

УДК 519.63+533.6

Полная система уравнений Навье – Стокса: линеаризация и построение решений

А. А. Бугаенко^{1,2}, И. Ю. Крутова²

¹ Федеральное государственное унитарное предприятие «Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е.И. Забабахина», Снежинск, 456776, Россия

² ФГАОУ ВО «Снежинский физико-технический институт Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», Снежинск, 456776, Россия

Моделирование атмосферных явлений проводится на основе систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных с последующим их численным исследованием. В результате дискретизации этих уравнений мы приходим к системам с миллионами и даже миллиардами неизвестных. В силу нелинейности полной системы уравнений Навье–Стокса построение ее решений является достаточно трудоемким. Как следствие, применяется процедура линеаризации на точном решении (однородном покое). Для линеаризованной системы при учете действия сил тяжести и Кориолиса численно моделируется возникновение и развитие восходящих закрученных потоков разной интенсивности с использованием продува вверх по трубе. Численный расчет скоростных характеристик трехмерного нестационарного течения вязкого теплопроводного газа в восходящем закрученном потоке, инициированном вертикальным продувом, показал, что закрутка газа происходит в положительном направлении и обусловлена наличием в линеаризованной полной системе уравнений Навье–Стокса членов, описывающих ускорение Кориолиса. Таким образом, еще раз численно подтверждена схема возникновения восходящего закрученного потока. Также сделано заключение о возможности применения данного подхода к исследованию восходящих закрученных потоков типа «торнадо» и тропического циклона.

Ключевые слова: полная система уравнений Навье–Стокса, сила Кориолиса, линеаризация, численное моделирование, продув.

Введение

При численном построении сложных неоднородных и нестационарных течений газа для увеличения устойчивости счета часто применяют различные алгоритмы, сглаживающие решения. Для того чтобы данная процедура имела обоснованный физический смысл, в работе рассматривается полная система уравнений Навье–Стокса (ПСУНС), в которой сжимаемость газа, диссипативные эффекты вязкости и теплопроводности учтены таким образом, что общие законы сохранения массы, импульса и энергии выполняются. Благодаря учету уравнений состояния также выполняются законы термодинамики.

В силу нелинейности PSUНС построение ее решений является достаточно трудоемким [1, 2], что и послужило причиной линеаризации системы. В работе приведена процедура линеаризации PSUНС на точном решении, описывающем однородный покой. Также в статье приведены результаты численных исследований по созданию стабильного окружного движения воздуха в придонной части восходящего закрученного потока (ВЗП) с применением вертикальной трубы с вентилятором вытяжного действия, направляющим воздух по трубе снизу-вверх [3, 6, 8–10, 13–14]. В том числе описываются результаты численных расчетов газодинамических параметров: плотности, температуры, включая скоростные

✉ А.А. Бугаенко: BugaenkoAA@vniitf.ru
И.Ю. Крутова: IYKrutova@mephi.ru

Поступила в редакцию: 18.01.2025
После доработки: 29.01.2025
Принята к публикации: 31.01.2025

характеристики трехмерных нестационарных восходящих закрученных течений газа определенного масштаба, вызванных вертикальным продувом. Численный расчет подобных течений газа позволяет дать конкретные предложения и рекомендации по возможному проведению крупномасштабного эксперимента по закрутке больших масс воздуха.

Линеаризация полной системы уравнений Навье – Стокса

Полная система уравнений Навье–Стокса при учете действия силы Кориолиса и силы тяжести имеет следующий вид [2, 4–8, 11]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_t + u\rho_x + v\rho_y + w\rho_z + \rho(u_x + v_y + w_z) = 0, \\ u_t + uu_x + vu_y + wu_z + \frac{T}{\gamma\rho}\rho_x + \frac{1}{\gamma}T_x = av - bw + \frac{\mu_0}{\rho}\left(u_{xx} + \frac{3}{4}u_{yy} + \frac{3}{4}u_{zz} + \frac{1}{4}v_{xy} + \frac{1}{4}w_{xz}\right), \\ v_t + uv_x + vv_y + wv_z + \frac{T}{\gamma\rho}\rho_y + \frac{1}{\gamma}T_y = -au + \frac{\mu_0}{\rho}\left(\frac{3}{4}v_{xx} + v_{yy} + \frac{3}{4}v_{zz} + \frac{1}{4}u_{xy} + \frac{1}{4}w_{yz}\right), \\ w_t + uw_x + vw_y + ww_z + \frac{T}{\gamma\rho}\rho_z + \frac{1}{\gamma}T_z = bu - g + \frac{\mu_0}{\rho}\left(\frac{3}{4}w_{xx} + \frac{3}{4}w_{yy} + w_{zz} + \frac{1}{4}u_{xz} + \frac{1}{4}v_{yz}\right), \\ T_t + uT_x + vT_y + wT_z + (1-\gamma)T(u_x + v_y + w_z) = \frac{k_0}{\rho}(T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}) + \\ + \frac{\mu_0\gamma(\gamma-1)}{2\rho}\left[(u_x - v_y)^2 + (u_x - w_z)^2 + (v_y - w_z)^2 + \frac{3}{2}((u_y + v_x)^2 + (u_z + w_x)^2 + (v_z + w_y)^2)\right]. \end{array} \right. \quad (1)$$

где ρ – плотность газа; $V = (u, v, w)$ – вектор скорости газа с его проекциями на декартовы оси Ox , Oy , Oz ; $\Omega = (0; \Omega_2; \Omega_1)$; $\Omega_2 = \Omega \cos \psi$; $\Omega_1 = \Omega \sin \psi$ – вектор угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси; ψ – широта точки, в которой находится начало декартовой системы координат (x, y, z) , вращающейся вместе с Землей; $a = 2\Omega_1$; $b = 2\Omega_2$; $g = (0, 0, -g)$, $g = \text{const} > 0$ – ускорение свободного падения; μ_0 , k_0 – постоянные коэффициенты вязкости и теплопроводности [1].

Благодаря наличию в правых частях уравнений движений второго, третьего и четвертого уравнений системы (1) – слагаемых, отвечающих за присутствие ускорения Кориолиса, в поток газа вносится дополнительный внешний импульс. Именно он и приводит к закрутке вязкого теплопроводного газа в придонной части вертикального теплового восходящего потока.

В системе (1) при введении безразмерных переменных масштабные значения связаны следующими соотношениями [2, 4–8, 11, 14]:

$$u_{00} = \sqrt{R\gamma T_{00}} = c_{00}, \quad t_{00} = \frac{r_{00}}{u_{00}}, \quad p_{00} = R\rho_{00}T_{00}, \quad e_{00} = c_{v0}T_{00},$$

где $\gamma = 1 + R/c_{v0}$; R – универсальная газовая постоянная; c_{v0} – удельная теплоемкость.

Следовательно, за масштабные значения скорости, давления и внутренней энергии выбраны, соответственно, скорость звука, давление и внутренняя энергия газа с параметрами ρ_{00} , T_{00} . В качестве масштабного значения скорости берется значение $u_{00} = c_{00} = 1000/3$ м/с, близкое к значению скорости распространения звука в воздухе при стандартных условиях, т.е. при $\rho_{00} = 1.29$ кг/м³, $T_{00} = 288$ К.

Постоянные безразмерные значения коэффициентов вязкости μ_0 и теплопроводности k_0 определяются следующими соотношениями

$$\mu_0 = \frac{4\mu_*}{3\rho_{00}u_{00}r_{00}}, \quad k_0 = \frac{k_*}{c_{v0}\rho_{00}u_{00}r_{00}},$$

где μ_* , k_* – размерные значения постоянных коэффициентов вязкости и теплопроводности. Для воздуха: $\gamma = 1.4$ и тогда $k_0 \approx \mu_0$.

У системы (1) в случае $g = 0$ имеется точное решение:

$$\rho = 1, T = 1, u = v = w = 0. \quad (2)$$

Линеаризация системы (1) на точном решении (2) состоит в том, что решение этой системы представляется в виде

$$\rho = 1 + \tilde{\rho}, T = 1 + \tilde{T}, V = \tilde{V},$$

эти выражения подставляются в систему (1), предварительно умножив все уравнения кроме первого на ρ .

