Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», 2025, т. 14, № 2, с. 116 – 130

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

https://doi.org/10.26583/vestnik.2025.2.3 *Оригинальная статья* / *Original paper*

УДК 517.9

Многомерные нелинейные уравнения Шредингера с потенциалом и дисперсией общего вида: точные решения и редукции

© **2025 г. А. Д. Полянин [1], Н. А. Кудряшов [2]**

[1] Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия
[2] Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

Исследуются многомерные нелинейные уравнения Шредингера общего вида, потенциал и дисперсия которых задаются одной или двумя произвольными функциями. Рассматриваемые уравнения естественным образом обобщают ряд родственных нелинейных уравнений с частными производными, которые встречаются в различных разделах теоретической физики, включая нелинейную оптику, сверхпроводимость и физику плазмы. Описаны многомерные и одномерные несимметрийные редукции, приводящие исследуемые нелинейные уравнения Шредингера к более простым уравнениям меньшей размерности или обыкновенным дифференциальным уравнениям (или системам обыкновенных дифференциальных уравнений). Специальное внимание уделяется поиску решений с радиальной симметрией. С помощью методов обобщенного и функционального разделения переменных найдены новые точные решения двумерных и n-мерных нелинейных уравнений Шредингера общего вида, которые выражаются в квадратурах или элементарных функциях.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шредингера, многомерные уравнения математической физики, точные решения, решения в квадратурах, решения в элементарных функциях, методы обобщенного и функционального разделения переменных, нелинейная оптика.

Введение

Классическое нелинейное уравнение Шредингера

Во многих разделах физики встречается классическое одномерное нелинейное уравнение Шредингера с кубической нелинейностью [1 – 10]:

$$iu_t + u_{xx} + k|u|^2 u = 0, \tag{1}$$

где $u(x, t)$ – искомая комплекснозначная функция действительных аргументов; t – время; x – пространственная переменная; k – параметр уравнения; $i^2 = -1$. Отметим, что уравнение (1) является интегрируемым уравнением с частными производными (УрЧП) [4, 5] и проходит тест Пенлеве [11 – 13]; его характерные особенности и точные решения описаны в [4, 5, 14 – 16].

Родственные нелинейные уравнения с частными производными вида

$$iu_t + u_{xx} + g(|u|)u = 0, \tag{2}$$

$$iu_t + [f(|u|)u]_{xx} + g(|u|)u = 0, \tag{3}$$

✉ А.Д. Полянин: polyanin@ipmnet.ru
Н.А. Кудряшов: nakudr@gmail.com

Поступила в редакцию: 24.01.2025
После доработки: 10.02.2025
Принята к публикации: 11.02.2025

EDN GOCPTB

и многие другие одномерные нелинейные уравнения типа Шредингера, которые встречаются в литературе, можно найти, например, в [14–29]. В нелинейной оптике потенциал $g(|u|)$ в уравнениях (2) и (3) характеризует закон взаимодействия светового импульса с материалом волокна. Функция $f(|u|)$ в уравнении (3) описывает нелинейную дисперсию.

Точные решения уравнения (2) в случае степенного потенциала $g(|u|) = k|u|^n$ рассматривались, например, в [14–16]. Решения с обобщенным разделением переменных нелинейного уравнения (2) с произвольной функцией $g(|u|)$ приведены в [14, 16]. Точные решения и редукции нелинейного уравнения Шредингера общего вида (3) двумя произвольными функциями $f(|u|)$ и $g(|u|)$ описаны в [25, 26].

Точные решения нелинейных УрЧП

Под точными решениями нелинейных УрЧП понимаются следующие решения [25, 29, 30]:

a) решения, которые выражаются через элементарные функции или могут быть представлены в замкнутой форме (в квадратурах);

b) решения, которые выражаются через решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) или систем таких уравнений.

Точные решения являются своеобразными математическими эталонами, которые часто используются в качестве тестовых задач для проверки адекватности и оценки точности численных и приближенных аналитических методов интегрирования нелинейных уравнений в частных производных.

Под редукциями рассматриваемого уравнения обычно понимаются уравнения меньшей размерности или более низкого порядка, все решения которых являются решениями данного уравнения. Редукции играют ключевую роль в построении точных решений дифференциальных уравнений и приводят к более простым уравнениям.

В данной работе для поиска точных решений многомерных обобщений нелинейных уравнений (2) и (3) использованы различные модификации методов обобщенного и функционального разделения переменных [14, 30, 31] и принцип структурной аналогии решений [27, 32].

Многомерные нелинейные уравнения Шредингера

Рассматриваемые нелинейные уравнения Шредингера

В данной работе будем рассматривать многомерные нелинейные уравнения Шредингера общего вида

$$iu_t + \Delta u + g(|u|)u = 0, \tag{4}$$

$$iu\ \ + \Delta[f(|u|)u] + g(|u|)u = 0, \tag{5}$$

где $u = u(\mathbf{x}, t)$ – искомая комплекснозначная функция действительных аргументов; t – время; $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, x_k – пространственные переменные ($k = 1, \ldots, n$); $\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ – оператор Лапласа; $i^2 = -1$. Уравнения (4) и (5) являются n-мерными пространственными обобщениями уравнений (2) и (3). Действительные функции $f(|u|)$ и $g(|u|)$, входящие в эти нелинейные УрЧП и характеризующие дисперсию и потенциал, будем считать произвольными.

Групповая классификация уравнения (4) была проведена в [33–35]. Некоторые точные решения этого уравнения в двумерном, трехмерном и n-мерном случаях получены в [14, 34, 36] (см. также [37, 38], где рассматривались родственные УрЧП).

Свойство уравнения (4). Пусть $u(x_1, \ldots, x_n, t)$ – решение уравнения (4). Тогда функция

$$\overline{u} = \exp\left\{-i\left[\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k + \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2\right) t + A\right]\right\} u\,(x_1 + 2\lambda_1 t + C_1, \ldots, x_n + 2\lambda_n t + C_n,\ t + B), \tag{6}$$

где A, B, $C_1,\ldots, C_n$, $\lambda_1,\ldots, \lambda_n$ – произвольные действительные постоянные, также является решением этого уравнения.

