представляющие собой нелинейные суперпозиции бегущих волн

Система (5) допускает точные решения вида

$$\rho=\rho(z), \quad \varphi=C_1t+C_2x+\theta(z), \quad z=x-\lambda t, \tag{29}$$

где C_1, C_2, λ – произвольные постоянные, которые обобщает решение (13). Частному случаю $C_1=C_2=0$ в (29) соответствует решение типа бегущей волны.

Подставив (29) в (5), получим нелинейную систему, состоящую из двух ОДУ:

$$\begin{aligned}&-\rho(C_1-\lambda\theta'_z)+F''_{zz}-F(C_2+\theta'_z)^2+[g(\rho)]''_{zz}+h(\rho)\rho'_z+\rho p(\rho)-\rho q(\rho)(C_2+\theta'_z)=0,\\ &-\lambda\rho'_z+2F'_z(C_2+\theta'_z)+F\theta''_{zz}+\rho h(\rho)(C_2+\theta'_z)+q(\rho)\rho'_z+\rho r(\rho)=0, \quad F=\rho f(\rho).\end{aligned} \tag{30}$$

Подстановка $\xi=\theta'_z$ позволяет понизить порядок системы ОДУ (30) на единицу.

Пусть $h(\rho)=r(\rho)\equiv 0$. В этом частном случае второе уравнение (30) допускает первый интеграл

$$F^2\theta'_z+C_2F^2+\int F[q(\rho)-\lambda]d\rho=C_3, \tag{31}$$

где C_3 – произвольная постоянная. Исключив θ'_z из первого уравнения (30) с помощью (31), можно получить одно нелинейное ОДУ для функции $\rho = \rho(z)$. Это уравнение с точностью до переобозначений независимой переменной и определяющих функций $\Phi(\rho)$ и $\Psi(\rho)$ совпадает с уравнением (17). Поэтому его общее решение можно выразить в квадратурах в неявной форме.

Замечание 2. Для физической интерпретации решения (29) удобно представить фазу φ в эквивалентной форме двумя различными способами:

$$\varphi = C_2(x - \lambda_2 t) + \theta(x - \lambda_1 t), \quad \lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = -C_1 / C_2; \tag{32}$$

$$\varphi = (C_2 + C_1\lambda^{-1})x + \theta_1(x - \lambda t), \quad \theta_1(z) = \theta(z) - C_1\lambda^{-1}z. \tag{33}$$

В первом случае (32) решение (29) можно интерпретировать как нелинейную суперпозицию двух бегущих волн со скоростями λ_1 и λ_2, а во втором случае (33) – как нелинейную суперпозицию стоячей волны и бегущей волны со скоростью λ.

5. Краткие выводы

Исследуется нелинейное уравнение Шредингера общего вида, которое задается шестью произвольными функциями. Описаны одномерные редукции, приводящие рассматриваемое многофункциональное нелинейное УрЧП к более простым системам ОДУ. Найден ряд точных решений, которые выражаются в квадратурах или элементарных функциях. Построены некоторые периодические решения по времени и по пространственной переменной. Полученные решения могут использоваться в качестве тестовых задач, предназначенных для оценки точности численных и приближенных аналитических методов интегрирования нелинейных уравнений математической физики.

Финансирование

Работа выполнена по темам государственного задания (№№ госрегистрации 124012500440-9 и FSWU-2023-0031).

Вклад авторов

Полянин А.Д. – разработка математической модели, построение точных решений, подготовка текста статьи, обсуждение результатов.

Кудряшов Н.А. – разработка математической модели, построение точных решений, подготовка текста статьи, обсуждение результатов.

Конфликт интересов

Конфликт интересов отсутствует.

Список литературы

1. *Агравал Г.* Нелинейная волоконная оптика. М: Мир, 1996.

2. *Кившарь Ю.С., Агравал Г.* Оптические солитоны. От волоконных световодов к фотонным кристаллам. М: Физматлит, 2005.

3. *Kodama Y., Hasegawa A.* Nonlinear pulse propagation in a monomode dielectric guide // IEEE Journal of Quantum Electronics, 1987. V. 23. № 5. P. 510–524.

4. *Drazin P.G., Johnson R.S.* Solitons: An Introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

5. *Ablowitz M.J., Clarkson P.A.* Solitons Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

6. *Kivshar Yu.S., Malomed B.A.* Dynamics of solitons in nearly integrable systems // Rev. Mod. Phys., 1989. V. 63. P. 763–915.