Слагаемые, не содержащие тильдованных функций и тильдованных производных, взаимно уничтожаются, поскольку выражения (2) задают точное решение системы (1). Затем нелинейные выражения с тильдованными функциями и тильдованными производными отбрасываются. В результате получается следующая линейная система уравнений с частными производными, где для простоты знак тильды опущен [1]:

$$\begin{cases} \rho_t + \rho(u_x + v_y + w_z) = 0, \\ u_t + \frac{\rho_x}{\gamma} + \frac{T_x}{\gamma} = av - bw + \mu_0 \left(u_{xx} + \frac{3}{4}u_{yy} + \frac{3}{4}u_{zz} + \frac{1}{4}v_{xy} + \frac{1}{4}w_{xz} \right), \\ v_t + \frac{\rho_y}{\gamma} + \frac{T_y}{\gamma} = -au + \mu_0 \left(\frac{3}{4}v_{xx} + v_{yy} + \frac{3}{4}v_{zz} + \frac{1}{4}u_{xy} + \frac{1}{4}w_{yz} \right), \\ w_t + \frac{\rho_z}{\gamma} + \frac{T_z}{\gamma} = bu + \mu_0 \left(\frac{3}{4}w_{xx} + \frac{3}{4}w_{yy} + w_{zz} + \frac{1}{4}u_{xz} + \frac{1}{4}v_{yz} \right), \\ T_t + (\gamma - 1)(u_x + v_y + w_z) = k_0(T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}). \end{cases} \quad (3)$$

В работе [11] показано, что процедура линеаризации квазилинейного уравнения с частными производными на его точном решении и построение решения полученного линейного уравнения фактически являются построением слагаемого с номером «один» у конкретного бесконечного ряда по степеням формального малого параметра ϵ . Этот ряд решает специальным образом поставленную характеристическую задачу Коши стандартного вида и при условии аналитичности входных данных задачи этот бесконечный ряд по степеням ϵ сходится в некоторой окрестности рассматриваемой точки. Следовательно, решение линеаризованной задачи в сумме с точным решением, на котором проведена линеаризация, дает первые два слагаемых бесконечного сходящегося ряда, задающего новое решение исходного нелинейного уравнения с частными производными.

Конечно-разностная аппроксимация линеаризованной полной системы уравнений Навье – Стокса и начально-краевых условий

Для расчета нестационарных трехмерных течений в качестве расчетной области принимается прямоугольный параллелепипед (рис. 1), в котором строится равномерная прямоугольная сетка.

Для линеаризованной системы уравнений Навье – Стокса при учете действия силы Кориолиса и силы тяжести строится следующая разностная аппроксимация.

Для аппроксимации производной по временной переменной используются значения функции с двух последовательных вре-

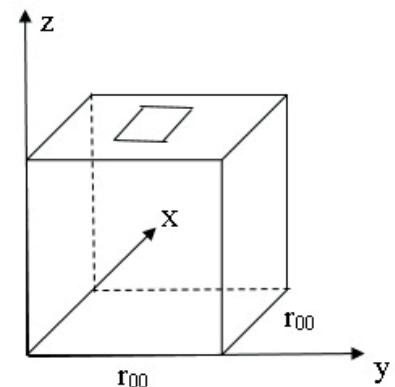


Рис. 1. Расчетная область

менных слоев [3]. А для аппроксимации производных по пространственным переменным используются центральные разности значений функций с предыдущего временного слоя:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_{i,j,k}^{n+1} - f_{i,j,k}^n}{\Delta t}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_{i+1,j,k}^n - f_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \approx \frac{f_{i,j+1,k}^n - f_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \approx \frac{f_{i,j,k+1}^n - f_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z}, \quad (4)$$

где под буквой f подразумеваются проекции вектора скорости на декартовы оси, а также плотность и температура газа $f = (\rho, T, u, v, w)$.

Вторые производные

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{f_{i+1,j,k}^n - 2f_{i,j,k}^n + f_{i-1,j,k}^n}{(\Delta x)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \approx \frac{f_{i,j+1,k}^n - 2f_{i,j,k}^n + f_{i,j-1,k}^n}{(\Delta y)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \approx \frac{f_{i,j,k+1}^n - 2f_{i,j,k}^n + f_{i,j,k-1}^n}{(\Delta z)^2}.$$

Смешанные производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &\approx \frac{f_{i+1,j+1,k}^n - f_{i-1,j+1,k}^n - f_{i+1,j-1,k}^n + f_{i-1,j-1,k}^n}{4\Delta x \Delta y}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &\approx \frac{f_{i+1,j,k+1}^n - f_{i-1,j,k+1}^n - f_{i+1,j,k-1}^n + f_{i-1,j,k-1}^n}{4\Delta x \Delta z}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} &\approx \frac{f_{i,j+1,k+1}^n - f_{i,j-1,k+1}^n - f_{i,j+1,k-1}^n + f_{i,j-1,k-1}^n}{4\Delta y \Delta z}. \end{aligned}$$

Использование формул (4) подразумевает, что расчет трехмерного нестационарного течения ведется по явной схеме переходом с очередного n -го временного слоя на следующий $(n+1)$ -й временной слой с постоянным заданным шагом.

При этом по пространственным переменным используется равномерная прямоугольная сетка с постоянными заданными шагами Δx , Δy и Δz соответственно.

Разностное уравнение для вычисления плотности газа во внутреннем узле (i, j, k) расчетной области

$$\frac{\rho_{i,j,k}^{n+1} - \rho_{i,j,k}^n}{\Delta t} + \frac{u_{i+1,j,k}^n - u_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1,k}^n - v_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y} + \frac{w_{i,j,k+1}^n - w_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} = 0.$$

Аналогично для второго уравнения системы (3)

$$\begin{aligned} &\frac{u_{i,j,k}^{n+1} - u_{i,j,k}^n}{\Delta t} + \frac{1}{\gamma} \frac{\rho_{i+1,j,k}^n - \rho_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{\gamma} \frac{T_{i+1,j,k}^n - T_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x} = \\ &= a v_{i,j,k}^n - b w_{i,j,k}^n + \mu_0 \frac{u_{i+1,j,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i-1,j,k}^n}{(\Delta x)^2} + \mu_0 \frac{3}{4} \frac{u_{i,j+1,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j-1,k}^n}{(\Delta y)^2} + \mu_0 \frac{3}{4} \frac{u_{i,j,k+1}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j,k-1}^n}{(\Delta z)^2} + \\ &+ \mu_0 \frac{1}{4} \frac{v_{i+1,j+1,k}^n - v_{i-1,j+1,k}^n - v_{i+1,j-1,k}^n + v_{i-1,j-1,k}^n}{4\Delta x \Delta y} + \mu_0 \frac{1}{4} \frac{w_{i+1,j,k+1}^n - w_{i-1,j,k+1}^n - w_{i+1,j,k-1}^n + w_{i-1,j,k-1}^n}{4\Delta x \Delta z}. \end{aligned}$$

Разностное уравнение для вычисления второй компоненты вектора скорости:

$$\begin{aligned} & \frac{v_{i,j,k}^{n+1} - v_{i,j,k}^n}{\Delta t} + \frac{1}{\gamma} \frac{\rho_{i,j+1,k}^n - \rho_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y} + \frac{1}{\gamma} \frac{T_{i,j+1,k}^n - T_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y} = \\ & = -au_{i,j,k}^n + \mu_0 \frac{3}{4} \frac{v_{i+1,j,k}^n - 2v_{i,j,k}^n + v_{i-1,j,k}^n}{(\Delta x)^2} + \mu_0 \frac{v_{i,j+1,k}^n - 2v_{i,j,k}^n + v_{i,j-1,k}^n}{(\Delta y)^2} + \mu_0 \frac{3}{4} \frac{v_{i,j,k+1}^n - 2v_{i,j,k}^n + v_{i,j,k-1}^n}{(\Delta z)^2} + \\ & + \mu_0 \frac{1}{4} \frac{u_{i+1,j+1,k}^n - u_{i-1,j+1,k}^n - u_{i+1,j-1,k}^n + u_{i-1,j-1,k}^n}{4\Delta x\Delta y} + \mu_0 \frac{1}{4} \frac{w_{i,j+1,k+1}^n - w_{i,j-1,k+1}^n - w_{i,j+1,k-1}^n + w_{i,j-1,k-1}^n}{4\Delta x\Delta z}. \end{aligned}$$