Формула (6), содержащая $2(n+1)$ свободных параметров, позволяет с помощью более простых частных решений уравнения (4) строить его более сложные точные решения. В частности, она дает возможность с помощью стационарных решений уравнения (4) получать некоторые нестационарные решения. Отметим, что при $n = 2$ и $n = 3$ формула размножения решений (6) была выведена в [14].

Преобразование нелинейных уравнений Шредингера к системе действительных УрЧП

Представим искомую функцию в показательной форме

$$u = re^{i\varphi}, \quad r = |u|, \tag{7}$$

где $r = r(\mathbf{x}, t) \geq 0$ и $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$ – действительные функции.

Дифференцируя (7), получим

$$\begin{aligned} &u_t = (r_t + ir\varphi_t)e^{i\varphi}, \\ &\Delta[f(|u|)u] = \left[\Delta h - h|\nabla\varphi|^2 + i(2\nabla h \cdot \nabla\varphi + h\Delta\varphi)\right]e^{i\varphi}, \quad h = rf(r), \end{aligned} \tag{8}$$

где использованы обозначения

$$|\nabla\varphi|^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)^2, \quad \nabla h \cdot \nabla\varphi = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial h}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}.$$

Подставим (8) в (5) и сократим все члены на $e^{i\varphi}$. Приравняв далее к нулю действительную и мнимую части полученного соотношения, приходим к следующей системе двух действительных уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} &-r\varphi_t + \Delta h - h|\nabla\varphi|^2 + rg(r) = 0, \\ &r_t + 2\nabla h \cdot \nabla\varphi + h\Delta\varphi = 0, \quad h = rf(r). \end{aligned} \tag{9}$$

Таким образом показано, что комплекснозначное многомерное нелинейное уравнение Шредингера (5) путем введения двух вспомогательных функций r и φ по формуле (7) преобразуется к системе двух действительных УрЧП (9). Более простое нелинейное уравнение (4) в этом случае приводится к системе УрЧП (9), в которой надо положить $f(r) \equiv 1$, что дает $h = r$.

Замечание 1. Второе уравнение в системе (9) можно представить в виде закона сохранения:

$$H_t + \operatorname{div}(h^2\nabla\varphi) = 0, \quad H = \int h(r)\,dr.$$

Решения и редукции нелинейного уравнения Шредингера с радиальной симметрией

Нелинейные уравнения Шредингера, описывающие радиально-симметричные решения

Уравнения (4) и (5) существенно упрощаются, если рассматривать радиально-симметричные решения. В этом случае приходим к уравнениям с двумя независимыми переменными

$$iu_t + \rho^{1-n}(\rho^{n-1}u_\rho)_\rho + g(|u|)u = 0, \tag{10}$$

$$iu_t + \rho^{1-n}\{\rho^{n-1}[f(|u|)u]_\rho\}_\rho + g(|u|)u = 0, \tag{11}$$

где $\rho = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2}$ – радиальная координата. При $n = 1$ уравнения (10) и (11) переходят, соответственно, в уравнения (2) и (3).

Как и ранее, представим искомую функцию в показательной форме (7). Подставив (7) в уравнение (11), после несложных преобразований приходим к системе двух действительных уравнений с частными производными

$$
\begin{aligned}
&-r\varphi_t + h_{\rho\rho} - h\varphi_\rho^2 + \frac{n-1}{\rho} h_\rho + rg(r) = 0,\\
&r_t + 2h_\rho\varphi_\rho + h\varphi_{\rho\rho} + \frac{n-1}{\rho} h\varphi_\rho = 0, \quad h = rf(r).
\end{aligned} \tag{12}
$$

Далее описаны некоторые точные решения системы (12).

Решения типа стационарных солитонов

Система (12) допускает простые периодические по времени точные решения вида

$$r = r(\rho), \quad \varphi = C_1 t + C_2, \tag{13}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, а функция $r = r(\rho)$ описывается нелинейным ОДУ второго порядка

$$h''_{\rho\rho} + (n-1)\rho^{-1}h'_\rho - C_1 r + rg(r) = 0, \quad h = rf(r). \tag{14}$$

Решение этого неавтономного уравнения нельзя представить в замкнутом виде в общем случае произвольных функций $f(r)$ и $g(r)$. Однако, задавая эти функции подходящим образом и используя [39], можно найти его некоторые решения.

Опишем простой и весьма полезный для анализа уравнения (14) полуобратный подход, основанный на введении вместо функции $g(r)$ произвольной вспомогательной функции и непосредственном задании точных решений в неявном виде. А именно, будем считать функцию $f(r)$ произвольной, а решение $r = r(\rho)$ уравнения (14), с учетом соотношения $h = rf$, будем задавать с помощью произвольной вспомогательной функции $h = h(\rho)$ в неявном виде

$$rf(r) = h(\rho). \tag{15}$$

Функция $g = g(r)$ в таком подходе уже не задается, а находится непосредственно из уравнения (14), что приводит к формуле

$$g = C_1 + r^{-1}\rho^{1-n}(\rho^{n-1}h'_\rho)'_\rho. \tag{16}$$

Функция потенциала $g = g(r)$ для заданной конкретной функции $h(\rho)$ определяется путем исключения ρ из соотношений (15) и (16).

Продемонстрируем теперь на конкретном примере, как описанный подход работает на практике. Для этого возьмем простую элементарную функцию $h = h(\rho)$ и найдем порожденную ей функцию $g = g(r)$. В этом случае функция $g(r)$ будет выражаться через $f(r)$.

Пример 1. В соотношения (15) и (16) подставим функцию

$$h(\rho) = a\rho^{2-n} + b, \tag{17}$$

где a и b – произвольные постоянные. В результате получим

$$rf(r) = a\rho^{2-n} + b, \quad g(r) = C_1 = \text{const}. \tag{18}$$

Здесь первое соотношение, где $f(r)$ – произвольная функция, неявным образом задает зависимость амплитуды солитона от пространственной координаты $r = r(\rho)$.

Формулы (7), (13), (18) определяют точное решение в неявной форме уравнения (11) с произвольной функцией $f(|u|)$ и постоянным потенциалом $g(|u|) = C_1$.

