

УДК 517.9

Точные решения обобщенного нелинейного уравнения Вахненко – Паркеса

© 2025 г. К. М. Зуев, Н. А. Кудряшов

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

Рассматривается одно из уравнений семейства обобщенных уравнений Вахненко – Паркеса, описывающих распространение коротковолновых возмущений в релаксирующих средах в случае, когда амплитуда колебаний зависит от скорости распространения волны. Для данного уравнения получено общее решение, записанное через квадратуру, путем сведения его к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с использованием переменных бегущей волны. Исследовано влияние параметров уравнения на полученное решение. Найдены его точные решения. Периодические точные решения выражены через эллиптические функции Якоби. Кроме того, представлено явное решение, выражаемое через степенную функцию пространственной и временной переменных. Полученные точные решения могут быть использованы в качестве тестовых функций при анализе результатов численного моделирования процессов в релаксирующих средах, описываемых уравнениями типа Вахненко – Паркеса.

Ключевые слова: уравнение Вахненко – Паркеса, точные решения, решения в квадратурах, решения в переменных бегущей волны, эллиптические функции Якоби.

1. Введение

В 1992 г. в [1] для описания распространения коротковолновых возмущений в релаксирующих средах предложено уравнение, ныне известное как уравнение Вахненко:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) u + u = 0. \quad (1)$$

Переменная $u = u(x, t)$ соответствует безразмерному давлению. Релаксирующими называются среды с характерным временем изменения физических процессов (т.е. временем, за которое система стремится вернуться к состоянию равновесия, будучи выведенной из него посредством возмущения). Примерами подобного рода физических процессов могут быть распространение звуковых волн в вязкой жидкости, распространение ультразвука в биологических тканях и т. д. Известно, что в линейном приближении коротковолновые возмущения в релаксирующих средах описываются уравнением Клейна – Гордона. Уравнение (1) получается в случае учета нелинейности, обусловленной зависимостью скорости распространения волны от ее амплитуды. В [1] представлено однопетлевое солитонное решение данного уравнения, полученное путем редукции его к ОДУ с использованием переменных бегущей волны.

В работе [2] рассматривается уравнение в частных производных

$$uu_{xxt} - u_x u_{xt} + u^2 u_t = 0, \quad (2)$$

✉ К.М. Зуев: eutayn_2001@mail.ru
Н.А. Кудряшов: nakudr@gmail.com

Поступила в редакцию: 02.04.2025
После доработки: 15.04.2025
Принята к публикации: 22.04.2025

известное как уравнение Островского или уравнение Вахненко – Паркеса. В [2] оно получается в процессе поиска точного двух- и многопетлевого солитонного решения уравнения (1) с использованием введения новых независимых переменных, определяемых равенствами:

$$x = \theta(X, T) = T + \int_{-\infty}^X U(X', T) dX' + x_0, \quad t = X, \quad (3)$$

где $U(X, T) = u(x, t)$, x_0 – постоянная величина. При этом предполагается, что при $U \rightarrow 0$, $|X| \rightarrow \infty$ производная указанного выше интеграла по верхнему пределу стремится к нулю. В [3–11, 14] приведены его некоторые точные решения. В [19, 22] показано, что уравнение (2) проходит тест Пенлеве, и на основании группового анализа получена одна из форм записи солитонного решения. В [12] в результате группового анализа (2) получены три инфинитезимальных оператора, соответствующих группам преобразований данного уравнения.

Дальнейшие исследования, связанные с уравнением Вахненко – Паркеса, заключаются в изучении свойств и поиске решений различного рода модификаций (2). Известны обобщения уравнения (2) на двумерные и трехмерные случаи и их некоторые солитонные и периодические решения, представленные в [13, 15–18]. В рамках данной работы эта область исследований не рассматривается.

Другие обобщения уравнения (2) связаны с изменением степенной нелинейности множителя производной по времени. Так, в работе [19] по аналогии с введением в рассмотрение модифицированного уравнения Кортевега – де Вриза вводится уравнение

$$uu_{xxt} - u_x u_{xt} + u^3 u_t = 0. \quad (4)$$

Известно, что уравнения КдВ и мКдВ включают в себя члены uu_x и $u^2 u_x$ соответственно. В свою очередь уравнение Вахненко – Паркеса (2) и уравнение (4) содержат соответственно $u^2 u_t$ и $u^3 u_t$, в связи с чем уравнение (4) известно как модифицированное уравнение Вахненко – Паркеса. В [19] показано, что данное уравнение проходит тест Пенлеве и имеет солитонное решение. В [20] продемонстрировано, что (4) путем некоторых преобразований приводится к уравнению $\sin$ -Гордона, следовательно, его решение может быть выражено в виде топологического солитона.