7. *Ахманов С.А., Сухоруков А.П., Хохлов Р.В.* Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде // Успехи физических наук, 1967. Т. 93. № 1. С. 19–70.

8. *Hasegawa A., Tappert F.* Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion // Applied Physics Letters, 1973. V. 23. № 3. P. 142–144.

9. *Hasegawa A., Tappert F.* Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. II. Normal dispersion // Applied Physics Letters, 1973. V. 23. № 4. P. 171–172.

10. *Tai K., Hasegawa A., Tomita A.* Observation of modulational instability in optical fibers // Physical Review Letters, 1986. V. 56. № 2. P. 135–138.

11. *Weiss J., Tabor M., Carnevale G.* The Painleve property for partial differential equations // J. Math. Phys., 1982. V. 24. № 3. P. 522–526.

12. *Kudryashov N.A.* Painlevé analysis of the resonant third-order nonlinear Schrödinger equation // Appl. Math. Letters, 2024. V. 158. 109232.

13. *Kudryashov N.A.* Painlevé analysis of the Sasa–Satsuma equation // Phys. Letters A, 2024. V. 525. 129900.

14. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.

15. *Al Khawaja U., Al Sakkaf L.* Handbook of Exact Solutions to the Nonlinear Schrödinger Equations. Bristol: Institute of Physics Publ., 2019.

16. *Polyanin A.D.* Handbook of Exact Solutions to Mathematical Equations. Boca Raton: CRC Press–Chapman & Hall, 2025.

17. *Bullough R.K.* Solitons // Physics Bulletin, 1978. V. 29. № 2. P. 78–82.

18. *Kudryashov N.A.* A generalized model for description of propagation pulses in optical fiber // Optik, 2019. V. 189. P. 42–52.

19. *Kudryashov N.A.* Solitary and periodic waves of the hierarchy for propagation pulse in optical fiber // Optik, 2019. V. 194. 163060.

20. *Kudryashov N.A.* Mathematical model of propagation pulse in optical fiber with power nonlinearities // Optik, 2020. V. 212. 164750.

21. *Kudryashov N.A.* Solitary waves of the non-local Schrödinger equation with arbitrary refractive index // Optik, 2021. V. 231. 166443.

22. *Kudryashov N.A.* Stationary solitons of the generalized nonlinear Schrödinger equation with nonlinear dispersion and arbitrary refractive insex // Applied Mathematics Letters, 2022, Vol. 128. 107888.

23. *Kudryashov N.A.* Almost general solution of the reduced higher-order nonlinear Schrödinger equation // Optik, 2021. V. 230. 66347.

24. *Yildirim Y.* Optical solitons to Schrodinger-Hirota equation in DWDM system with modified simple equation integration architecture // Optik, 2019. V. 182. P. 694–701.

25. *Zayed E.M.E., Shohib R.M.A., Biswas A., Ekici M., Alshomrani A.S., Khan S., Zhou Q., Belic M.R.* Dispersive solitons in optical fibers and DWDM networks with Schrodinger–Hirota equation // Optik, 2019. V. 199. 163214.

26. *Zayed E.M.E., Shohib R.M.A., Alngar M.E.M., Biswas A., Moraru L., Khan S., Yildirim Y., Alshehri H.M., Belic M.R.* Dispersive optical solitons with Schrodinger-Hirota model having multiplicative white noise via Ito Calculus // Physics Letters A: General, Atomic and Solid State Physics, 2022. V. 445. 128268.

27. *Wang G., Kara A.H., Biswas A., Guggilla P., Alzahrani A.K., Belic M.R.* Highly dispersive optical solitons in polarization-preserving fibers with Kerr law nonlinearity by Lie symmetry // Physics Letters A: General, Atomic and Solid State Physics, 2022. V. 421. 127768.

28. *Biswas A., Hubert M.B., Justin M., Betchewe G., Doka S.Y., Crepin K.T., Ekici M., Zhou Q., Moshokoa S., Belic M.* Chirped dispersive bright and singular optical solitons with Schrodinger–Hirota equation // Optik, 2018. V. 168. P. 192–195.

29. *Zhou Q., Xu M., Sun Y., Zhong Y., Mirzazadeh M.* Generation and transformation of dark solitons, anti-dark solitons and dark double-hump solitons // Nonlinear Dynamics, 2022. V. 110. № 2. P. 1747–1752.