Можно также подходящим образом задать связь между функциями $f(r)$ и $g(r)$, а функцию $h = h(\rho)$ находить из полученного дифференциального уравнения.

Пример 2. Полагая в (11) и (14) (или (16)) $g = af + b$, приходим к нелинейному уравнению Шредингера

$$iu_t + \rho^{1-n}\{\rho^{n-1}[f(|u|)u]_\rho\}_\rho + [af(|u|) + b]u = 0, \tag{19}$$

где $f(z)$ – произвольная функция, которая допускает точное решение, определяемое формулами (7) и (13) при $C_1 = b$. В этих формулах амплитуда $r = r(\rho)$ задается неявным соотношением (15), в котором функция $h = h(\rho)$ описывается линейным ОДУ:

$$h''_{\rho\rho} + (n-1)\rho^{-1}h'_\rho + ah = 0. \tag{20}$$

Общее решение этого уравнения при нечетных n можно выразить через элементарные функции, а при четных n – через функции Бесселя или модифицированные функции Бесселя [39].

Периодические по времени решения, амплитуда и фаза которых зависят от пространственной переменной

Система (12) допускает более сложное, чем (13), точное решение вида

$$r = r(\rho), \quad \varphi = C_1 t + \theta(\rho), \tag{21}$$

где C_1 – произвольная постоянная, а функции $r = r(\rho)$ и $\theta = \theta(\rho)$ описываются системой ОДУ:

$$\begin{aligned} &h''_{\rho\rho} - h(\theta'_\rho)^2 + \frac{n-1}{\rho}h'_\rho - C_1 r + rg(r) = 0, \\ &2h'_\rho\theta'_\rho + h\theta''_{\rho\rho} + \frac{n-1}{\rho}h\theta'_\rho = 0, \quad h = rf(r). \end{aligned} \tag{22}$$

Интегрируя дважды второе уравнение (22), последовательно имеем

$$\theta'_\rho = C_2\rho^{1-n}h^{-2}, \quad \theta = C_2\int \rho^{1-n}h^{-2}\,d\rho + C_3, \tag{23}$$

где C_2, C_3 – произвольные постоянные. Исключив производную $'$ из первого уравнения (22) с помощью первого соотношения (23), получим следующее нелинейное неавтономное ОДУ второго порядка для функции $r = r(\rho)$:

$$h''_{\rho\rho} - C_2^2\rho^{2(1-n)}h^{-3} + (n-1)\rho^{-1}h'_\rho - C_1 r + rg(r) = 0, \quad h = rf(r). \tag{24}$$

Это уравнение отличается от уравнения (14) наличием дополнительного нелинейного члена, пропорционального h^{-3}. Некоторые точные решения этого уравнения можно получить, используя описанный ранее полуобратный подход, задавая вспомогательную функцию $h = h(\rho)$.

Замечание 2. Уравнение (11) в некоторых случаях (когда две функции f и g задаются одной подходящей вспомогательной произвольной функцией) может допускать также более сложные, чем (21), решения вида

$$r = r(\rho), \quad \varphi = a(t)\theta(\rho) + b(t).$$

В одномерном случае, что соответствует значению $n = 1$, такие решения были построены в [26].

Решения с обобщенным разделением переменных, амплитуда которых зависит от времени

Покажем, что система (12) допускает точное решение с обобщенным разделением переменных вида

$$r = r(t), \quad \varphi = a(t)\rho^2 + b(t). \tag{25}$$

Для этого подставим (25) в (12). В результате первое уравнение системы приводится к квадратному уравнению относительно ρ, коэффициенты которого зависят от времени. Приравнивая нулю функциональные коэффициенты квадратного уравнения и добавляя второе уравнение системы, которое в данном случае зависит только от t, получим следующую систему ОДУ:

$$\begin{aligned} &a'_t = -4a^2 f(r), \\ &b'_t = g(r), \\ &r'_t = -2narf(r), \end{aligned} \tag{26}$$

в которой первые два уравнения были сокращены на r.

Из первого и третьего уравнения системы (26) имеем интеграл

$$a = C_1 r^{2/n}, \tag{27}$$

где C_1 – произвольная постоянная. Исключив a из третьего уравнения (26) с помощью (27), получим ОДУ

$$r'_t = -2C_1 n r^{(n+2)/n} f(r), \tag{28}$$

общее решение которого можно представить в неявной форме

$$\int \frac{dr}{r^{(n+2)/n} f(r)} = C_2 - 2C_1 nt, \tag{29}$$

где C_2 – произвольная постоянная. Функция $a = a(t)$ определяется соотношениями (27) и (29). Функция $b = b(t)$ находится интегрированием второго уравнения (26):

$$b = \int g(r)\,dt + C_3, \tag{30}$$

где C_3 – произвольная постоянная, а функции $r = r(t)$ задана неявно выражением (29).

Отметим, что функцию b можно выразить через функцию r по формуле:

$$b = -\frac{1}{2C_1 n} \int \frac{g(r)\,dr}{r^{(n+2)/n} f(r)} + C_3.$$

Решения и редукции многомерного нелинейного уравнения Шредингера

Далее описаны некоторые точные решения и редукции многомерного нелинейного уравнения Шредингера общего вида (5), которое содержит две произвольные функции $f(z)$ и $g(z)$. Для построения этих решений используется представление решения в экспоненциальной форме (7) и система двух действительных УрЧП (9).

Решения типа многомерной бегущей волны с постоянной амплитудой

Система (9) имеет простое точное решение типа многомерной бегущей волны

$$r = A, \quad \varphi = \sum_{k=1}^{n} C_k x_k + Bt + D,$$
$$B = g(A) - f(A)\sum_{k=1}^{n} C_k^2, \tag{31}$$

где A, C_1, …, C_n, D – произвольные действительные постоянные. Это решение является периодическим по времени t.