В [21] рассматривается семейство уравнений Вахненко – Паркеса (2):

$$uu_{xxt} + au_x u_{xt} + bu^{2n} u_t = 0, \quad (5)$$

где a, b – ненулевые действительные константы, $n \in \mathbb{Z}^+$; при $a = -1$, $b = 1$ и $n = 1$ уравнение (5) переходит в уравнение Вахненко – Паркеса (2). В [21] представлены решения данного уравнения в виде солитонов при $n > \frac{1}{2}$ и в виде топологического солитона при $n = \frac{3}{2}$. В [22] на основе группового анализа получены некоторые точные решения уравнения.

В [23] изучается семейство модифицированного уравнения Вахненко – Паркеса (4):

$$uu_{xxt} + au_x u_{xt} + bu^{3n} u_t = 0, \quad (6)$$

где a, b – ненулевые действительные константы, $n \neq \frac{1}{3}$. При $a = -1$, $b = 1$ и $n = 1$ данное уравнение переходит в уравнение (4). В [23] установлено, что при $a = -1$, $n = 1$ уравнение (6) обладает свойством Пенлеве, а также выявлены его групповые симметрии. Найден ряд точных решений путем поиска решений в виде ряда, а также с использованием переменных бегущей волны.

Если учесть нелинейности семейств уравнений (5) и (6) вместе, то в результате имеем семейство уравнений, называемых обобщенными уравнениями Вахненко – Паркеса:

$$uu_{xxt} + \alpha u_x u_{xt} + (\beta u^{2n} + \gamma u^{3n}) u_t = 0, \quad (7)$$

где α, β, γ – ненулевые действительные константы, $n \neq \frac{1}{3}$. В [24] данное семейство уравнений с использованием переменных бегущей волны сводится к динамической системе. Для полученной динамической системы найдены первые интегралы. Далее, в зависимости от параметров α, n и γ и константы интегрирования, возникающей при нахождении первых интегралов этой динамической системы, исследуются изменения положения равновесия данной системы, а также бифуркации ее фазовых портретов.

2. Поиск решения обобщенного уравнения Вахненко – Паркеса в переменных бегущей волны

Рассмотрим уравнение (7) при $n = 1$:

$$uu_{xxt} + \alpha u_x u_{xt} + (\beta u^2 + \gamma u^3)u_t = 0. \quad (8)$$

В [24] представлены точные решения данного уравнения. Эти решения изучаются в зависимости от значений γ и константы интегрирования в первых интегралах динамической системы. Рассматриваются значения этих параметров, обуславливающие существование решений в виде действительных функций. Так, в случае $\alpha = -1$ приведены выражения точного решения, выраженного через эллиптический синус Якоби. Приведем два из них:

при $\gamma < 0$

$$\phi(\xi) = r_3 + \frac{(r_5 - r_3)(r_4 - r_3)}{(r_5 - r_4) \operatorname{sn}^2 \left(\frac{1}{4} \sqrt{-\gamma(r_6 - r_4)(r_5 - r_3)} |\xi|; \sqrt{\frac{(r_5 - r_4)(r_6 - r_3)}{(r_6 - r_4)(r_5 - r_3)}} \right) + r_3 - r_5}, \quad (9)$$

где r_i – корни многочлена в правой части уравнения ($i = \overline{3, 6}$),

$$\phi_\xi^2 = -\frac{\gamma}{4}(\phi - r_3)(\phi - r_4)(r_5 - \phi)(r_6 - \phi); \quad (10)$$

при $\gamma > 0$

$$\phi(\xi) = -\frac{\beta}{\gamma} + \frac{12\beta}{9\gamma + \beta^2 \xi^2}. \quad (11)$$

Также в случае $\alpha > 1$ приведены выражения точного решения в виде негладких волн при различных условиях на γ и g , обеспечивающих действительность решения.

Целью данной работы является поиск точных решений уравнения (8) при других значениях α . Для этого будем искать решения в переменных бегущей волны:

$$u = \phi(\xi), \quad \xi = x - C_0 t, \quad (12)$$

где C_0 – скорость распространения волны. Подставляя переменные (12) в уравнение (8) и умножая его на ϕ_ξ , проинтегрируем его один раз по ξ . В итоге приходим к следующему нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\phi \phi_{\xi\xi} + \frac{\alpha - 1}{2} (\phi_\xi)^2 + \frac{\gamma}{4} \phi^4 + \frac{\beta}{3} \phi^3 + g = 0, \quad (13)$$

где g – постоянная интегрирования.

Первые два слагаемых данного уравнения могут быть преобразованы при помощи следующей формулы:

$$\phi\phi_{\xi\xi} + \frac{\alpha-1}{2}(\phi_{\xi})^2 = \frac{2}{\alpha+1}\phi^{\frac{3-\alpha}{2}}\left(\phi^{\frac{\alpha+1}{2}}\right)_{\xi\xi}. \quad (14)$$

Данный прием используется, например, в работе [25]. С учетом введенного преобразования запишем уравнение (13) в виде

$$\frac{2}{\alpha+1}\phi^{\frac{3-\alpha}{2}}\left(\phi^{\frac{\alpha+1}{2}}\right)_{\xi\xi} + \frac{\gamma}{4}\phi^4 + \frac{\beta}{3}\phi^3 + g = 0. \quad (15)$$