Разностное уравнение для вычисления третьей компоненты вектора скорости:

$$\begin{aligned} & \frac{w_{i,j,k}^{n+1} - w_{i,j,k}^n}{\Delta t} + \frac{1}{\gamma} \frac{\rho_{i,j,k+1}^n - \rho_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} + \frac{1}{\gamma} \frac{T_{i,j,k+1}^n - T_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} = \\ & = bu_{i,j,k}^n + \mu_0 \frac{3}{4} \frac{w_{i+1,j,k}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i-1,j,k}^n}{(\Delta x)^2} + \mu_0 \frac{3}{4} \frac{w_{i,j+1,k}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i,j-1,k}^n}{(\Delta y)^2} + \mu_0 \frac{w_{i,j,k+1}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i,j,k-1}^n}{(\Delta z)^2} + \\ & + \mu_0 \frac{1}{4} \frac{u_{i+1,j,k+1}^n - u_{i-1,j,k+1}^n - u_{i+1,j,k-1}^n + u_{i-1,j,k-1}^n}{4\Delta x\Delta y} + \mu_0 \frac{1}{4} \frac{w_{i,j+1,k+1}^n - w_{i,j-1,k+1}^n - w_{i,j+1,k-1}^n + w_{i,j-1,k-1}^n}{4\Delta x\Delta z}. \end{aligned}$$

Разностное уравнение для вычисления температуры газа:

$$\begin{aligned} & \frac{T_{i,j,k}^{n+1} - T_{i,j,k}^n}{\Delta t} + (\gamma - 1) \left(\frac{u_{i+1,j,k}^n - u_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1,k}^n - v_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y} + \frac{w_{i,j,k+1}^n - w_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} \right) = \\ & = k_0 \left(\frac{T_{i+1,j,k}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i-1,j,k}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1,k}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i,j-1,k}^n}{(\Delta y)^2} + \frac{T_{i,j,k+1}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i,j,k-1}^n}{(\Delta z)^2} \right). \end{aligned}$$

Исходя из данных проведенных экспериментов, математическое моделирование вертикального продува осуществляется заданием вертикальной составляющей скорости газа через квадратное отверстие размером 0.1×0.1 в центре верхней грани расчетной области в виде функции $w(t) = M(1 - e^{-10t})$, описывающей постепенное увеличение со временем вертикальной скорости продува от 0 до 10. Тем самым через верхнее отверстие моделируется вертикальный плавный продув воздуха в диапазоне скоростей от 0 до M .

Граничные условия для искомых пяти функций выбираются в предположении, что газ из расчетной области может выходить только через ту часть верхней грани, где осуществляется продув, а входить только через боковые грани.

За начальные условия принимается набор функций

$$\rho = \rho_0(z) = (1 - kz)^{\gamma-1}, \quad T = T_0(z) = 1 - kz, \quad v = \frac{\gamma g}{k}, \quad k = \frac{lx_{00}}{T_{00}}, \quad l = 0.0065 \frac{K}{m},$$

$$u = 0, v = 0, w = 0,$$

поскольку они являются точными решениями полной системы уравнений Навье–Стокса и описывают стационарные газодинамические параметры газа, покоящегося в поле силы тяжести, когда плотность и температура зависят только от высоты [6, 9].

Численное моделирование течений газа в восходящих закрученных потоках малых масштабов

Расчеты течений газа в малых восходящих закрученных потоках проводились при масштабном значении расстояния $r_{00} = 10$ м, масштабном значении времени $t_{00} = r_{00}/u_{00} = 0.03$ с, разностным шагом по трем пространственным переменным: $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.005$ и шаге по времени $\Delta t = 0.001$ [6, 9].

Через квадратное отверстие размером 0.1×0.1 в центре верхней грани расчетной области задается вертикальная скорость течения газа при $M = 0.003$.

На рис. 2, 3 представлены результаты расчетов плотности газа на высоте 0.025 (размерное значение 0.25 м) для двух различных моментов расчетного времени.

Плотность газа по периметру расчетной области сохраняется постоянной и равной значению плотности стационарного распределения. В начальные моменты времени происходят колебания плотности в четвертом десятичном знаке, а с течением времени амплитуда колебаний плотности постепенно уменьшается и наблюдается плавное понижение плотности в центре расчетной области [6, 9, 10]. При увеличении времени расчета процесс изменения плотности плавно выходит на стационарный режим. Поверхность плотности газа приобретает вид воронки с пониженной плотностью в центре расчетной области.

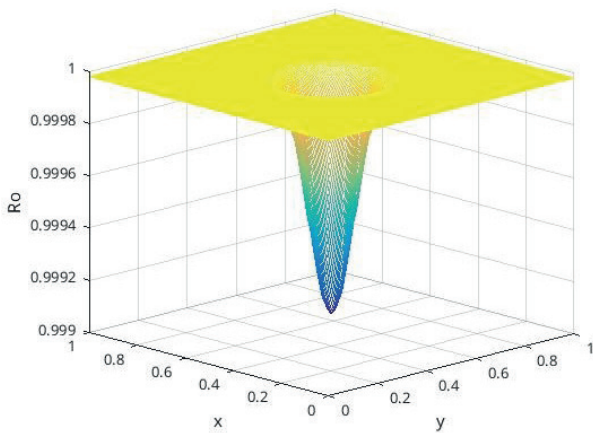


Рис. 2. Плотность газа при $t = 0.1$ с

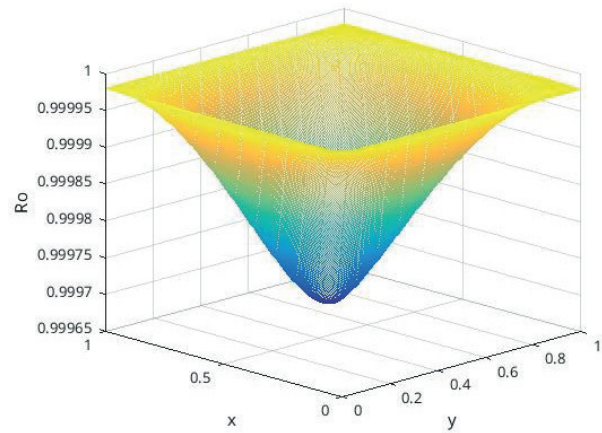


Рис. 3. Плотность газа при $t = 30$ с

На рис. 4, 5 представлены результаты расчетов температуры газа на той же высоте для тех же моментов расчетного времени.

Несмотря на продув газа через верхнее отверстие, в результате численного решения линейризованной ПСУНС отмечается понижение температуры в центре расчетной области под отверстием продува. Периферийное же значение температуры соответствует постоянному значению начального стационарного распределения. Следует отметить, что так же, как и для плотности видны незначительные изменения температуры в начальные моменты времени счета, которые постепенно исчезают при выходе процесса на стационарный режим [6].

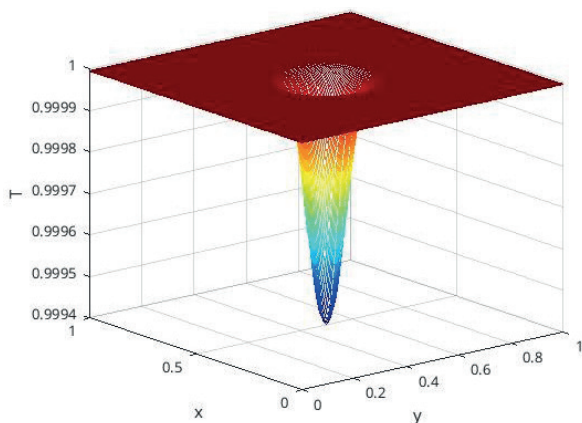


Рис. 4. Температура газа при $t = 0.1$ с

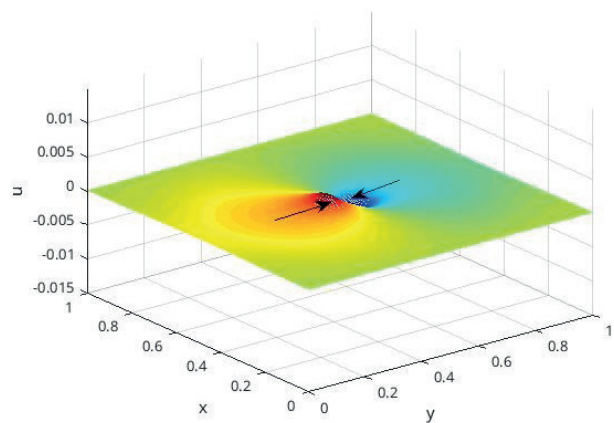


Рис. 5. Температура газа при $t = 30$ с

Общим в поведении термодинамических характеристик является то, что по мере приближения к центру расчетной области прослеживается их осевая симметрия. Ось симметрии расположена вертикально, проходит через геометрический центр расчетной области и совпадает с центром отверстия продува.

На рис. 6а – в представлении в виде поверхностей результаты расчетов первой компоненты скорости газа на высоте 0.25 м для трех расчетных моментов времени.