Решения типа многомерных стационарных солитонов

Система (9) допускает нестационарное периодическое по времени решение (7) в виде произведения функций разных аргументов

$$r = r(\mathbf{x}), \quad \varphi = C_1 t + C_2, \tag{32}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, а функция $r = r(\mathbf{x})$ описывается n-мерным стационарным уравнением с частными производными

$$\Delta h - C_1 r + rg(r) = 0, \quad h = rf(r). \tag{33}$$

Точные решения этого уравнения в двумерном, трехмерном и общем случае для некоторых функций $f(r)$ и $g(r)$ можно найти, например, в [14].

Рассмотрим специальный случай, задав линейную связь $g = af + b$ между функциями $f = f(r)$ и $g = g(r)$. В этом случае нелинейное уравнение Шредингера (5) принимает вид

$$iu_t + \Delta[f(|u|)u] + [af(|u|) + b]u = 0, \tag{34}$$

где $f(z)$ – произвольная функция. Полагая в (33) $g = af + b$ и $C_1 = b$, а также учитывая соотношение $h = rf$, приходим к уравнению Гельмгольца для функции h:

$$\Delta h + ah = 0. \tag{35}$$

Решения этого линейного уравнения можно найти в [40]. Любое частное решение этого уравнения $h = h(\mathbf{x})$ порождает точное решение нелинейного уравнения (34), которое описывается формулами (7) и (32) при $C_1 = b$, где функция $r = r(\mathbf{x})$ задается неявно с помощью соотношения $h(\mathbf{x}) = rf(r)$.

В частности, в двумерном случае при $n = 2$ уравнение (35) допускает точные решения:

$$h = (A_1 \cos\mu_1 x_1 + B_1 \sin\mu_1 x_1)(A_2 \cos\mu_2 x_2 + B_2 \sin\mu_2 x_2), \quad a = \mu_1^2 + \mu_2^2;$$

$$h = (A_1 \cos\mu_1 x_1 + B_1 \sin\mu_1 x_1)(A_2 \cosh\mu_2 x_2 + B_2 \sinh\mu_2 x_2), \quad a = \mu_1^2 - \mu_2^2;$$

где A_1, A_2, B_1, B_2, μ_1, μ_2 – произвольные постоянные.

Замечание 3. Уравнение (33) с помощью подстановки $h = rf(r)$ сводится к нелинейному стационарному n-мерному уравнению теплопроводности с источником

$$\Delta h + \Phi(h) = 0,$$

где функция $\Phi(h)$ задается параметрически двумя соотношениями

$$h = zf(z), \quad \Phi = -C_1 z + zg(z) \quad (z \text{ – параметр}).$$

Решения типа пространственных стационарных солитонов с выделенным направлением

Система (9) допускает периодическое по времени нестационарное решение вида

$$r = r(x_1), \quad \varphi = At + \sum_{k=2}^{n} B_k x_k + C, \tag{36}$$

где A, B_2, …, B_n, C – произвольные постоянные, а функция $r = r(x_1)$ описывается нелинейным ОДУ автономного типа

$$h''_{xx} - \left(\sum_{k=2}^{n} B_k^2\right) h - Ar + rg(r) = 0, \quad h = rf(r), \quad x = x_1. \tag{37}$$

В [26] было доказано, что общее решение таких ОДУ может быть представлено в квадратурах [26] для произвольных функций f и g.

Другие периодические по времени решения, амплитуда которых зависит от пространственных переменных

1. Решение (36), в котором выделена одна переменная x_1, допускает пространственное обобщение. Для этого надо выделить две группы пространственных переменных $x_1, \ldots, x_m$ и x_{m+1}, …, x_n и искать точные решения нелинейного уравнения Шредингера в виде

$$r = r(x_1, \ldots, x_m), \quad \varphi = At + \sum_{k=m+1}^{n} B_k x_k + C.$$

В результате для амплитуды r получим одно нелинейное УрЧП размерности m.

2. Имеется также более широкий класс решений

$$r = r(\mathbf{x}), \quad \varphi = At + \theta(\mathbf{x}).$$

Подставив эти выражения в (9), получим стационарную нелинейную систему УрЧП для функций r и θ.

Решения с обобщенным разделением переменных, амплитуда которых зависит от времени

В общем случае система (9) допускает решения, амплитуда которых зависит только от времени, а фаза является квадратичным многочленом по пространственным координатам с переменными коэффициентами:

$$r = r(t), \quad \varphi = \sum_{p,q=1}^{n} a_{pq}(t) x_p x_q + \sum_{p=1}^{n} b_p(t) x_p + c(t). \tag{38}$$

где функции $r = r(t)$, $a_{pq} = a_{pq}(t)$, $b_p = b_p(t)$, $c = c(t)$ подлежат определению в ходе дальнейшего анализа (считается, что $a_{pq} = a_{qp}$).

Рассмотрим подробнее двумерное нелинейное уравнение Шредингера (5), соответствующее значению $n = 2$. Входящие в решение (7) искомые функции (38) в данном случае имеют вид

$$r = r(t), \quad \varphi = a_{11}(t)x^2 + a_{12}(t)xy + a_{22}(t)y^2 + b_1(t)x + b_2(t)y + c(t), \tag{39}$$

где $x = x_1$, $y = x_2$, а $2a_{12}$ было переобозначено на a_{12}. Подставив (39) в (9), после разделения переменных приходим к следующей нелинейной системе ОДУ для функциональных коэффициентов:

$$\begin{aligned}
&a'_{11} = -(4a_{11}^2 + a_{12}^2) f(r),\\
&a'_{12} = -4a_{12}(a_{11} + a_{22}) f(r),\\
&a'_{22} = -(4a_{22}^2 + a_{12}^2) f(r),\\
&b'_1 = -2(2a_{11}b_1 + a_{12}b_2) f(r),\\
&b'_2 = -2(2a_{22}b_2 + a_{12}b_1) f(r),\\
&c' = -(b_1^2 + b_2^2) f(r) + g(r),\\
&r' = -2(a_{11} + a_{22}) r f(r),
\end{aligned} \tag{40}$$

где первые шесть уравнений были сокращены на r, а штрих обозначает производную по t.

Два точных решения системы ОДУ (40) при $f(r) \equiv 1$

Далее приведены два многопараметрических точных решения системы ОДУ (40) при $f(r) \equiv 1$, которые выражаются через элементарные функции и определяют соответствующие точные решения нелинейного уравнения Шредингера с одной произвольной функцией (4).