Для поиска первого интеграла уравнения (15) используем новую функцию $z(\phi) = \phi^{\frac{\alpha+1}{2}}$; при этом $\phi = z^{\frac{2}{\alpha+1}}$ и

$$z_{\xi} = \frac{\alpha+1}{2}\phi^{\frac{\alpha-1}{2}}\phi_{\xi}. \quad (16)$$

Тогда уравнение (15) принимает вид

$$z_{\xi\xi} + \frac{(\alpha+1)\gamma}{8}z^{\frac{\alpha+5}{\alpha+1}} + \frac{(\alpha+1)\beta}{6}z^{\frac{\alpha+3}{\alpha+1}} + \frac{(\alpha+1)g}{2}z^{\frac{\alpha-3}{\alpha+1}} = 0. \quad (17)$$

Умножая это уравнение на z_{ξ} и интегрируя один раз по ξ , имеем форму первого интеграла уравнения (13), принимая во внимание введенную замену переменных:

$$\frac{z_{\xi}^2}{2} + \frac{(\alpha+1)^2\gamma}{16(\alpha+3)}z^{\frac{2\alpha+6}{\alpha+1}} + \frac{(\alpha+1)^2\beta}{12(\alpha+2)}z^{\frac{2\alpha+4}{\alpha+1}} + \frac{(\alpha+1)^2g}{4(\alpha-1)}z^{\frac{2\alpha-2}{\alpha+1}} + C_1 = 0, \quad (18)$$

где C_1 – постоянная интегрирования. Полученное выражение для первого интеграла справедливо при $\alpha \neq -3$, $\alpha \neq -2$, $\alpha \neq 1$. Проведя обратную замену с помощью соотношения (16), имеем

$$\frac{\alpha+1}{2}\phi^{\frac{\alpha-1}{2}}\phi_{\xi} = \sqrt{-\frac{(\alpha+1)^2\gamma}{8(\alpha+3)}\phi^{\alpha+3} - \frac{(\alpha+1)^2\beta}{6(\alpha+2)}\phi^{\alpha+2} - \frac{(\alpha+1)^2g}{2(\alpha-1)}\phi^{\alpha-1} - 2C_1}, \quad (19)$$

откуда после деления переменных получаем

$$\xi = \frac{\alpha+1}{2} \int \frac{\phi^{\frac{\alpha-1}{2}} d\phi}{\sqrt{-\frac{(\alpha+1)^2\gamma}{8(\alpha+3)}\phi^{\alpha+3} - \frac{(\alpha+1)^2\beta}{6(\alpha+2)}\phi^{\alpha+2} - \frac{(\alpha+1)^2g}{2(\alpha-1)}\phi^{\alpha-1} - 2C_1}}. \quad (20)$$

Вынося $\frac{(\alpha+1)^2}{4}\phi^{\alpha-1}$ из-под радикала и выполняя сопутствующие преобразования, находим общее решение уравнения (13), выраженное через квадратуру:

$$\xi = \int \frac{d\phi}{\sqrt{-\frac{\gamma}{2(\alpha+3)}\phi^4 - \frac{2\beta}{3(\alpha+2)}\phi^3 - \frac{8C_1}{(\alpha+1)^2}\phi^{1-\alpha} - \frac{2g}{\alpha-1}}}. \quad (21)$$

3. Точные решения обобщенного уравнения Вахненко – Паркеса

При произвольном значении параметра α интеграл (21) не выражается в явной форме. Поэтому в рамках данного раздела рассмотрим поиск точных решений уравнения (13), получаемых из квадратуры (21) в зависимости от α и постоянных g и C_1 .

Решения уравнения (13) при $\alpha = -1$, $\alpha = 1$, $\alpha = -2$, $\alpha = -3$ не определяются с помощью полученной квадратуры (21). В последних трех случаях из (13) имеем:

при $\alpha = 1$

$$\begin{aligned}\phi_\xi^2 &= -\frac{\gamma}{8}\phi^4 - \frac{2\beta}{9}\phi^3 + g \ln \phi + C_2, \\ \xi &= \int \frac{d\phi}{\sqrt{-\frac{\gamma}{8}\phi^4 - \frac{2\beta}{9}\phi^3 + g \ln \phi + C_2}};\end{aligned}\quad (22)$$

при $\alpha = -2$

$$\begin{aligned}\phi_\xi^2 &= -\frac{\gamma}{2}\phi^4 - \frac{2\beta}{3}\phi^4 \ln \phi + C_3\phi^3 + \frac{2g}{3}, \\ \xi &= \int \frac{d\phi}{\sqrt{-\frac{\gamma}{2}\phi^4 - \frac{2\beta}{3}\phi^4 \ln \phi + C_3\phi^3 + \frac{2g}{3}}};\end{aligned}\quad (23)$$

при $\alpha = -3$

$$\begin{aligned}\phi_\xi^2 &= -\frac{\gamma}{2}\phi^4 \ln \phi - \frac{2\beta}{3}\phi^3 + C_4\phi^4 + \frac{g}{2}, \\ \xi &= \int \frac{d\phi}{\sqrt{-\frac{\gamma}{2}\phi^4 \ln \phi - \frac{2\beta}{3}\phi^3 + C_4\phi^4 + \frac{g}{2}}}.\end{aligned}\quad (24)$$

Здесь C_2, C_3, C_4 – постоянные интегрирования.

