Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», 2025, т. 14, № 2, с. 141 – 148

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

https://doi.org/10.26583/vestnik.2025.2.5 *Оригинальная статья* / *Original paper*

УДК 519.67

Приближенное решение параметрического уравнения пятой степени

 К. Я. Кудрявцев

Институт интеллектуальных кибернетических систем, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

Задача нахождения корней полиномов высоких степеней является сложной и в общем случае неразрешимой. Однако в ряде частных случаев корни могут быть найдены. В статье предлагается оригинальный подход поиска корней частного полинома пятой степени, содержащего параметр в качестве свободного члена. Попытка найти корни параметрического полинома пятой степени путем представления данного полинома в виде произведения полиномов третьей и второй степени, с последующим составлением системы уравнений для нахождения коэффициентов полиномов третьей и второй степени, приводит к очень громоздким уравнениям, сложность решения которых является очень высокой. Поэтому предлагается подход, идея которого состоит в том, что сначала выполняется поиск корней для фиксированных значений параметра. Далее, задавая небольшое приращение значению параметра, проводится анализ на изменение значений корней полинома. Это становится возможным в силу того, что параметр является свободным членом полинома, и его приращение приводит к сдвигу графика полинома вдоль вертикальной оси. Данный подход позволяет находить приближенные значения корней без использования итерационных численных методов.

Ключевые слова: полиномы высоких степеней, параметрический полином пятой степени, корни полинома.

Введение

Нахождение корней полиномов высоких степеней (четвертого и выше) является в общем случае неразрешимой задачей. Однако в ряде частных случаев корни могут быть найдены. Как правило, это делается путем отыскания одного корня и последующего понижения степени полинома путем деления его на линейный полином вида $P(x)=x-x_1$, где x_1 – найденный корень. Решению уравнений пятой степени посвящены работы [1, 2]. Имеется численный метод нахождения одного или двух действительных корней уравнения нечетной степени, который не требует задания начального приближения, и который справедлив для уравнения пятой степени [3]. Но он действует лишь при определенных ограничениях на коэффициенты уравнения. В данной статье предлагается подход нахождения корней частного полинома пятой степени. Корни находятся приближенно, без применения итерационных процедур.

Постановка задачи

Математической лигой НИЯУ МИФИ была сформулирована следующая задача: требуется решить уравнение

$$16x^4-20x^2+5=\frac{a}{x} \tag{1}$$

для всех значений параметра a из диапазона $-1\le a\le 1$.

✉ К.Я. Кудрявцев: KYKudryavtsev@mephi.ru

Поступила в редакцию: 24.12.2024
После доработки: 19.03.2025
Принята к публикации: 25.03.2025

EDN HZAFNF

Введя переменную $y = 2x$, запишем (1) следующим образом:

$$y^4 - 5y^2 + 5 = \frac{2a}{y}, \tag{2}$$

или

$$y^5 - 5y^3 + 5y - 2a = 0. \tag{3}$$

В [4] предлагается способ нахождения корней подобных уравнений путем представления (3) в виде произведения полиномов третьей и второй степеней:

$$y^5 - 5y^3 + 5y - 2a = \left(y^3 + b_2 y^2 + b_1 y + b_0\right) \cdot \left(y^2 + c_1 y + c_0\right). \tag{4}$$

Раскрывая скобки в правой части выражения (4) и сравнивая коэффициенты при соответствующих степенях y, придем к системе

$$\begin{cases} b_2 + c_1 = 0, \\ b_2 c_1 + b_1 + c_0 = -5, \\ b_2 c_0 + b_1 c_1 + b_0 = 0, \\ b_1 c_0 + b_0 c_1 = 5, \\ b_0 c_0 = -2a. \end{cases} \tag{5}$$

Если решить данную систему уравнений, то найти корни кубического уравнения можно с помощью формул Кардано [5, 6] или тригонометрической формулы Виета[1]. Коэффициенты b_0, b_1, b_2 легко выражаются через c_0 и c_1. Однако вычисление c_0 и c_1 связано с существенными трудностями. Выполняя эквивалентные преобразования, можно установить, что

$$c_1 = \frac{-\left(5c_0 - c_0^3\right) \pm \sqrt{\left(5c_0 - c_0^3\right)^2 + 16a^2 c_0}}{4a}.$$

Коэффициент c_0, в свою очередь, находится из уравнения

$$\frac{-\left(5c_0 - c_0^3\right) \pm \sqrt{\left(5c_0 - c_0^3\right)^2 + 16a^2 c_0}}{4a} = \pm\sqrt{\frac{3c_0 + 5 \pm \sqrt{5c_0^2 + 10c_0 + 5}}{2}},$$

аналитическое решение которого вряд ли возможно. Применение итерационных методов [7–9] сопряжено со значительными трудностями, потребует хорошего начального приближения и большого количества итераций. Поэтому предлагается неитерационный метод приближенного поиска корней уравнения (3).