1. При $a_{12} = 0$ второе уравнение системы ОДУ (40) удовлетворяется тождественно. В этом случае сначала последовательно интегрируются оставшиеся четыре первых уравнения, затем интегрируется последнее уравнение, и наконец, предпоследнее. В результате указанных действий получим

$$\begin{gathered}
a_{11}(t) = \frac{1}{4(t + C_1)}, \quad a_{12}(t) = 0, \quad a_{22}(t) = \frac{1}{4(t + C_2)},\\
b_1(t) = \frac{C_3}{2(t + C_1)}, \quad b_2(t) = \frac{C_4}{2(t + C_2)}, \quad r(t) = \frac{C_5}{\sqrt{(t + C_1)(t + C_2)}},\\
c(t) = \frac{C_3^2}{4(t + C_1)} + \frac{C_4^2}{4(t + C_2)} + \int g(r(t))\,dt + C_6,
\end{gathered} \tag{41}$$

где $C_1, \ldots, C_6$ – произвольные постоянные.

2. Решения первых трех функциональных коэффициентов в системе ОДУ (40) ищем обратно пропорциональными $(t + C_1)$, считая, что $a_{12} \neq 0$. Таким образом можно найти следующие точные решения:

$$\begin{gathered}
a_{11}(t) = \frac{C_2}{t + C_1}, \quad a_{12}(t) = \frac{A}{t + C_1}, \quad a_{22}(t) = \frac{B}{t + C_1},\\
b_1(t) = \frac{2AC_3}{t + C_1} + AC_4, \quad b_2(t) = \frac{(1 - 4C_2)C_3}{t + C_1} - 2C_2C_4,\\
r(t) = \frac{C_5}{\sqrt{t + C_1}}, \quad A = \pm(C_2 - 4C_2^2)^{1/2}, \quad B = \frac{1}{4} - C_2,\\
c(t) = -\int [b_1^2(t) + b_2^2(t)]\,dt + \int g(r(t))\,dt + C_6,
\end{gathered} \tag{42}$$

где $C_1, \ldots, C_6$ – произвольные постоянные. Первый интеграл в последнем выражении (42) легко вычисляется, но из-за громоздкости не приводится.

Другие решения с обобщенным разделением переменных уравнения (4)

Нелинейное уравнение Шредингера (4) допускает точное решение (7), в котором амплитуда и фаза ищутся в виде

$$r = r(z), \quad z = t^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k x_k, \quad \varphi = ct^3 + t\sum_{k=1}^{n} b_k x_k + d, \tag{43}$$

где d – произвольная постоянная, а свободные параметры $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c$ подбираются так, чтобы удовлетворить системе УрЧП (9).

Рассмотрим подробнее двумерное нелинейное уравнение Шредингера (4), соответствующее значению $n = 2$. Входящие в решение (7) искомые функции (43) в данном случае имеют вид

$$r = r(z), \quad z = t^2 + a_1 x + a_2 y, \quad \varphi = ct^3 + t(b_1 x + b_2 y) + d, \tag{44}$$

где использованы обозначения $x = x_1$ и $y = x_2$.

Подставив (44) во второе уравнение системы (9) при $n = 2$, после сокращения на $2tu'_z$ приходим к простому алгебраическому соотношению

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + 1 = 0. \tag{45}$$

Подставив (44) в первое уравнение системы (9) при $n = 2$, после элементарных алгебраических преобразований получим

$$(a_1^2 + a_2^2) r''_{zz} - [(3c + b_1^2 + b_2^2)t^2 + b_1 x + b_2 y] r + rg(r) = 0. \tag{46}$$

Это соотношение будет обыкновенным дифференциальным уравнением, если потребовать, чтобы выражение в квадратных скобках было функцией только переменной z, которая введена в (44). Требование приводит к следующим трем алгебраическим уравнениям на свободные коэффициенты:

$$\begin{aligned} &3c + b_1^2 + b_2^2 = \lambda, \\ &b_1 = \lambda a_1, \\ &b_2 = \lambda a_2, \end{aligned} \tag{47}$$

где λ – новый свободный параметр. При выполнении условий (47) соотношение (46) становится обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(a_1^2 + a_2^2) r''_{zz} - \lambda z r + rg(r) = 0. \tag{48}$$

Четыре соотношения (8) и (47) представляют собой недоопределенную систему алгебраических уравнений, в которую входит шесть неизвестных коэффициентов $a_1, b_1, a_2, b_2, c, \lambda$. Поэтому два из этих коэффициентов можно задать произвольно, а остальные четыре выразить через них. Прямой проверкой нетрудно убедиться, что общее решение системы уравнений (8) и (47) можно представить в виде

$$\begin{gathered} a_1 = p\cos q, \quad a_2 = p\sin q, \\ b_1 = -\frac{1}{p}\cos q, \quad b_2 = -\frac{1}{p}\sin q, \\ c = -\frac{2}{3p^2}, \quad \lambda = -\frac{1}{p^2}, \end{gathered} \tag{49}$$

где p и q – произвольные постоянные ($p \neq 0$). Подставив выражения (49) в (44) и (48), а затем в (7), можно найти точное решение двумерного нелинейного уравнения Шредингера (4).

Отметим, что поиск точного решения n-мерного нелинейного уравнения Шредингера (4) в виде (43) приводит к ОДУ, которое можно получить из (46), формально заменив в нем коэффициент $(a_1^2 + a_2^2)$ перед второй производной на сумму $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)$.