Случай $\alpha = -1$. Значение интеграла (21) не определено. Покажем, что уравнение (13) имеет нетривиальные решения при указанном значении α . Для этого разделим его на ϕ :

$$\phi_{\xi\xi} - (\phi_\xi)^2 \phi^{-1} + \frac{\gamma}{4}\phi^3 + \frac{\beta}{3}\phi^2 + g\phi^{-1} = 0. \quad (25)$$

Введем следующую замену:

$$\phi_\xi = w, \quad (26)$$

тогда уравнение (25) может быть записано в виде

$$w_\phi - \phi^{-1}w + \frac{\gamma}{4}\phi^3 w^{-1} + \frac{\beta}{3}\phi^2 w^{-1} + g\phi^{-1}w^{-1} = 0. \quad (27)$$

Определим подстановку

$$w = \sqrt{q(\phi)}, \quad (28)$$

тогда (27) приобретает вид:

$$q_\phi - \frac{2q}{\phi} = -\frac{\gamma}{2}\phi^3 - \frac{2\beta}{3}\phi^2 - 2g\phi^{-1}. \quad (29)$$

Умножим уравнение (29) на ϕ^{-2} :

$$\phi^{-2}q_\phi - \frac{2}{\phi^3} = (\phi^{-2}q)_\phi = -\frac{\gamma}{2}\phi - \frac{2\beta}{3} - 2g\phi^{-3}. \quad (30)$$

Интегрируя (30) по ϕ , после умножения на ϕ^2 имеем

$$q = -\frac{\gamma}{4}\phi^4 - \frac{2\beta}{3}\phi^3 + C_5\phi^2 + g, \quad (31)$$

где C_5 – постоянная интегрирования. Учитывая, что $q = w^2 = \phi_\xi^2$, можно переписать получившееся уравнение в виде

$$\phi_\xi^2 = -\frac{\gamma}{4}\phi^4 - \frac{2\beta}{3}\phi^3 + C_5\phi^2 + g. \quad (32)$$

Разделяя переменные, получаем квадратуру уравнения (25):

$$\xi = \int \frac{d\phi}{\sqrt{-\frac{\gamma}{4}\phi^4 - \frac{2\beta}{3}\phi^3 + C_5\phi^2 + g}}. \quad (33)$$

Квадратуру (33) можно выразить через эллиптические функции Якоби. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ – действительные корни многочлена под корнем в (33).

Они подчинены выражениям

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= -\frac{8\beta}{3\gamma}, \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4 &= -\frac{4C_5}{\gamma}, \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4 &= 0, \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 &= -\frac{4g}{\gamma}. \end{aligned} \quad (34)$$

При этом квадратура (33) с учетом разложения многочлена под корнем на множители записывается в виде

$$\xi = \sqrt{-\frac{4}{\gamma}} \int \frac{d\phi}{\sqrt{(\phi - \lambda_1)(\phi - \lambda_2)(\phi - \lambda_3)(\phi - \lambda_4)}}, \quad (35)$$

Путем приведения данного интеграла к эллиптическому интегралу первого рода в итоге имеем выражение точного решения уравнения (13) при $\alpha = -1$:

$$\phi(\xi) = \lambda_1 + \frac{\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 - \lambda_1^2}{(\lambda_3 - \lambda_2) \operatorname{sn}^2\left(\frac{1}{4}\sqrt{\gamma(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_3)}(\xi - C_5); k\right)}, \quad (36)$$

где

$$k^2 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_3)}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}. \quad (37)$$

Полученный результат (36) с точностью до констант совпадает с решением (9), представленным в [24] в случае $\alpha = -1$.

Случай $C_1 = 0$. Интеграл (21) принимает вид

$$\xi = \int \frac{d\phi}{\sqrt{-\frac{\gamma}{2(\alpha+3)}\phi^4 - \frac{2\beta}{3(\alpha+2)}\phi^3 - \frac{2g}{\alpha-1}}}. \quad (38)$$

Видно, что полученная квадратура может быть выражена через эллиптические функции Якоби при помощи приема, аналогичного вычислению явного вида решения (36). Пусть $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ – действительные корни многочлена под знаком радикала в (21), удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{aligned} \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 &= -\frac{4\beta(\alpha+3)}{3\gamma(\alpha+2)}, \\ \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_1\mu_4 + \mu_2\mu_3 + \mu_2\mu_4 + \mu_3\mu_4 &= 0, \\ \mu_1\mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_2\mu_4 + \mu_1\mu_3\mu_4 + \mu_2\mu_3\mu_4 &= 0, \\ \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 &= \frac{4g(\alpha+3)}{\gamma(\alpha-1)}. \end{aligned} \quad (39)$$