30. *Полянин А.Д., Кудряшов Н.А.* Нелинейные уравнения Шредингера с запаздыванием: Точные решения, редукции и преобразования // Вестник НИЯУ МИФИ, 2024. Т. 13. № 5. С. 340–349.

31. *Полянин А.Д., Кудряшов Н.А.* Нелинейное уравнение Шредингера с дисперсией и потенциалом общего вида: Точные решения и редукции // Вестник НИЯУ МИФИ, 2024. Т. 13. № 6. С. 394–402.

32. *Polyanin A.D., Kudryashov N.A.* Closed-form solutions of the nonlinear Schrödinger equation with arbitrary dispersion and potential // Chaos, Solitons & Fractals, 2025. V. 191. 115822.

33. *Polyanin A.D., Kudryashov N.A.* Nonlinear Schrödinger equations with delay: Closed-form and generalized separable solutions // Contemporary Mathematics, 2024. V. 5. № 4. 5420245840.

34. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear PDEs. Boca Raton–London: CRC Press, 2022.

35. *Michalska M., Klein M., Dlubek M.* Dissipative soliton resonance in a normal dispersion all-polarization-maintaining thulium-doped fiber laser // Optics & Laser Technology, 2025. V. 181(B). 111895.

36. *Saleem Q.M., Ebrahium M.M., Aly K.A., Saddeek Y.B.* Optical properties of transition metals complex films derived from hydrazone oxime for optoelectronic devices // Journal of Molecular Structure, 2025. V. 1321. № 5. 140196.

37. *Choi M.-R., Hong Y., Lee Y.-R.*. Global existence versus finite time blowup dichotomy for the dispersion managed NLS // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, 2025. V. 251. 113696.

38. *Pashaev O.K., Lee J.H.* Black holes and solutions of the quantized dispersionless NLS and DNLS equations // ANZIAM J., 2002. V. 44. № 1. P. 73–81.

39. *Lee J.-H., Pashaev O.K., Rogers C., Schief W.K.* The resonant nonlinear Schrodinger equation in cold plasma physics. Application of Backlund–Darboux transformations and superposition principles // Journal of Plasma Physics, 2007. V. 73. № 2. P. 257–272.

40. *Lee J.-H., Pashaev O.K.* Solitons of the resonant nonlinear Schrodinger equation with nontrivial boundary conditions: Hirota bilinear method // Theoretical and Mathematical Physics, 2007. V. 152. № 1. P. 991–1003.

41. *Tala-Tebue E., Seadawy A.R.* Construction of dispersive optical solutions of the resonant nonlinear Schrodinger equation using two different methods // Modern Physics Letters B, 2018. V. 32. № 33. 1850407.

42. *Zhou Q., Wei C., Zhang H., Lu J., Yu H., Yao P., Zhu Q.* Exact solutions to the resonant nonlinear Schrodinger equation with both spatio-temporal and inter-modal dispersions // Proc. Romanian Academy, Ser. A, 2016. V. 17. № 4. P. 307–313.

43. *Eldidamony H.A., Arnous A.H., Nofal T.A., Yildirim Y.* Optical soliton solutions in birefringent fibers with multiplicative white noise: an analysis for the perturbed Chen–Lee–Liu model // Nonlinear Dynamics, 2024. V. 112. № 24. P. 22295–22322.

44. *Eslami M., Sharif A.* Extended hyperbolic method to the perturbed nonlinear Chen–Lee–Liu equation with conformable derivative // Partial Differential Equations in Applied Mathematics, 2024. V. 11. 100838.

45. *Lu W., Ahmad J., Akram S., Aldwoah K.A.* Soliton solutions and sensitive analysis to nonlinear wave model arising in optics // Physica Scripta, 2024. V. 99. № 8. 085230.

46. *Althrwi F.A., Alshaery A.A., Bakodah H.O., Nuruddeen R.I.* Supplementary optical solitonic expressions for Gerdjikov-Ivanov equations with three Kudryashov-based methods // Communications in Theoretical Physics, 2024. V. 76. № 12. 125001.

47. *Calogero F., Degasperis A.* Spectral Transform and Solitons: Tools to Solve and Investigate Nonlinear Evolution Equations. Amsterdam, North Holland Publ., 1982.