Редукция с использованием новой переменной типа обобщенной бегущей волны

Система УрЧП (9) допускает решение вида

$$r = r(z), \quad \varphi = at + \sum_{k=1}^{n} b_k x_k + \theta(z), \quad z = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k + \lambda t, \tag{50}$$

где a, b_1, …, b_n, c_1, …, c_n, λ – произвольные действительные постоянные, а функции $r = r(z)$ и $\theta = \theta(z)$ удовлетворяют нелинейной системе ОДУ:

$$\begin{gathered} -r(a + \lambda\theta'_z) + h''_{zz} \sum_{k=1}^{n} c_k^2 - h \sum_{k=1}^{n} (b_k + c_k \theta'_z)^2 + rg(r) = 0, \\ \lambda r'_z + 2\left(\sum_{k=1}^{n} b_k c_k\right) h'_z + \left(\sum_{k=1}^{n} c_k^2\right)(2h'_z \theta'_z + h\theta''_{zz}) = 0, \quad h = rf(r). \end{gathered} \tag{51}$$

Отметим, что замена $\xi = \theta'_z$ позволяет понизить порядок системы ОДУ (51) на единицу. Нетрудно проверить, что второе уравнение (51) допускает первый интеграл

$$\lambda \int h(r)\,dr + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k c_k\right) h^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} c_k^2\right) h^2 \theta'_z = C, \quad h = rf(r), \tag{52}$$

где C – произвольная постоянная. Исключив далее производную θ'_z из первого уравнения (51) с помощью (52), можно вывести нелинейное автономное ОДУ второго порядка (которое явно не зависит от z). Общее решение полученного ОДУ можно выразить в квадратурах с помощью метода, описанного в [26].

Краткие выводы

Исследуются многомерные нелинейные уравнения Шредингера общего вида, дисперсия и потенциал которых задаются одной или двумя произвольными функциями. Найдены некоторые решения этих уравнений, которые выражаются в квадратурах или элементарных функциях. Описаны многомерные и одномерные редукции, приводящие рассматриваемые нелинейные УрЧП к более простым уравнениям меньшей размерности или обыкновенным дифференциальным уравнениям или системам таких уравнений.

Финансирование

Работа выполнена по темам государственного задания (номера госрегистрации 124012500440-9 и FSWU-2023-0031).

Конфликт интересов

Конфликт интересов отсутствует.

Вклад авторов

Полянин А.Д. – разработка математической модели, построение точных решений, подготовка текста статьи, обсуждение результатов.

Кудряшов Н.А. – разработка математической модели, построение точных решений, подготовка текста статьи, обсуждение результатов.

Список литературы

1. *Агравал Г.* Нелинейная волоконная оптика. М.: Мир, 1996.

2. *Кившарь Ю.С., Агравал Г.* Оптические солитоны. От волоконных световодов к фотонным кристаллам. М.: Физматлит, 2005.

3. *Kodama Y., Hasegawa A.* Nonlinear pulse propagation in a monomode dielectric guide // IEEE Journal of Quantum Electronics, 1987. V. 23. № 5. P. 510–524.

4. *Drazin P.G., Johnson R.S.* Solitons: An Introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

5. *Ablowitz M.J., Clarkson P.A.* Solitons Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

6. *Kivshar Yu.S., Malomed B.A.* Dynamics of solitons in nearly integrable systems // Rev. Mod. Phys., 1989. V. 63. P. 763–915.

7. *Hasegawa A., Tappert F.* Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion // Applied Physics Letters, 1973. V. 23. № 3. P. 142–144.

8. *Hasegawa A., Tappert F.* Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. II. Normal dispersion // Applied Physics Letters, 1973. V. 23. № 4. P. 171–172.

9. *Tai K., Hasegawa A., Tomita A.* Observation of modulational instability in optical fibers // Physical Review Letters, 1986. V. 56. № 2. P. 135–138.

10. *Ахманов С.А., Сухоруков А.П., Хохлов Р.В.* Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде // Успехи физических наук, 1967. Т. 93. № 1. С. 19–70.

11. *Weiss J., Tabor M., Carnevale G.* The Painleve property for partial differential equations // J. Math. Phys., 1982. V. 24. № 3. P. 522–526.

12. *Kudryashov N.A.* Painlevé analysis of the resonant third-order nonlinear Schrödinger equation // Appl. Math. Letters, 2024. V. 158. 109232.

13. *Kudryashov N.A.* Painlevé analysis of the Sasa–Satsuma equation // Phys. Letters A, 2024. V. 525. 129900.

14. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.

15. *Al Khawaja U., Al Sakkaf L.* Handbook of Exact Solutions to the Nonlinear Schrödinger Equations. Bristol: Institute of Physics Publ., 2019.

16. *Polyanin A.D.* Handbook of Exact Solutions to Mathematical Equations. Boca Raton: CRC Press–Chapman & Hall, 2025.

17. *Kudryashov N.A.* Mathematical model of propagation pulse in optical fiber with power nonlinearities // Optik, 2020. V. 212. 164750.

18. *Kudryashov N.A.* Stationary solitons of the generalized nonlinear Schrödinger equation with nonlinear dispersion and arbitrary refractive insex // Applied Mathematics Letters, 2022. V. 128. 107888.

19. *Kudryashov N.A.* Almost general solution of the reduced higher-order nonlinear Schrödinger equation // Optik, 2021. V. 230. 66347.

20. *Yildirim Y.* Optical solitons to Schrodinger–Hirota equation in DWDM system with modified simple equation integration architecture // Optik, 2019. V. 182. P. 694–701.

21. *Zayed E.M.E., Shohib R.M.A., Alngar M.E.M., Biswas A., Moraru L., Khan S., Yildirim Y., Alshehri H.M., Belic M.R.* Dispersive optical solitons with Schrodinger–Hirota model having multiplicative white noise via Ito Calculus // Physics Letters A: General, Atomic and Solid State Physics, 2022. V. 445. 128268.

22. *Wang G., Kara A.H., Biswas A., Guggilla P., Alzahrani A.K., Belic M.R.* Highly dispersive optical solitons in polarization-preserving fibers with Kerr law nonlinearity by Lie symmetry // Physics Letters A: General, Atomic and Solid State Physics, 2022. V. 421. 127768.

23. *Biswas A., Hubert M.B., Justin M., Betchewe G., Doka S.Y., Crepin K.T., Ekici M., Zhou Q., Moshokoa S., Belic M.* Chirped dispersive bright and singular optical solitons with Schrodinger–Hirota equation. Optik, 2018. V. 168. P. 192–195.

24. *Zhou Q., Xu M., Sun Y., Zhong Y., Mirzazadeh M.* Generation and transformation of dark solitons, anti-dark solitons and dark double-hump solitons // Nonlinear Dynamics, 2022. V. 110. № 2. P. 1747–1752.