При помощи приведения (38) к эллиптическому интегралу первого рода, получаем явный вид точного решения, выраженный через эллиптический синус Якоби:

$$\phi(\xi) = \mu_1 + \frac{\mu_1\mu_2 - \mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_3 - \mu_1^2}{(\mu_3 - \mu_2) \operatorname{sn}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\gamma(\mu_2 - \mu_4)(\mu_1 - \mu_3)}{2(\alpha+3)}}(\xi - C_6); l\right)}, \quad (40)$$

где

$$l^2 = \frac{(\mu_1 - \mu_4)(\mu_1 - \mu_3)}{(\mu_2 - \mu_3)(\mu_2 - \mu_4)}, \quad (41)$$

C_6 – постоянная интегрирования. Очевидно, что полученное формальное решение (40) определено при значениях $\alpha \neq -3, \alpha \neq -2, \alpha \neq 1$.

Случай $g = 0, \alpha = 1$. Покажем, что при заданных значениях g и α имеется точное решение уравнения (13), также выражающееся через эллиптический синус Якоби. Квадратура (21) принимает вид

$$\xi = \int \frac{d\phi}{\sqrt{-\frac{\gamma}{8}\phi^4 - \frac{2\beta}{9}\phi^3 - 2C_1}}. \quad (42)$$

Пусть v_1, v_2, v_3, v_4 – действительные корни многочлена в знаменателе. Тогда, с учетом

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 + v_4 &= -\frac{16\beta}{9\gamma}, \\ v_1v_2 + v_1v_3 + v_1v_4 + v_2v_3 + v_2v_4 + v_3v_4 &= 0, \\ v_1v_2v_3 + v_1v_2v_4 + v_1v_3v_4 + v_2v_3v_4 &= 0, \\ v_1v_2v_3v_4 &= \frac{16C_1}{\gamma}, \end{aligned} \quad (43)$$

имеем точное решение уравнения (13):

$$\phi(\xi) = v_1 + \frac{v_1v_2 - v_2v_3 + v_1v_3 - v_1^2}{(v_3 - v_2)\operatorname{sn}^2\left(\frac{1}{4}\sqrt{\gamma(v_2 - v_4)(v_1 - v_3)}(\xi - C_7); m\right)}, \quad (44)$$

где

$$m^2 = \frac{(v_1 - v_4)(v_1 - v_3)}{(v_2 - v_3)(v_2 - v_4)}, \quad (45)$$

C_7 – постоянная интегрирования.

Случай $g = 0, C_1 = 0$. Полагая все константы интегрирования в квадратуре (21) равными нулю, получим еще одно точное решение уравнения (13). При этом квадратура (21) непосредственно выражается через степенную функцию от ϕ следующим образом:

$$\xi = \int \frac{d\phi}{\sqrt{-\frac{\gamma}{2(\alpha+3)}\phi^4 - \frac{2\beta}{3(\alpha+2)}\phi^3}} = \frac{3(\alpha+2)}{\beta} \sqrt{-\frac{\gamma}{2(\alpha+3)} - \frac{2\beta}{3(\alpha+2)}\phi^{-1}} + C_8, \quad (46)$$

где C_8 – постоянная интегрирования. Видно, что полученное представление решения может быть записано в явном виде. В результате его преобразований имеем

$$\phi(\xi) = -\frac{1}{\frac{\beta}{6(\alpha+2)}(\xi + C_8)^2 + \frac{3\gamma(\alpha+2)}{4\beta(\alpha+3)}}. \quad (47)$$

В результате получена зависимость $\phi \propto \xi^{-2}$. В частности, при $\alpha = -1$ решение (47) с точностью до констант совпадает со степенным решением (11), представленным в [24]. Однако данное решение справедливо и при других значениях параметра α , лишь только оно не является тривиальным, что выполняется в случаях $\alpha \neq -2, \alpha \neq -3$.

4. Заключение

Рассмотрено обобщенное уравнение Вахненко – Паркеса. С использованием переменных бегущей волны проведена редукция данного уравнения к обыкновенному дифференциальному уравнению. Найдено его общее решение, записанное через квадратуру, а также некоторые точные решения. При $\alpha = -1$ найденное точное решение, выражающееся через эллиптические функции Якоби, эквивалентно (9), представленному в [24]. Кроме того, найдены периодические решения в случаях $C_1 = 0, g = 0$, также выражающиеся через эллиптические функции Якоби. В случае одновременного выполнения

равенств $C_1 = 0$, $g = 0$ точное решение выражается в виде степенной функции координаты и времени при $\alpha \neq -2$, $\alpha \neq -3$, что по характеру поведения совпадает с представленным в [24] решением (11) при $\alpha = -1$. Полученные точные решения могут быть использованы в качестве тестовых функций при анализе результатов численного моделирования процессов в релаксирующих средах, описываемых уравнениями типа Вахненко – Паркеса.

Финансирование

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект государственного задания № FSWU-2023-0031).