В начальные моменты времени счета (см. рис. 6а) на общем фоне нулевых по значению скоростей в центре расчетной области возникают зоны, в которых x -е компоненты скорости отличны от нуля и противоположны по знаку. Такое распределение скоростей означает встречное движение частиц газа в центральной области расчетного параллелепипеда. Стрелками на рисунках помечены направления движения частиц газа. Ясно, что в начальный момент времени пока нет никакой закрутки газа.

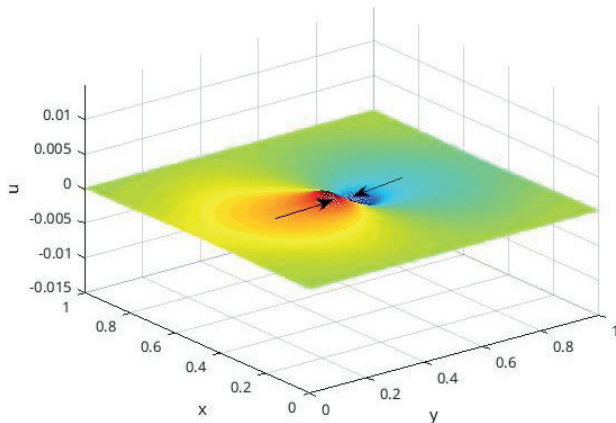


Рис. 6а. Первая компонента вектора скорости при $t=0.5$ с

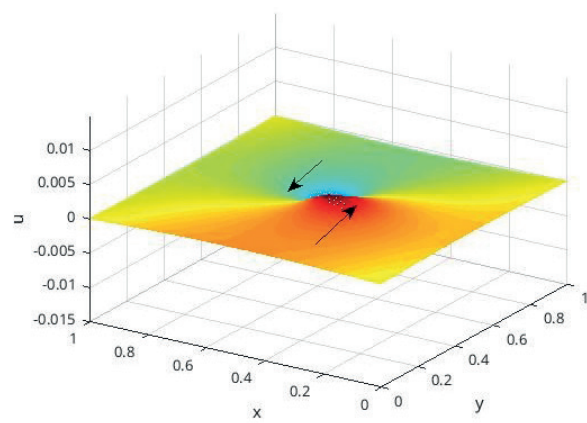


Рис. 6б. Первая компонента вектора скорости при $t=1$ с

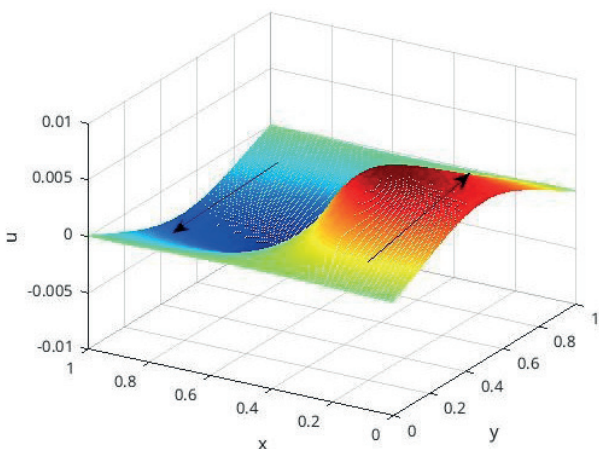


Рис. 6в. Первая компонента вектора скорости при $t=30$ с

В последующий момент расчетного времени (см. рис. 6б) происходит заметное смещение областей с положительными и отрицательными значениями x -й компоненты скорости. Такое пространственное перераспределение рассматриваемой компоненты скорости частиц газа означает, что вблизи геометрического центра расчетной области возникают встречные и разведенные в пространстве потоки газа, что равносильно возникновению вокруг вертикальной оси закрученного в положительном направлении движения частиц газа.

На следующем рис. 6в такое пространственное перераспределение областей с противоположными по знаку компонентами частиц газа усиливается. Причем процесс сопровождается увеличением модулей скоростей и увеличением размеров этих областей, т.е. закрутка газа в положительном направлении движения усиливается.

На момент расчетного времени 30 с (см. рис. 6в) видно, что распределение областей с противоположными по знаку значениями скоростей полностью завершилось, и продолжается рост абсолютных значений скоростей вплоть до выхода на стационарный режим течения. Другими словами – закрутка газа полностью сформировалась и происходит только ее усиление с точки зрения увеличения скоростей течения.

Вторая компонента скорости имеет такие же особенности изменения от времени, и поэтому описание здесь не приводится.

Особенностями в поведении вертикальной компоненты скорости частиц газа (рис. 7а – 7б, 8а – 8б) в расчетной области является близость ее значений к нулю во всех периферийных областях. В области продува вертикальная скорость постепенно растет в соответствии с законом продува и в сечении повторяет квадратный контур отверстия продува.

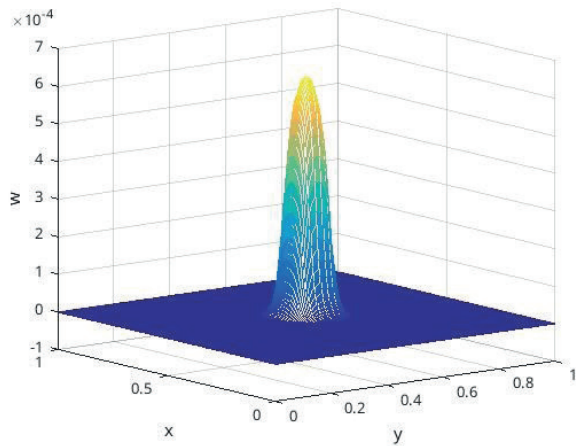


Рис. 7а. Третья компонента скорости при $t = 0.1$ с

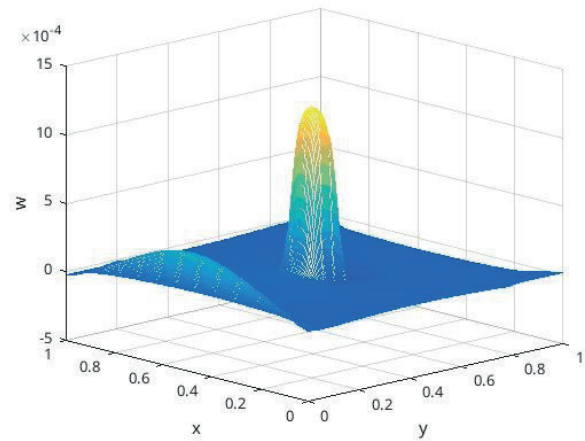


Рис. 7б. Третья компонента скорости при $t = 30$ с

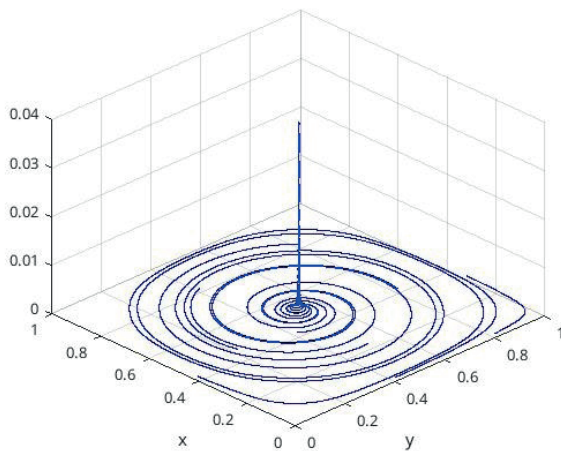


Рис. 8а. Линии тока частиц газа при $t = 0.5$ с

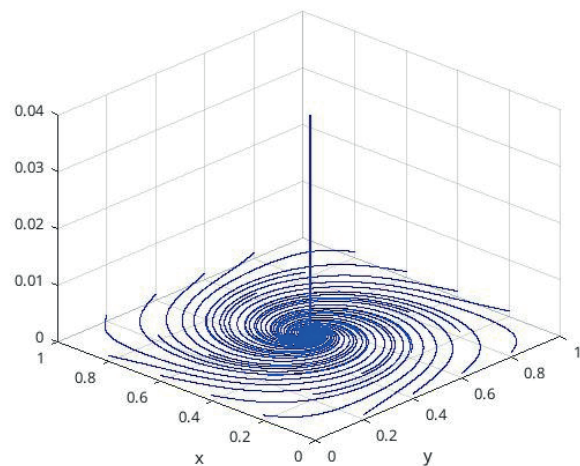


Рис. 8б. Линии тока частиц газа при $t = 1$ с

На рис. 8а и 8б представлены результаты трехмерных расчетов мгновенных линий тока частиц газа в области близкой к вертикальной части ВЗП.