25. *Полянин А.Д., Кудряшов Н.А.* Нелинейное уравнение Шредингера с дисперсией и потенциалом общего вида: Точные решения и редукции // Вестник НИЯУ МИФИ. 2024. Т. 13. № 6. С. 394–402.

26. *Polyanin A.D., Kudryashov N.A.* Closed-form solutions of the nonlinear Schrödinger equation with arbitrary dispersion and potential // Chaos, Solitons & Fractals. 2025. V. 191. 115822.

27. *Polyanin A.D., Kudryashov N.A.* Nonlinear Schrödinger equations with delay: Closed-form and generalized separable solutions // Contemporary Mathematics. 2024. V. 5. № 4. P. 5783–5794.

28. *Polyanin A.D., Kudryashov N.A.* Exact solutions and reductions of nonlinear Schrödinger equations with delay // Journal of Computational & Applied Mathematics. 2025. V. 462. 116477.

29. *Полянин А.Д., Кудряшов Н.А.* Нелинейное уравнение Шредингера общего вида: Многофункциональная модель, редукции и точные решения // Вестник НИЯУ МИФИ. 2025. Т. 14. № 1. С. 23–35.

30. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear PDEs. Boca Raton–London: CRC Press, 2022.

31. *Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R.* Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2007.

32. *Aksenov A.V., Polyanin A.D.* Methods for constructing complex solutions of nonlinear PDEs using simpler solutions // Mathematics, 2021. V. 9. № 4. 345.

33. *Gagnon L., Winternitz P.* Lie symmetries of a generalized nonlinear Schrödinger equation. I. The symmetry group and its subgroups // J. Phys. A: Math. Gen., 1988. V. 21. № 7. 1493.

34. *Баранник А.Ф., Марченко В.А., Фущич В.И.* О редукции и точных решениях нелинейных многомерных уравнений Шредингера // Теор. и мат. физика, 1991. Т. 87. № 2. С. 220–234.

35. *Ibragimov N.H.* (ed.). CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Vol. 2. Applications in Engineering and Physical Sciences. Boca Raton: CRC Press, 1995.

36. *Gagnon L., Winternitz P.* Lie symmetries of a generalized nonlinear Schrödinger equation. II. Exact solutions // J. Phys. A: Math. Gen., 1989. V. 22. № 5. 469.

37. *Zhong W.-P., Xie R.-H., Belić M., Petrović N., Chen G.* Exact spatial soliton solutions of the two-dimensional generalized nonlinear Schrödinger equation with distributed coefficients // Physical Review A, 2008. V. 78. 023821.

38. *Seadawy A.R.* Exact solutions of a two-dimensional nonlinear Schrödinger equation // Applied Mathematics Letters, 2012. V. 25. № 4. P. 687–691.

39. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems. Boca Raton–London: CRC Press, 2018.

40. *Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E.* Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists, 2-nd ed. Boca Raton–London: CRC Press, 2016.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2025, vol. 14, no. 2, pp. 116–130

Multidimensional nonlinear Schrödinger equations with potential and dispersion of the general form: exact solutions and reductions

A. D. Polyanin [1,✉], N. A. Kudryashov [2,✉]

[1] Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia
[2] National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia
✉ polyanin@ipmnet.ru
✉ nakudr@gmail.com

Received January 24, 2025; revised February 10, 2025; accepted February 11, 2025

Multidimensional nonlinear Schrödinger equations of the general form are investigated, in which the potential and dispersion are specified by one or two arbitrary functions. The equations under consideration naturally generalize a number of related nonlinear partial differential equations that occur in various areas of theoretical physics, including nonlinear optics, superconductivity, and plasma physics. Multidimensional and one-dimensional non-symmetry reductions are described, which lead the studied nonlinear Schrödinger equations to simpler equations of lower dimension or ordinary differential equations (or systems of ordinary differential equations). Special attention is paid to finding solutions with radial symmetry. Using methods of generalized separation of variables, new exact solutions of two-dimensional and *n*-dimensional nonlinear Schrödinger equations of the general form, which are expressed in quadratures or elementary functions, are found.

Keywords: nonlinear Schrödinger equations, multidimensional equations of mathematical physics, exact solutions, solutions in quadratures, solutions in elementary functions, methods of generalized separation of variables, nonlinear optics.

References

1. *Agrawal G.P.* Nonlinear Fiber Optics, 4th ed. New York, Academic Press, 2007.

2. *Kivshar Yu.S., Agrawal G.P.* Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals. San Diego, Academic Press, 2003.

3. *Kodama Y., Hasegawa A.* Nonlinear pulse propagation in a monomode dielectric guide. IEEE Journal of Quantum Electronics, 1987. Vol. 23. No. 5. Pp. 510–524.

4. *Drazin P.G., Johnson R.S.* Solitons: An Introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

5. *Ablowitz M.J., Clarkson P.A.* Solitons Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

6. *Kivshar Yu.S., Malomed B.A.* Dynamics of solitons in nearly integrable systems. Rev. Mod. Phys., 1989. Vol. 63. Pp. 763–915.

7. *Hasegawa A., Tappert F.* Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion. Applied Physics Letters, 1973. Vol. 23. No. 3. Pp. 142–144.

8. *Hasegawa A., Tappert F.* Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. II. Normal dispersion. Applied Physics Letters, 1973. Vol. 23. No. 4. Pp. 171–172.

9. *Tai K., Hasegawa A., Tomita A.* Observation of modulational instability in optical fibers. Physical Review Letters, 1986. Vol. 56. No. 2. Pp. 135–138.

10. *Akhmanov S.A., Sukhorukov A.P., Khokhlov R.V.* Self-focusing and diffraction of light in a nonlinear medium [Self-focusing and diffraction of light in a nonliner medium]. Uspekhi fizicheskikh nauk, 1968. Vol. 10. No. 5. Pp. 609–636 (in Russian).

11. *Weiss J., Tabor M., Carnevale G.* The Painleve property for partial differential equations. J. Math. Phys., 1982. Vol. 24. No. 3. Pp. 522–526.