Конфликт интересов

Конфликт интересов отсутствует.

Вклад авторов

К.М. Зуев – построение точных решений, подготовка текста статьи, обсуждение результатов.

Н.А. Кудряшов – постановка задачи, обсуждение результатов.

Список литературы

1. *Vakhnenko V.O.* Solitons in a nonlinear model medium // *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1992. V. 25. № 15. P. 4181–4187. DOI: 10.1088/0305-4470/25/15/025.
2. *Vakhnenko V.O., Parkes E.J.* The two loop soliton solution of the Vakhnenko equation // *Nonlinearity*, 1998. V. 11. P. 1457–1464. DOI: 10.1088/09517715/11/6/001.
3. *Roshid H., Kabir M., Bhowmik R., Datta B.K.* Investigation of Solitary wave solutions for Vakhnenko – Parkes equation via exp-function and $\text{Exp}(-\phi(\xi))$ expansion method // *SpringerPlus*, 2014. V. 3 article number 692. DOI: 10.1186/21931801-3-692.
4. *Baskonus H.M., Bulut H., Emir D.G.* Regarding new complex analytical solutions for the nonlinear partial Vakhnenko – Parkes differential equation via Bernoulli sub-equation function method // *Mathematics Letters*, 2015. V. 1. № 1. P. 1–9. DOI: 10.11648/j.ml.20150101.11.
5. *Vakhnenko V.O., Parkes E.J.* Approach in Theory of Nonlinear Evolution Equations: The Vakhnenko – Parkes Equation // in book: *Top 5 Contributions in Applied Mathematics: 2nd Edition*, 2019. DOI: 10.29290/T5CAMATH2.2.1.2019.2-41.
6. *Hoque M., Rahman M.A.* Multisoliton solutions, completely elastic collisions and non-elastic fusion phenomena of two PDEs // *Pramana-Journal of Physics*, 2017. V. 88:86. P. 9. DOI: 10.1007/s12043-017-1390-3.
7. *Gu Yongyi, Yuan W., Aminakbari N., Jiang Q.* Exact Solutions of the Vakhnenko – Parkes Equation with Complex Method // *Journal of Function Spaces*, 2017. V. 2017. P. 1–6. DOI: 10.1155/2017/6521357.
8. *Yel Gu'lnur, Akturk Tolga.* Application of the modified exponential function method to Vakhnenko – Parkes equation // *Mathematics in Natural Science*, 2020. V. 6. P. 8–14. DOI: 10.22436/mns.06.01.02
9. *Attia Raghda A.M., Elagan S.K., Alharthi Meteub, Khater M.* New types of exact solutions of high-frequency waves model in the relaxation medium // *Thermal Science*, 2021. V. 25. P. 233–238. DOI: 10.2298/TSCI21S2233A.
10. *Pankaj R. D.* A novel narration for propagation of wave in relaxing medium by expansion scheme // *Advances and Applications in Mathematical Sciences*, 2021. V. 20. P. 1517–1521.
11. *Khater M. MA, Shabbir Muhammad, Al-Ghamdi A., Higazy M.* Novel soliton wave solutions of the Vakhnenko–Parkes equation arising in the relaxation medium // *Journal of Ocean Engineering and Science*, 2022. DOI: 10.1016/j.joes.2022.02.015.
12. *Hussain A., Kara A.H., Zaman F.D.* An invariance analysis of the Vakhnenko–Parkes Equation // *Chaos, Solitons & Fractals*, 2023. V. 171. P.113423. DOI: 10.1016/j.chaos.2023.113423
13. *Fan Z-Y.* New soliton solutions for the local fractional Vakhnenko – Parkes equation // *Thermal Science*, 2023. V.27. iss.5. P. 3877–3882 DOI: 10.2298/TSCI2305877F
14. *Seadawy A., Albarakati W., Ali A., Baleanu D.* Propagation of traveling wave solutions to the Vakhnenko – Parkes dynamical equation via modified mathematical methods // *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, 2022. V. 37. P. 21–34. DOI: 10.1007/s11766-022-4056-y.
15. *Yeşim Sağlam Özkan, Seadawy Aly R., Yaşar Emrullah.* Multi-wave, breather and interaction solutions to (3+1) dimensional Vakhnenko–Parkes equation arising at propagation of high-frequency waves in a relaxing medium // *Journal of Taibah University for Science*, 2021. V. 15. № 1. P. 666–678. DOI: 10.1080/16583655.2021.1999053.
16. *Meng Q., He B.* New Interaction Solutions for a (2 + 1) Dimensional Vakhnenko Equation // *Complexity*, 2020. P. 1–9. DOI: 10.1155/2020/5620245.