48. *Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E.* Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists, 2nd ed. Boca Raton–London: CRC Press, 2016.

49. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2014. V. 19. № 3. P. 417–430.

50. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients // Int. J. Non-Linear Mech., 2014. V. 67. P. 267–277.

51. *Polyanin A.D., Sorokin V.G., Zhurov A.I.* Delay Ordinary and Partial Differential Equations. Boca Raton–London: CRC Press, 2024.

52. *Aksenov A.V., Polyanin A.D.* Methods for constructing complex solutions of nonlinear PDEs using simpler solutions // Mathematics, 2021. V. 9. № 4. 345.

53. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems. Boca Raton–London: CRC Press, 2018.

Vestnik Natsional’nogo Issledovatel’skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2025, vol. 14, no. 1, pp. 24–36

Nonlinear Schrödinger equation of general form: multifunctional model, reductions and exact solutions

A. D. Polyanin [1,✉], **N. A. Kudryashov** [2,✉]

1 Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526, Russia
2 National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409, Russia
✉ polyanin@ipmnet.ru
✉ nakudr@gmail.com

Received December 5, 2024; revised December 21, 2024; accepted December 24, 2024

A new mathematical model based on the nonlinear Schrödinger equation with six arbitrary functions and allowing for various factors is presented. This multifunctional model is a broad generalization of numerous simpler related nonlinear models that are commonly encountered in various areas of theoretical physics, including nonlinear optics, superconductivity, and plasma physics. To analyze the nonlinear equation under consideration, a combination of the method of functional constraints and methods of generalized separation of variables is used. One-dimensional non-symmetry reductions are described, which lead the studied complex partial differential equation to simpler ordinary differential equations or systems of such equations. A number of exact solutions of the nonlinear Schrödinger equation of general form have been found, which are expressed in quadratures or elementary functions. Both periodic solutions in time and in spatial variable are obtained. Special attention is paid to some narrower classes of nonlinear PDEs with a smaller number of arbitrary functions. The described general multifunctional model allows one to effectively analyze numerous simpler models by specifying a specific particular forms of arbitrary functions. The exact solutions obtained in this work can be used as test problems intended to check the adequacy and assess the accuracy of numerical and approximate analytical methods for integrating nonlinear equations of mathematical physics.

Keywords: nonlinear Schrödinger equation, general nonlinear PDEs, nonlinear optics, exact solutions, solutions in quadratures, generalized separable solutions, non-symmetry reductions.

References

1. *Agrawal G.P.* Nonlinear Fiber Optics, 4th ed. New York: Academic Press, 2007.

2. *Kivshar Yu.S., Agrawal G.P.* Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals. San Diego: Academic Press, 2003.

3. *Kodama Y., Hasegawa A.* Nonlinear pulse propagation in a monomode dielectric guide. IEEE Journal of Quantum Electronics, 1987, vol. 23, no. 5, pp. 510–524.

4. *Drazin P.G., Johnson R.S.* Solitons: An Introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

5. *Ablowitz M.J., Clarkson P.A.* Solitons Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

6. *Kivshar Yu.S., Malomed B.A.* Dynamics of solitons in nearly integrable systems. Rev. Mod. Phys., 1989, vol. 63, pp. 763–915.

7. *Akhmanov S.A., Sukhorukov A.P., Khokhlov R.V.* Self-focusing and diffraction of light in a nonliner medium. Soviet Physics Uspekhi, 1968. vol. 10, no. 5, pp. 609–636.

8. *Hasegawa A., Tappert F.* Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion. Applied Physics Letters, 1973. vol. 23, no. 3, pp. 142–144.

9. *Hasegawa A., Tappert F.* Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. II. Normal dispersion. Applied Physics Letters, 1973. vol. 23, no. 4, pp. 171–172.

10. *Tai K., Hasegawa A., Tomita A.* Observation of modulational instability in optical fibers. Physical Review Letters, 1986. vol. 56. No. 2, pp. 135–138.

11. *Weiss J., Tabor M., Carnevale G.* The Painleve property for partial differential equations. J. Math. Phys., 1982. vol. 24, no. 3, pp. 522–526.

12. *Kudryashov N.A.* Painlevé analysis of the resonant third-order nonlinear Schrödinger equation. Appl. Math. Letters, 2024, vol. 158. 109232.