12. *Kudryashov N.A.* Painlevé analysis of the resonant third-order nonlinear Schrödinger equation. Appl. Math. Letters, 2024. Vol. 158. 109232.

13. *Kudryashov N.A.* Painlevé analysis of the Sasa–Satsuma equation. Phys. Letters A, 2024. Vol. 525. 129900.

14. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.

15. *Al Khawaja U., Al Sakkaf L.* Handbook of Exact Solutions to the Nonlinear Schrödinger Equations. Bristol, Institute of Physics Publ., 2019.

16. *Polyanin A.D.* Handbook of Exact Solutions to Mathematical Equations. Boca Raton, CRC Press–Chapman & Hall, 2025.

17. *Kudryashov N.A.* Mathematical model of propagation pulse in optical fiber with power nonlinearities. Optik, 2020. Vol. 212. 164750.

18. *Kudryashov N.A.* Stationary solitons of the generalized nonlinear Schrödinger equation with nonlinear dispersion and arbitrary refractive insex. Applied Mathematics Letters, 2022. Vol. 128. 107888.

19. *Kudryashov N.A.* Almost general solution of the reduced higher-order nonlinear Schrödinger equation. Optik, 2021. Vol. 230. 66347.

20. *Yildirim Y.* Optical solitons to Schrodinger–Hirota equation in DWDM system with modified simple equation integration architecture. Optik, 2019. Vol. 182. Pp. 694–701.

21. *Zayed E.M.E., Shohib R.M.A., Alngar M.E.M., Biswas A., Moraru L., Khan S., Yildirim Y., Alshehri H.M., Belic M.R.* Dispersive optical solitons with Schrodinger–Hirota model having multiplicative white noise via Ito Calculus. Physics Letters A: General, Atomic and Solid State Physics, 2022. Vol. 445. 128268.

22. *Wang G., Kara A.H., Biswas A., Guggilla P., Alzahrani A.K., Belic M.R.* Highly dispersive optical solitons in polarization-preserving fibers with Kerr law nonlinearity by Lie symmetry. Physics Letters A: General, Atomic and Solid State Physics, 2022. Vol. 421. 127768.

23. *Biswas A., Hubert M.B., Justin M., Betchewe G., Doka S.Y., Crepin K.T., Ekici M., Zhou Q., Moshokoa S., Belic M.* Chirped dispersive bright and singular optical solitons with Schrodinger–Hirota equation. Optik, 2018. Vol. 168. Pp. 192–195.

24. *Zhou Q., Xu M., Sun Y., Zhong Y., Mirzazadeh M.* Generation and transformation of dark solitons, anti-dark solitons and dark double-hump solitons. Nonlinear Dynamics, 2022. Vol. 110. No. 2. Pp. 1747–1752.

25. *Polyanin A.D., Kudryashov N.A.* Nelineynoye uravneniye Shredingera s dispersiyey i potentsialom obshchego vida: Tochnyye resheniya i reduktsii [Nonlinear Schrödinger equation with dispersion and potential of the general form: Exact solutions and reductions]. Vestnik NIYaU MIFI, 2024. Vol. 13. No. 6. Pp. 394–402 (in Russian).

26. *Polyanin A.D., Kudryashov N.A.* Closed-form solutions of the nonlinear Schrödinger equation with arbitrary dispersion and potential. Chaos, Solitons & Fractals. 2025. Vol. 191. 115822.

27. *Polyanin A.D., Kudryashov N.A.* Nonlinear Schrödinger equations with delay: Closed-form and generalized separable solutions. Contemporary Mathematics. 2024. Vol. 5. No. 4. Pp. 5783–5794.

28. *Polyanin A.D., Kudryashov N.A.* Exact solutions and reductions of nonlinear Schrödinger equations with delay. Journal of Computational & Applied Mathematics. 2025. Vol. 462. 116477.

29. *Polyanin A.D., Kudryashov N.A.* Nelineynoye uravneniye Shredingera obshchego vida: Mnogofunktsional'naya model', reduktsii i tochnyye resheniya [Nonlinear Schrödinger equation of general form: Multifunctional model, reductions and exact solutions]. Vestnik NIYaU MIFI, 2025. Vol. 14. No. 1. Pp. 23–35 (in Russian).

30. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear PDEs. Boca Raton–London: CRC Press, 2022.

31. *Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R.* Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2007.

32. *Aksenov A.V., Polyanin A.D.* Methods for constructing complex solutions of nonlinear PDEs using simpler solutions. Mathematics, 2021. Vol. 9. No. 4. 345.

33. *Gagnon L., Winternitz P.* Lie symmetries of a generalized nonlinear Schrödinger equation. I. The symmetry group and its subgroups. J. Phys. A: Math. Gen., 1988. Vol. 21. No. 7. 1493.

34. *Barannik A.F., Marchenko V.A., Fushchych V.I.* O reduktsii i tochnykh resheniyakh nelineynykh mnogomernykh uravneniy Shredingera [On reduction and exact solutions of nonlinear multidimensional Schrödinger equations]. Theor. & Math. Physics, 1991. Vol. 87. No. 2. Pp. 220–234 (in Russian).

35. *Ibragimov N.H.* (ed.). CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Vol. 2. Applications in Engineering and Physical Sciences. Boca Raton: CRC Press, 1995.

36. *Gagnon L., Winternitz P.* Lie symmetries of a generalized nonlinear Schrödinger equation. II. Exact solutions. J. Phys. A: Math. Gen., 1989. Vol. 22. No. 5. 469.

37. *Zhong W.-P., Xie R.-H., Belić M., Petrović N., Chen G.* Exact spatial soliton solutions of the two-dimensional generalized nonlinear Schrödinger equation with distributed coefficients. Physical Review A, 2008. Vol. 78. 023821.

38. *Seadawy A.R.* Exact solutions of a two-dimensional nonlinear Schrödinger equation. Applied Mathematics Letters, 2012. Vol. 25. No. 4. Pp. 687–691.

39. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems. Boca Raton–London: CRC Press, 2018.

40. *Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E.* Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists, 2nd ed. Boca Raton–London: CRC Press, 2016.