17. Adeyemo O. D., Khalique Ch. M.. Novel exact solutions and conserved vectors of the first extended modified (3+1)-dimensional integrable Vakhnenko – Parkes equation // Discrete and Continuous Dynamical Systems – S, 2024. V. 18. Iss. 4. DOI: 10.3934/dcdss.2024196
18. Kumar S., Mann N.. Abundant closed-form solutions of the (3+1)-dimensional Vakhnenko – Parkes equation describing the dynamics of various solitary waves in ocean engineering // Journal of Ocean Engineering and Science, 2022. DOI: 10.1016/j.joes.2022.04.007.
19. Wazwaz A.M. The integrable Vakhnenko – Parkes (VP) and the modified Vakhnenko – Parkes (MVP) equations: Multiple real and complex soliton solutions // Chinese Journal of Physics, 2019. V. 57. P. 375–381. DOI: 10.1016/j.cjph.2018.11.004.
20. Sakovich S. On a Modified Vakhnenko – Parkes Equation // Nonlinear Phenomena in Complex Systems, 2019. V. 22(2). P. 205–207.
21. Majid F., Houria T., Hayat T., Aldossary O., Biswas A. Solitary wave solutions of the Vakhnenko – Parkes equation // Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 2012. V. 17. P. 60–65. DOI: 10.15388/NA.17.1.14078.
22. Kumar S. Painlevé analysis and invariant solutions of Vakhnenko – Parkes (VP) equation with power law nonlinearity // Nonlinear Dynamics, 2016. V. 85. DOI: 10.1007/s11071-016-2759-4.
23. Jyoti D., Kumar S. Modified Vakhnenko–Parkes equation with power law nonlinearity: Painlevé analysis, analytic solutions and conservation laws // The European Physical Journal Plus, 2020. V. 135. P. 762. DOI: 10.1140/epjp/s13360-020-00785-y.
24. Fan F., Chen X. Dynamical behavior of traveling waves in a generalized VP-mVP equation with non-homogeneous power law nonlinearity // AIMS Mathematics, 2023. V. 8. № 8. Pp. 17514–17538. DOI: 10.3934/math.2023895.
25. Кудряшов Н.А. Алгоритм построения первых интегралов одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Вестник НИЯУ МИФИ, 2022. Т. 11. № 2. С. 109–116. DOI: 10.56304/S2304487X22020080.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2025, vol. 14, no. 3, pp. 214–224

Exact solutions of generalized nonlinear Vakhnenko – Parkes equation

K. M. Zuev , N. A. Kudryashov 

National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409, Russia

 eutayn_2001@mail.ru

 nakudr@gmail.com

Received April 02, 2025; revised April 15, 2025; accepted April 22, 2025

In this paper, one of generalized Vakhnenko–Parkes' family equations is considered describing the propagation of short-wave disturbances in relaxing media, taking into account the dependence of the wave velocity on the amplitude. A general quadrature solution is obtained for the equation under consideration by reducing it to an ordinary differential equation using traveling wave variables. Some formal exact solutions of the initial equation are found. Periodic exact solutions are expressed in terms of Jacobi elliptic functions. An explicit solution is also presented, expressed in terms of a power function of spatial and temporal variables. The obtained exact solutions can be used as test functions when analyzing the results of numerical simulation of processes in relaxing medium described by Vakhnenko–Parkes type equations.

Keywords: Vakhnenko – Parkes equation, exact solutions, solutions in quadratures, solutions in traveling wave variables, Jacobi elliptic functions