Видно, как постепенно происходит закрутка газа вблизи нижней плоскости расчетного параллелепипеда и процесс передачи вращательного движения сплошной среды в вертикальную часть ВЗП [10].

Следует отметить, что мгновенные линии тока были построены исходя из рассчитанных составляющих скорости во всех узлах расчетной области, и их количество специально ограничено для большей наглядности. Высота, с которой начинался процесс построения линий тока составлял порядка 0.0001 в безразмерных единицах. Поэтому можно считать, что построенные мгновенные линии тока начинаются практически с подстилающей поверхности. Сформировавшаяся же вертикальная часть, которую видно на рисунках, представляет собой аналог (численную модель) хобота реального природного вихря [3, 6, 8–10, 13–14].

Численное моделирование течений газа в восходящих закрученных потоках средних масштабов

В данном пункте приводятся результаты численного моделирования ВЗП воздуха, возникающего в результате вертикального продува через трубу 5 м. Тем самым проводится расчет газодинамических характеристик в нестационарных трехмерных течениях воздуха в будущих возможных экспериментах. Расчеты течений газа в данных ВЗП проводились при масштабном значении расстояния $r_{00} = 50$ м, масштабном значении времени $t_{00} = r_{00}/u_{00} = 0.15$ с, разностным шагом по трем пространственным переменным: $\Delta x = \Delta y = 0.005$, $\Delta z = 0.004$ и шаге по времени $\Delta t = 0.001$. Начальные и граничные условия, а также скорость вертикального продува выбирались такими же, как в предыдущем пункте.

На рис. 9, 10 представлены результаты расчетов плотности газа на высоте 0.02 (размерное значение 1 м) для двух различных моментов расчетного времени, а на рис. 11, 12 – температуры газа.

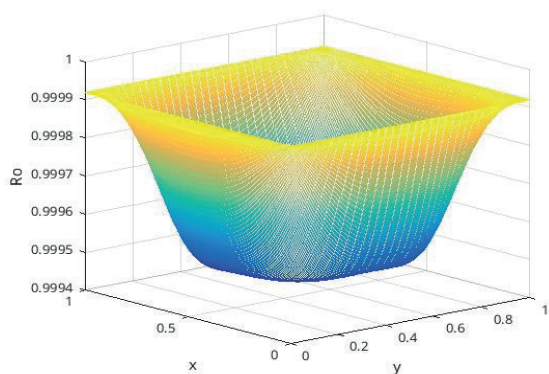


Рис. 9. Плотность газа при $t = 0.5$ с

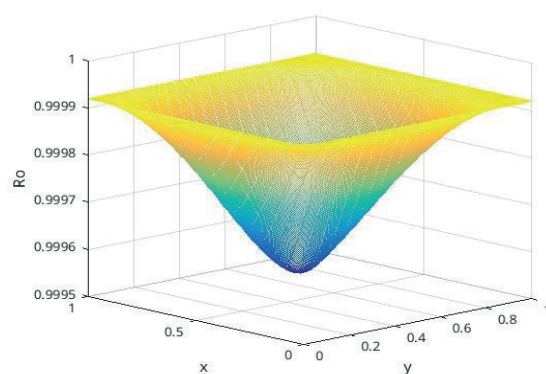


Рис. 10. Плотность газа при $t = 30$ с

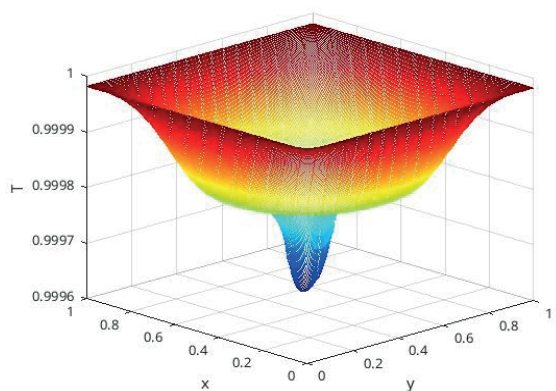


Рис. 11. Температура газа при $t = 0.5$ с

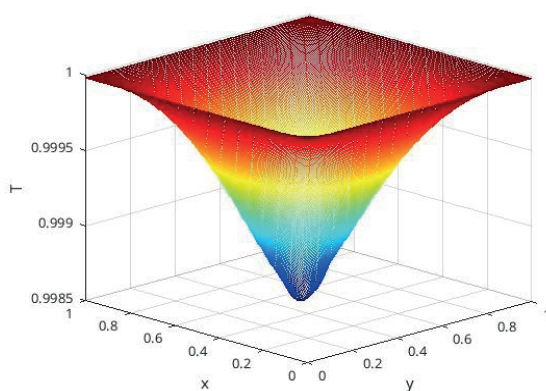


Рис. 12. Температура газа при $t = 30$ с

По плотности и температуре газа видно, что процесс – нестационарный. Величины в зоне продува уменьшаются, и с течением времени происходит выход на стационарный режим. В данном расчете явно наблюдается цилиндрическая симметрия, несмотря на то, что расчет проводился в прямоугольной системе координат.

На следующих рисунках (рис. 13а, 13б, 13в, 13г) представлены в виде поверхностей результаты расчетов первой компоненты скорости газа. Из рисунков видно, что первоначально встречные в направлении

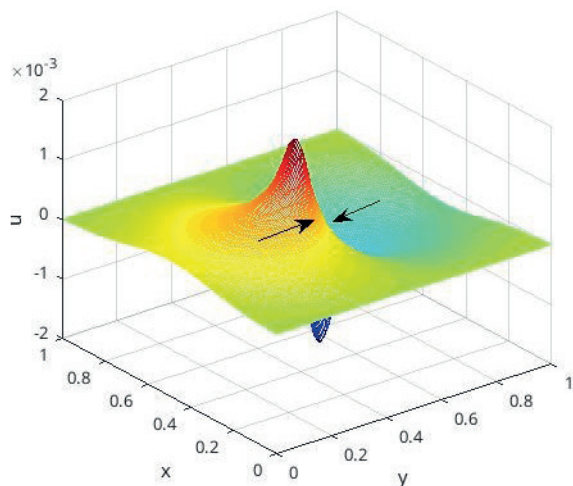


Рис. 13а. Первая компонента вектора скорости при $t = 0.5$ с

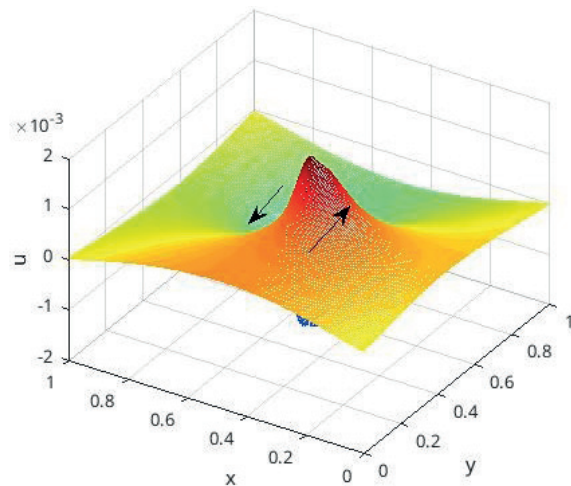


Рис. 13б. Первая компонента вектора скорости при $t = 2$ с

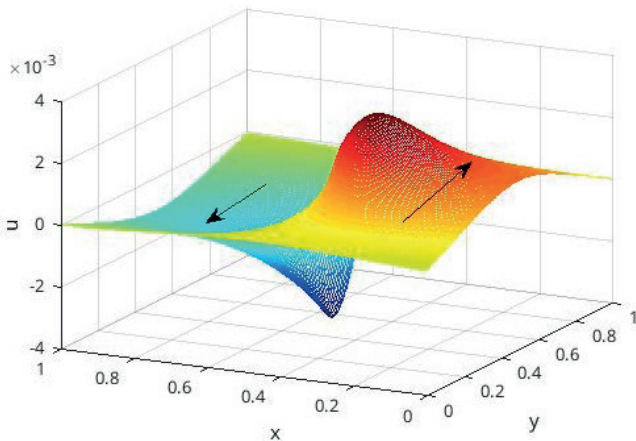


Рис. 13в. Первая компонента вектора скорости при $t = 10$ с

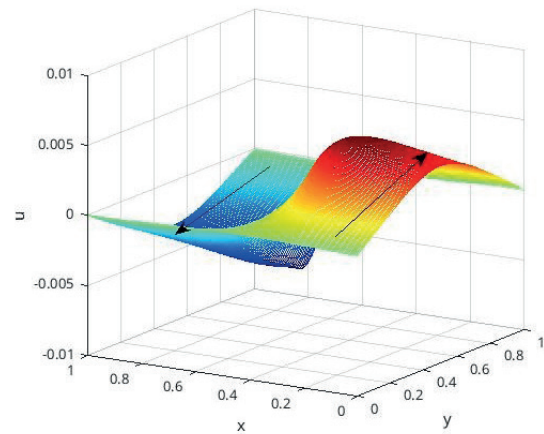


Рис. 13г. Первая компонента вектора скорости при $t = 30$ с

оси Ox потоки газа с течением времени перераспределяются в пространстве. Такое перераспределение движущихся встречных потоков иллюстрирует возникновение закрутки газа в положительном направлении, т.е. против хода часовой стрелки. С течением времени происходит рост абсолютных значений скоростей встречных потоков с постепенным выходом на стационарный режим течения [10].