13. *Kudryashov N.A.* Painlevé analysis of the Sasa–Satsuma equation. Phys. Letters A, 2024, vol. 525. 129900.

14. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.

15. *Al Khawaja U., Al Sakkaf L.* Handbook of Exact Solutions to the Nonlinear Schrödinger Equations. Bristol: Institute of Physics Publ., 2019.

16. *Polyanin A.D.* Handbook of Exact Solutions to Mathematical Equations. Boca Raton: CRC Press–Chapman & Hall, 2025.

17. *Bullough R.K.* Solitons, Physics Bulletin, 1978, vol. 29, no. 2, pp. 78–82.

18. *Kudryashov N.A.* A generalized model for description of propagation pulses in optical fiber. Optik, 2019, vol. 189, pp. 42–52.

19. *Kudryashov N.A.* Solitary and periodic waves of the hierarchy for propagation pulse in optical fiber. Optik, 2019, vol. 194. 163060.

20. *Kudryashov N.A.* Mathematical model of propagation pulse in optical fiber with power nonlinearities. Optik, 2020, vol. 212. 164750.

21. *Kudryashov N.A.* Solitary waves of the non-local Schrödinger equation with arbitrary refractive index. Optik, 2021, vol. 231. 166443.

22. *Kudryashov N.A.* Stationary solitons of the generalized nonlinear Schrödinger equation with nonlinear dispersion and arbitrary refractive insex. Applied Mathematics Letters, 2022, vol. 128. 107888.

23. *Kudryashov N.A.* Almost general solution of the reduced higher-order nonlinear Schrödinger equation. Optik, 2021, vol. 230. 66347.

24. *Yildirim Y.* Optical solitons to Schrodinger-Hirota equation in DWDM system with modified simple equation integration architecture. Optik, 2019, vol. 182, pp. 694–701.

25. *Zayed E.M.E., Shohib R.M.A., Biswas A., Ekici M., Alshomrani A.S., Khan S., Zhou Q., Belic M.R.* Dispersive solitons in optical fibers and DWDM networks with Schrodinger–Hirota equation. Optik, 2019, vol. 199. 163214.

26. *Zayed E.M.E., Shohib R.M.A., Alngar M.E.M., Biswas A., Moraru L., Khan S., Yildirim Y., Alshehri H.M., Belic M.R.* Dispersive optical solitons with Schrodinger-Hirota model having multiplicative white noise via Ito Calculus. Physics Letters A: General, Atomic and Solid State Physics, 2022, vol. 445, 128268.

27. *Wang G., Kara A.H., Biswas A., Guggilla P., Alzahrani A.K., Belic M.R.* Highly dispersive optical solitons in polarization-preserving fibers with Kerr law nonlinearity by Lie symmetry. Physics Letters A: General, Atomic and Solid State Physics, 2022, vol. 421, 127768.

28. *Biswas A., Hubert M.B., Justin M., Betchewe G., Doka S.Y., Crepin K.T., Ekici M., Zhou Q., Moshokoa S., Belic M.* Chirped dispersive bright and singular optical solitons with Schrodinger–Hirota equation. Optik, 2018, vol. 168, pp. 192–195.

29. *Zhou Q., Xu M., Sun Y., Zhong Y., Mirzazadeh M.* Generation and transformation of dark solitons, anti-dark solitons and dark double-hump solitons. Nonlinear Dynamics, 2022, vol. 110, no. 2, pp. 1747–1752.

30. *Polyanin A.D., Kudryashov N.A.* Nelineynyye uravneniya Shredingera s zapazdyvaniyem: Tochnyye resheniya, reduktsii i preobrazovaniya [Nonlinear Schrödinger equations with delay: Exact solutions, reductions, and transformations]. Vestnik NIYaU MIFI, 2024, vol. 13, no. 5, pp. 340–349 (in Russian).

31. *Polyanin A.D., Kudryashov N.A.* Nelineynoye uravneniye Shredingera s dispersiyey i potentsialom obshchego vida: Tochnyye resheniya i reduktsii [Nonlinear Schrödinger equation with dispersion and potential of the general form: Exact solutions and reductions]. Vestnik NIYaU MIFI, 2024, vol. 13, no. 6, pp. 394 – 402 (in Russian).

32. *Polyanin A.D., Kudryashov N.A.* Closed-form solutions of the nonlinear Schrödinger equation with arbitrary dispersion and potential. Chaos, Solitons & Fractals, 2025, vol. 191, 115822.