References

1. Vakhnenko V.O. Solitons in a nonlinear model medium. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1992. Vol. 25. No.15. Pp. 4181–4187. DOI: 10.1088/0305-4470/25/15/025.
2. Vakhnenko V.O., Parkes E. The two loop soliton solution of the Vakhnenko equation. *Nonlinearity*, 1998. Vol. 11. pp. 1457–1464. DOI: 10.1088/09517715/11/6/001.
3. Roshid H., Kabir M., Bhowmik R., Datta B.K. Investigation of Solitary wave solutions for Vakhnenko–Parkes equation via exp-function and $\text{Exp}(-\phi(\xi))$ expansion method. *SpringerPlus*, 2014. Vol. 3, article number 692. DOI: 10.1186/21931801-3-692.
4. Baskonus H.M., Bulut H., Emir D.G. Regarding new complex analytical solutions for the nonlinear partial Vakhnenko–Parkes differential equation via Bernoulli sub-equation function method. *Mathematics Letters*, 2015. Vol. 1. No. 1. Pp. 1–9. DOI: 10.11648/j.ml.20150101.11.
5. Vakhnenko V.O., Parkes E.J. Approach in Theory of Nonlinear Evolution Equations: The Vakhnenko – Parkes Equation / in book: *Top 5 Contributions in Applied Mathematics: 2nd Edition*, 2019. DOI: 10.29290/T5CAMATH2.2.1.2019.2-41.
6. Hoque M., Rahman M.A. Multisoliton solutions, completely elastic collisions and non-elastic fusion phenomena of two PDEs. *Pramana-Journal of Physics*, 2017. Vol. 88:86. Pp. 9. DOI: 10.1007/s12043-017-1390-3.
7. Gu Yongyi, Yuan W., Aminakbari N., Jiang Q. Exact Solutions of the Vakhnenko – Parkes Equation with Complex Method. *Journal of Function Spaces*, 2017. Vol. 2017. Pp. 1–6. DOI: 10.1155/2017/6521357.
8. Yel Gu'lnur, Akturk Tolga. Application of the modified exponential function method to Vakhnenko–Parkes equation. *Mathematics in Natural Science*, 2020. Vol. 6. Pp. 8–14. DOI: 10.22436/mns.06.01.02.
9. Attia Raghda A.M., Elagan S.K., Alharthi Meteub, Khater M. New types of exact solutions of high-frequency waves model in the relaxation medium. *Thermal Science*, 2021. Vol. 25. Pp. 233–238. DOI: 10.2298/TSCI21S2233A.
10. Pankaj R.D. A novel narration for propagation of wave in relaxing medium by expansion scheme. *Advances and Applications in Mathematical Sciences*, 2021. Vol. 20. Pp. 1517–1521.
11. Khater M. MA, Shabbir Muhammad, Al-Ghamdi A., Higazy M. Novel soliton wave solutions of the Vakhnenko–Parkes equation arising in the relaxation medium. *Journal of Ocean Engineering and Science*, 2022. DOI: 10.1016/j.joes.2022.02.015.
12. Hussain A., Kara A.H., Zaman F.D. An invariance analysis of the Vakhnenko–Parkes Equation. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2023. Vol. 171. Pp. 113423. DOI: 10.1016/j.chaos.2023.113423.
13. Fan Z-Y. New soliton solutions for the local fractional Vakhnenko – Parkes equation. *Thermal Science*, 2023. Vol. 27. Iss. 5. Pp. 3877–3882. DOI: /10.2298/TSCI2305877F.
14. Seadawy A., Albarakati W., Ali A., Baleanu D. Propagation of traveling wave solutions to the Vakhnenko – Parkes dynamical equation via modified mathematical methods. *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, 2022. Vol. 37. Pp. 21–34. DOI: 10.1007/s11766-022-4056-y.
15. Yeşim Sağlam Özkan, Seadawy Aly R., Yaşar Emrullah. Multi-wave, breather and interaction solutions to (3+1) dimensional Vakhnenko–Parkes equation arising at propagation of high-frequency waves in a relaxing medium. *Journal of Taibah University for Science*, 2021. Vol. 15. № 1. Pp. 666–678. DOI: 10.1080/16583655.2021.1999053.
16. Meng Q., He B. New Interaction Solutions for a (2+1) Dimensional Vakhnenko Equation. *Complexity*, 2020. Pp. 1–9. DOI: 10.1155/2020/5620245.
17. Adeyemo O. D., Khalique Ch. M.. Novel exact solutions and conserved vectors of the first extended modified (3+1)-dimensional integrable Vakhnenko – Parkes equation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems – S*, 2024. Vol. 18. Iss. 4. DOI:10.3934/dcdss.2024196.
18. Kumar S., Mann N.. Abundant closed-form solutions of the (3+1)-dimensional Vakhnenko – Parkes equation describing the dynamics of various solitary waves in ocean engineering. *Journal of Ocean Engineering and Science*, 2022. DOI: /10.1016/j.joes.2022.04.007.
19. Wazwaz A.M. The integrable Vakhnenko–Parkes (VP) and the modified Vakhnenko–Parkes (MVP) equations: Multiple real and complex soliton solutions. *Chinese Journal of Physics*, 2019. Vol. 57. Pp. 375–381. DOI: 10.1016/j.cjph.2018.11.004.
20. Sakovich S. On a Modified Vakhnenko – Parkes Equation. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2019. Vol. 22(2). Pp. 205–207.
21. Majid F., Houria T., Hayat T., Aldossary O., Biswas A. Solitary wave solutions of the Vakhnenko – Parkes equation. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 2012. Vol. 17. Pp. 60–65. DOI: 10.15388/NA.17.1.14078.
22. Kumar S. Painlevé analysis and invariant solutions of Vakhnenko–Parkes (VP) equation with power law nonlinearity. *Nonlinear Dynamics*, 2016. Vol. 85. DOI: 10.1007/s11071-016-2759-4.
23. Jyoti D., Kumar S. Modified Vakhnenko–Parkes equation with power law nonlinearity: Painlevé analysis, analytic solutions and conservation laws. *The European Physical Journal Plus*, 2020. Vol. 135. Pp. 762. DOI: 10.1140/epjp/s13360-020-00785-y.
24. Fan F., Chen X. Dynamical behavior of traveling waves in a generalized VP-mVP equation with non-homogeneous power law nonlinearity. *AIMS Mathematics*, 2023. Vol. 8. No. 8. Pp. 17514–17538. DOI: 10.3934/math.2023895.
25. Kudryashov N.A. Algoritm postroeniya pervykh integralov odnogo klassa nelineinykh differentsial'nykh uravneniy vtorogo poriyadka [Algorithm for Constructing the First Integrals for One Class of Nonlinear Differential Equations of the Second Order]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2022. Vol. 11. No. 2. Pp. 109–116. DOI: 10.56304/S2304487X22020080 (in Russian).