На рис. 14, 15 представлены результаты трехмерных расчетов мгновенных линий тока частиц газа и вид на них сверху в области близкой к вертикальной части ВЗП.

Видно, как происходит закрутка газа вблизи нижней плоскости расчетного параллелепипеда и процесс передачи вращательного движения сплошной среды в вертикальную часть ВЗП [3, 6, 8–10, 13, 14].

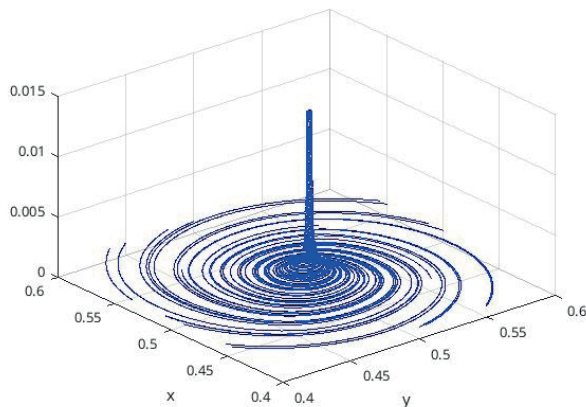


Рис. 14. Линии тока частиц газа

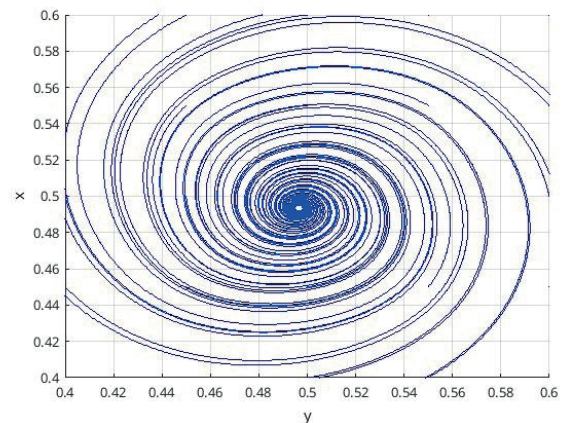


Рис. 15. Проекция линий тока частиц газа

Численное моделирование течений газа в восходящих закрученных потоках больших масштабов

Приводятся результаты численного моделирования ВЗП воздуха, возникающего в результате вертикального продува его через трубу большого диаметра. Тем самым проводится расчет газодинамических характеристик в нестационарных трехмерных течениях воздуха в тропическом циклоне средних размеров. Расчеты течений газа в данных ВЗП проводились с начальными и граничными условиями, описанными в двух предыдущих пунктах при масштабном значении расстояния $r_{00} = 50000$ м, масштабном значении времени $t_{00} = r_{00}/u_{00} = 150.15$ с, разностным шагом по трем пространственным переменным: $\Delta x = \Delta y = 0.005$, $\Delta z = 0.02$ и шаге по времени $\Delta t = 0.001$.

Через квадратное отверстие размером 0.1×0.1 в центре верхней грани расчетной области задается вертикальная скорость течения газа при $M = 0.0125$.

В начальные моменты времени происходят колебания плотности газа (рис. 16, 17) в третьем десятичном знаке, а с течением времени наблюдается понижение плотности в центре расчетной области [6, 9]. При приближении к центру прослеживается осевая симметрия в поведении плотности газа. Ось

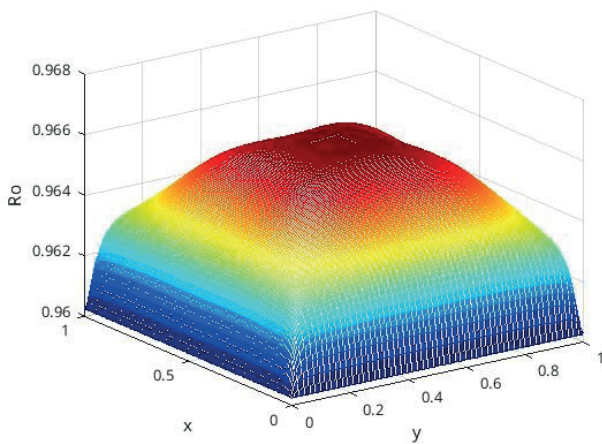


Рис. 16. Плотность газа при $t = 1$ с

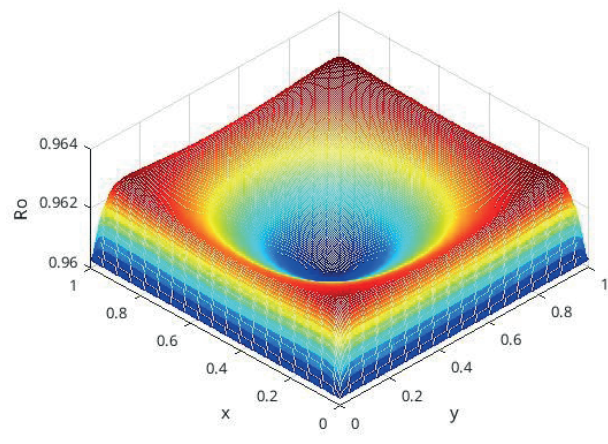


Рис. 17. Плотность газа при $t = 30$ с

симметрии расположена вертикально, проходит через геометрический центр расчетной области и совпадает с центром отверстия продува воздуха через верхнюю плоскость прямоугольного параллелепипеда.

Существенным моментом в расчете температуры в исследуемых восходящих закрученных течениях является то, что причиной возникновения таких течений есть не нагрев подстилающей поверхности, а вертикальный продув газа. При увеличении времени расчета поверхность температуры газа приобретает вид воронки с пониженными значениями в центре расчетной области (рис. 18, 19).

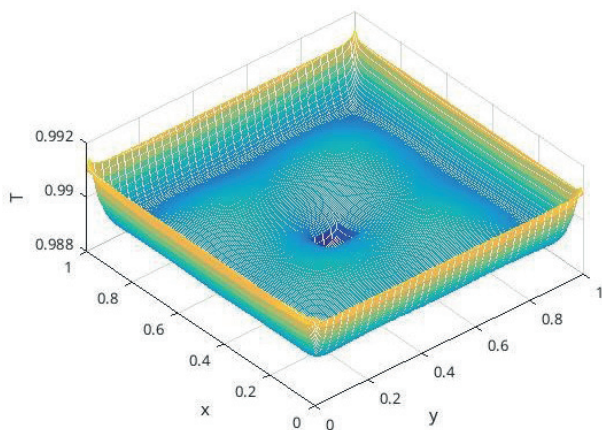


Рис. 18. Температура газа при $t = 1$ с

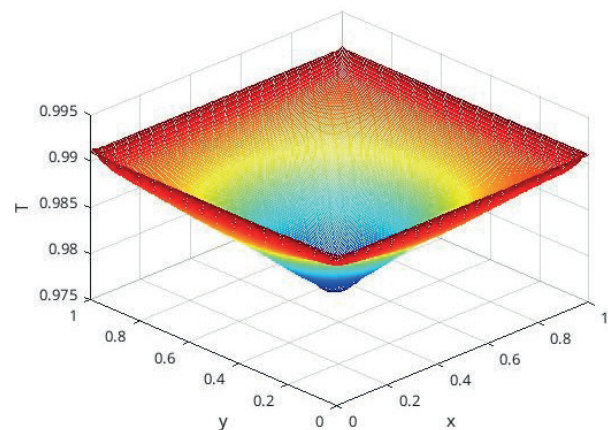


Рис. 19. Температура газа при $t = 30$ с

На следующих рисунках (рис. 20а – 20г), представляющих графическое изображение X -й компоненты скорости для четырех различных моментов времени, продемонстрировано возникновение закрутки течения воздуха в положительном направлении от нулевого значения.