33. *Polyanin A.D., Kudryashov N.A.* Nonlinear Schrödinger equations with delay: Closed-form and generalized separable solutions. Contemporary Mathematics, 2024. vol. 5, no. 4, 5420245840.

34. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear PDEs. Boca Raton–London: CRC Press, 2022.

35. *Michalska M., Klein M., Dlubek M.* Dissipative soliton resonance in a normal dispersion all-polarization-maintaining thulium-doped fiber laser. Optics & Laser Technology, 2025, vol. 181(B), 111895.

36. *Saleem Q.M., Ebrahium M.M., Aly K.A., Saddeek Y.B.* Optical properties of transition metals complex films derived from hydrazone oxime for optoelectronic devices. Journal of Molecular Structure, 2025, vol. 1321, no. 5, 140196.

37. *Choi M.-R., Hong Y., Lee Y.-R.*. Global existence versus finite time blowup dichotomy for the dispersion managed NLS. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, 2025, vol. 251, 113696.

38. *Pashaev O.K., Lee J.H.* Black holes and solutions of the quantized dispersionless NLS and DNLS equations. ANZIAM J., 2002. vol. 44, no. 1, pp. 73–81.

39. *Lee J.-H., Pashaev O.K., Rogers C., Schief W.K.* The resonant nonlinear Schrodinger equation in cold plasma physics. Application of Backlund–Darboux transformations and superposition principles. Journal of Plasma Physics, 2007, vol. 73, no. 2, pp. 257–272.

40. *Lee J.-H., Pashaev O.K.* Solitons of the resonant nonlinear Schrodinger equation with nontrivial boundary conditions: Hirota bilinear method. Theoretical and Mathematical Physics, 2007, vol. 152, no. 1, pp. 991–1003.

41. *Tala-Tebue E., Seadawy A.R.* Construction of dispersive optical solutions of the resonant nonlinear Schrodinger equation using two different methods. Modern Physics Letters B, 2018, vol. 32, no. 33, 1850407.

42. *Zhou Q., Wei C., Zhang H., Lu J., Yu H., Yao P., Zhu Q.* Exact solutions to the resonant nonlinear Schrodinger equation with both spatio-temporal and inter-modal dispersions. Proc. Romanian Academy, Ser. A, 2016, vol. 17, no. 4, pp. 307–313.

43. *Eldidamony H.A., Arnous A.H., Nofal T.A., Yildirim Y.* Optical soliton solutions in birefringent fibers with multiplicative white noise: an analysis for the perturbed Chen–Lee–Liu model. Nonlinear Dynamics, 2024, vol. 112, no. 24, pp. 22295–22322.

44. *Eslami M., Sharif A.* Extended hyperbolic method to the perturbed nonlinear Chen–Lee–Liu equation with conformable derivative. Partial Differential Equations in Applied Mathematics, 2024, vol. 11, 100838.

45. *Lu W., Ahmad J., Akram S., Aldwoah K.A.* Soliton solutions and sensitive analysis to nonlinear wave model arising in optics. Physica Scripta, 2024, vol. 99, no. 8, 085230.

46. *Althrwi F.A., Alshaery A.A., Bakodah H.O., Nuruddeen R.I.* Supplementary optical solitonic expressions for Gerdjikov-Ivanov equations with three Kudryashov-based methods. Communications in Theoretical Physics, 2024, vol. 76, no. 12, 125001.

47. *Calogero F., Degasperis A.* Spectral Transform and Solitons: Tools to Solve and Investigate Nonlinear Evolution Equations. Amsterdam: North Holland Publ., 1982.

48. *Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E.* Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists, 2nd ed. Boca Raton–London: CRC Press, 2016.

49. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2014, vol. 19, no. 3, pp. 417–430.

50. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients. Int. J. Non-Linear Mech., 2014, vol. 67, pp. 267–277.

51. *Polyanin A.D., Sorokin V.G., Zhurov A.I.* Delay Ordinary and Partial Differential Equations. Boca Raton–London: CRC Press, 2024.

52. *Aksenov A.V., Polyanin A.D.* Methods for constructing complex solutions of nonlinear PDEs using simpler solutions. Mathematics, 2021, vol. 9, no. 4. 345.

53. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems. Boca Raton–London: CRC Press, 2018.