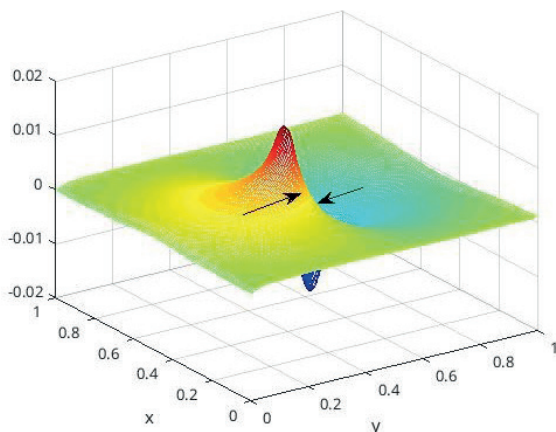


Рис. 20а. Вектор скорости при $t = 0.5$ с

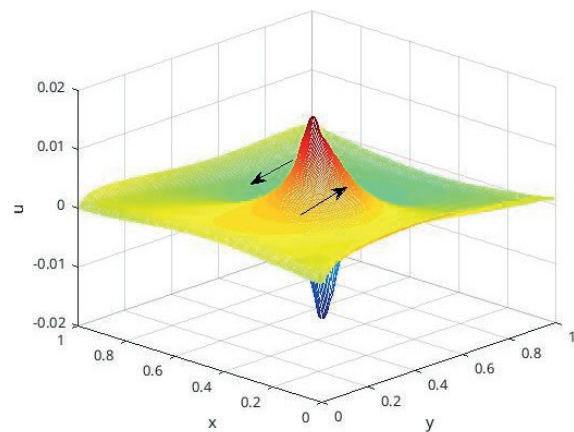


Рис. 20б. Вектор скорости при $t = 2$ с

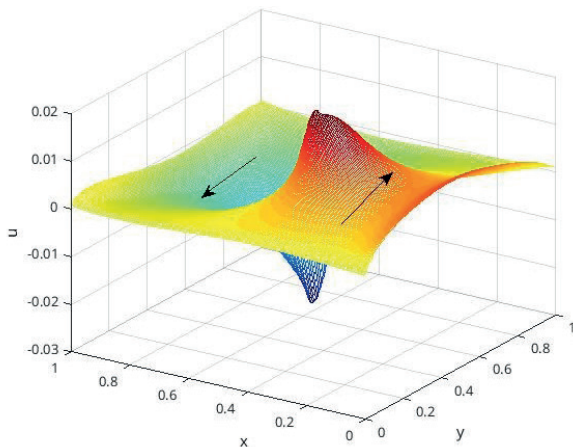


Рис. 20в. Вектор скорости при $t = 5$ с

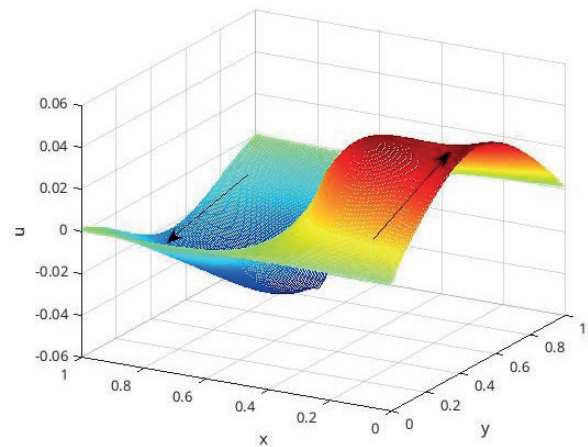


Рис. 20г. Вектор скорости при $t = 30$ с

Также представлены результаты трехмерных расчетов мгновенных линий тока частиц газа в области, близкой к вертикальной части ВЗП (рис. 21, 22).

Видно, как происходит закрутка газа вблизи нижней плоскости расчетного параллелепипеда и процесс передачи вращательного движения сплошной среды в вертикальную часть ВЗП [3, 6, 8–10, 13–14].

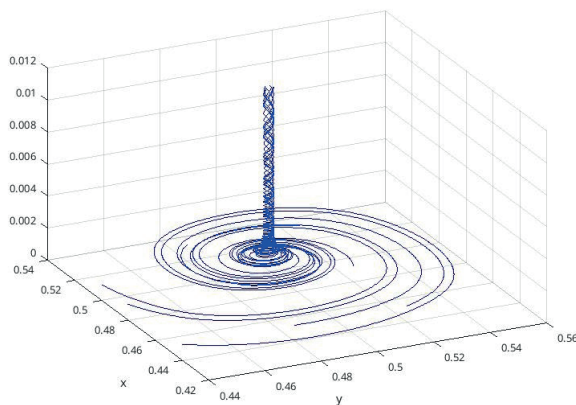


Рис. 21. Линии тока частиц газа

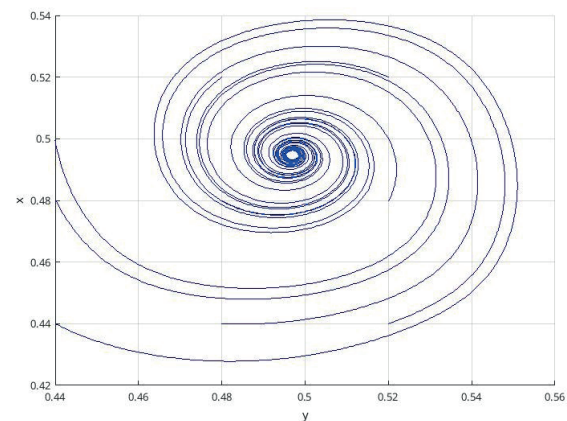


Рис. 22. Проекция линий тока частиц газа

Заключение

В работе проведена линейзация линейной системы уравнений с частными производными на точном решении – однородном покое. Для полученной линейризованной системы проведены численные исследования по созданию стабильного окружного движения воздуха в придонной части ВЗП с применением вертикальной трубы с вентилятором вытяжного действия, направляющим воздух по трубе снизу-вверх [8].

По результатам исследований можно сделать вывод, что численное решение линейризованной ПСУНС с поставленными начально-краевыми условиями описывает сложные течения вязкого сжимаемого теплопроводного газа. Установлено, что плотность и температура при таком сложном течении претерпевают заметные изменения на начальной стадии [6, 9]. При увеличении времени расчета термодинамические параметры и все течение в целом стабилизируются с постепенным выходом на стационарный режим.

Численный расчет скоростных характеристик трехмерного нестационарного течения вязкого теплопроводного газа в ВЗП, инициированном вертикальным продувом, показал, что закрутка газа в положительном направлении обусловлена наличием в уравнениях линейризованной ПСУНС дополнительных членов, описывающих ускорение Кориолиса. Таким образом, еще раз численно получила подтверждение схема возникновения ВЗП [2, 4, 5, 7, 8, 15].

Финансирование

Авторы заявляют об отсутствии источников финансирования.

Вклад авторов

Крутова И.Ю. – формулировка идеи и целей исследования, постановка задачи, выбор методов исследования; разработка концепции исследования, разработка методик измерения; анализ экспериментальных данных, выявление закономерностей, анализ полученных результатов; подбор литературных источников, редактирование текста статьи.

Бугаенко А.А. – выполнение измерений, первичная обработка результатов исследования, выявление закономерностей, проведение расчетов и подготовка заключения; подготовка текста статьи, участие в проведении исследования и обсуждении результатов.

Конфликт интересов

Конфликт интересов отсутствует.

Список литературы

1. *Баутин С.П., Крутова И.Ю.* Линеаризованная система уравнений газовой динамики при учете действия силы Кориолиса. Снежинск: СФТИ, 2019. 60 с.
2. *Баутин С.П., Крутова И.Ю., Обухов А.Г.* Газодинамическая теория восходящих закрученных потоков. Екатеринбург: УрГУПС, 2020. 400 с.
3. *Обухов А.Г.* Расчет скоростных характеристик восходящего закрученного потока газа в условиях бокового ветрового воздействия // Математические структуры и моделирование, 2020. № 3 (55). С. 61–71.
4. *Баутин С.П.* Торнадо и сила Кориолиса. Новосибирск: Наука, 2008. 96 с.
5. *Баутин С.П., Крутова И.Ю., Обухов А.Г., Баутин К.В.* Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчеты, эксперименты. Новосибирск: Наука; Екатеринбург: УрГУПС, 2013. 216 с.
6. *Абдубакова Л.В., Обухов А.Г.* Численный расчет термодинамических параметров закрученного потока газа, инициированного холодным вертикальным продувом // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. 2014. № 5 (107). С. 57–62.
7. *Баутин С.П., Дерябин С.Л., Крутова И.Ю., Обухов А.Г.* Разрушительные атмосферные вихри и вращение Земли вокруг оси. Екатеринбург: УрГУПС, 2017. 336 с.
8. *Баутин С.П., Крутова И.Ю.* Аналитическое и численное моделирование течений газа при учете действия силы Кориолиса. Екатеринбург: УрГУПС, 2019. 182 с.
9. *Абдубакова Л.В., Обухов А.Г.* Численный расчет плотности, температуры и давления закрученного потока газа при вертикальном продуве // Фундаментальные и прикладные исследования: проблемы и результаты, 2014. № 12. С. 108–112.
10. *Абдубакова Л.В., Обухов А.Г.* Расчет скоростей и линий тока трехмерного восходящего закрученного потока газа при вертикальном продуве // Инновации и инвестиции, 2014. № 9. С. 139–142.
11. *Баутин С.П., Обухов А.Г.* Математическое моделирование разрушительных атмосферных вихрей. Новосибирск: Наука, 2012. 152 с.
12. *Баутин С.П.* Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 2009. 368 с.
13. *Баутин С.П., Обухов А.Г.* Численное моделирование трехмерных нестационарных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа. Екатеринбург: УрГУПС, 2020. 287 с.
14. *Вараксин А.Ю., Ромаш М.Э., Копейцев В.Н., Горбачев М.А.* Физическое моделирование воздушных смерчей: некоторые безразмерные параметры // ТВТ, 2011. Т. 49. № 2. С. 317.
15. *Rotunno R.* Numerical Simulation of a Laboratory Vortex // J. Atmos. Sci., 1977. V. 34. P. 1942.

Complete system of Navier – Stokes equations: linearization and construction of solutions

A. A. Bugaenko^{1,2,✉}, I. Yu. Krutova^{2,✉}

¹ Federal State Unitary Enterprise «Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Research Institute of Technical Physics named after Academician E.I. Zababakhin», Snezhinsk, 456776, Russia

² FSBEI HE «Snezhinsk Institute of Physics and Technology of the National Research Nuclear University MEPhI», Snezhinsk, 456776, Russia

✉ BugaenkoAA@vniitf.ru

✉ IYKrutova@mephi.ru

Received January 18, 2025; revised January 29, 2025; accepted January 31, 2025

Modeling of atmospheric phenomena is carried out on the basis of systems of ordinary differential equations and partial differential equations with their subsequent numerical study. As a result of discretization of these equations, we arrive at systems with millions and even billions of unknowns. Due to the nonlinearity of the complete system of Navier–Stokes equations, constructing its solutions is quite labor-intensive. As a consequence, the linearization procedure is applied on the exact solution (homogeneous rest). For the linearized system, taking into account the action of gravity and Coriolis forces, the emergence and development of ascending swirling flows of different intensity is numerically modeled using blowing up the pipe. Numerical calculation of the velocity characteristics of a three-dimensional unsteady flow of viscous heat-conducting gas in an ascending swirling flow initiated by vertical blowing showed that the gas swirl occurs in the positive direction and is due to the presence of terms in the linearized complete system of Navier–Stokes equations describing the Coriolis acceleration. Thus, the pattern of the occurrence of an ascending swirling flow is once again numerically confirmed. A conclusion is also made about the possibility of applying this approach to the study of ascending swirling flows such as tornadoes and tropical cyclones.

Keywords: complete Navier–Stokes system of equations, Coriolis force, linearization, numerical modeling, blowing.

References

1. *Bautin S.P., Krutova I.Yu.* Linearizovannaya sistema uravnenij gazovoj dinamiki pri uchete dejstviya sily Koriolisa. [Linearized system of gas dynamics equations taking into account the Coriolis force]. Snezhinsk, SFTI Publ., 2019. 60 p.
2. *Bautin S.P., Krutova I.Yu., Obukhov A.G.* Gazodinamicheskaya teoriya voskhodyashchih zakruchennykh potokov. [Gas-dynamic theory of ascending swirling flows]. Yekaterinburg, UrGUPS Publ., 2020. 400 p.
3. *Obukhov A.G.* Raschet skorostnykh harakteristik voskhodyashchego zakruchennogo potoka gaza v usloviyah bokovogo vetrovogo vozdeystviya. [Calculation of the velocity characteristics of an ascending swirling gas flow under lateral wind conditions]. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2020, no. 3 (55), pp. 61–71 (in Russian).
4. *Bautin S.P.* Tornado i sila Koriolisa. [Tornado and the Coriolis force]. Novosibirsk, Nauka Publ., 2008. 96 p.
5. *Bautin S.P., Krutova I.Yu., Obukhov A.G., Bautin K.V.* Razrushitel'nye atmosferye vihri: teoremy, raschety, eksperimenty. [Destructive atmospheric vortices: theorems, calculations, experiments]. Novosibirsk, Nauka Publ., Ekaterinburg, UrGUPS Publ., 2013. 216 p.
6. *Abdubakova L.V., Obukhov A.G.* Chislennyj raschet termodinamicheskikh parametrov zakruchennogo potoka gaza, inicirovannogo holodnym vertikal'nym produvom. [Numerical calculation of thermodynamic parameters of swirling gas flow initiated by cold vertical blowing]. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenij. Neft' i gaz, 2014, no. 5 (107), pp. 57–62 (in Russian).
7. *Bautin S.P., Deryabin S.L., Krutova I.Yu., Obukhov A.G.* Razrushitel'nye atmosferye vihri i vrashchenie Zemli vokrug osi. [Destructive atmospheric vortices and the Earth's rotation around the axis]. Ekaterinburg, UrGUPS Publ., 2017. 336 p.

8. *Bautin S.P., Krutova I.Yu.* Analiticheskoe i chislennoe modelirovanie techenij gaza pri uchete dejstviya sily Koriolisa. [Analytical and numerical modeling of gas flows taking into account the Coriolis force]. Ekaterinburg, UrGUPS Publ., 2019. 182 p.
9. *Abdubakova L.V., Obukhov A.G.* Chislennyj raschet plotnosti, temperatury i davleniya zakruchennogo potoka gaza pri vertikal'nom produve [Numerical calculation of density, temperature and pressure of swirling gas flow during vertical blowing]. Fundamental'nye i prikladnye issledovaniya: problemy i rezul'taty, 2014, no. 12, pp. 108–112 (in Russian).
10. *Abdubakova L.V., Obukhov A.G.* Raschet skorostej i linij toka trekhmernogo voskhodyashchego zakruchennogo potoka gaza pri vertikal'nom produve. [Calculation of velocities and streamlines of three-dimensional ascending swirling gas flow during vertical blowing]. Innovacii i investicii, 2014, no. 9, pp. 139–142 (in Russian).
11. *Bautin S.P., Obukhov A.G.* Matematicheskoe modelirovanie razrushitel'nyh atmosferynyh vihref. [Mathematical modeling of destructive atmospheric vortices]. Novosibirsk, Nauka Publ., 2012. 152 p.
12. *Bautin S.P.* Harakteristicheskaya zadacha Koshi i ee prilozheniya v gazovoj dinamike [Characteristic Cauchy problem and its applications in gas dynamics]. Novosibirsk, Nauka Publ., 2009. 368 p.
13. *Bautin S.P., Obukhov A.G.* Chislennoe modelirovanie trekhmernykh nestacionarnykh techenij szhimaemogo vyazkogo teploprovodnogo gaza [Numerical modeling of three-dimensional unsteady flows of compressible viscous heat-conducting gas]. Ekaterinburg, Ural State Transport University Publ., 2020. 287 p.
14. *Varaksin A.Yu., Romash M.E., Kopeitsev V.N., Gorbachev M.A.* Fizicheskoe modelirovanie vozdushnykh smerchej: nekotorye bezrazmernye parametry. [Physical modeling of air tornadoes: some dimensionless parameters]. TVT, 2011, vol. 49, no. 2, pp. 317 (in Russian).
15. *Rotunno R.* Numerical Simulation of a Laboratory Vortex. J. Atmos. Sci., 1977, vol. 34, pp. 1942.