Метод приближенного поиска корней уравнения

В основе данного метода лежит тот факт, что в исходном полиноме

$$P(y, a) = y^5 - 5y^3 + 5y - 2a \tag{6}$$

[1] Тригонометрическая формула Виета: материал из Википедии – свободной энциклопедии [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/?curid=591745&oldid=140999290 (дата обращения 23.10.2024).

параметр a является свободным членом. Следовательно, при его изменении в диапазоне $-1 \le a \le 1$ происходит смещение графика кривой полинома $P(y, a)$ вдоль оси y.

Таким образом, если найти значение корней полинома при каком-то фиксированном значении параметра a, то потом можно будет находить значения других корней путем добавления небольшого приращения Δa и анализа изменения (смещения) корней, вызванного сдвигом графика кривой вдоль оси y.

Проведем анализ зависимости корней уравнения $P(y, a) = 0$ от параметра a. Для этого построим графики зависимости полинома $P(y, a)$ при различных значениях $-1 \le a \le 1$, которые представлены на рис. 1.

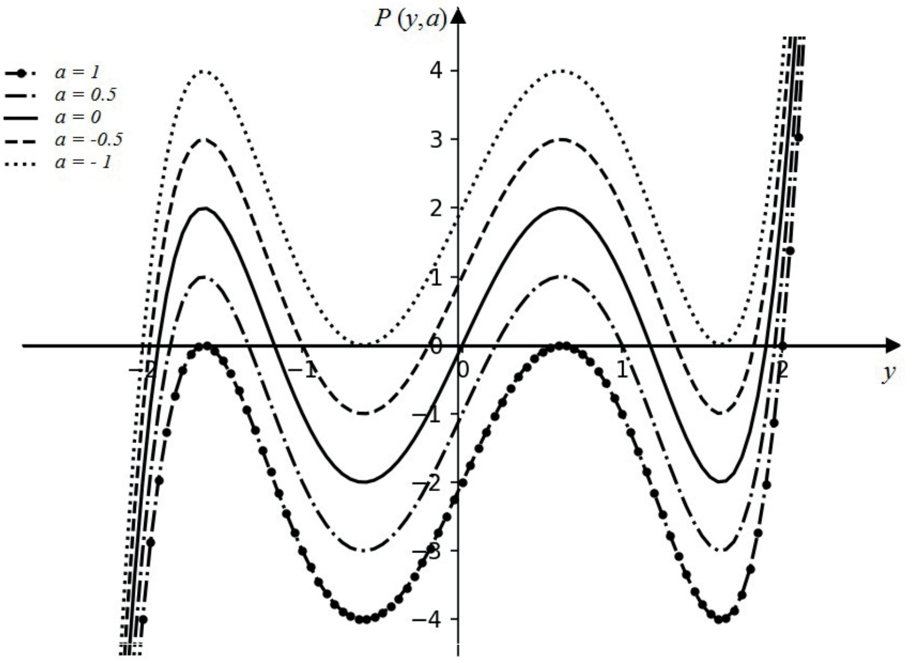

Рис. 1. Графики зависимости полинома $P(y, a)$ при различных значениях a

Из графиков видно, что при изменении параметра a происходит смещение кривой вдоль оси y. Поэтому надо найти корни полинома при некотором значении a, и далее будем находить значения корней путем добавления небольшого приращения Δa и анализа изменения (смещения) корней, вызванного сдвигом кривой вдоль оси y.

Заметим, что в уравнении (3) члены без параметра образуют полином по нечетным степеням, следовательно, при изменении параметра в пределах симметричного относительно нуля интервала достаточно определить корни на положительном или отрицательном полуинтервале – остальные корни будут противоположны найденным по знакам. Поэтому проведем анализ только для диапазона $0 \le a \le 1$.

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $P(2, 1) = 0$, т.е. $y = 2$, является корнем полинома (при $a = 1$). Кроме того, корни полинома $P(y, 1)$ совпадают с точками экстремумов, которые могут быть найдены из решения уравнения

$$P'(y,1) = 5y^4 - 15y^2 + 5 = P'(y,1) = y^4 - 3y^2 + 1 = 0,$$

а именно:

$$y_1 = -\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \cong -1.618, \tag{7}$$

$$_2 = +\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \cong +0.618. \tag{8}$$

Отметим, что корни $y_1=-1.618$ и $y_2=+0.618$ имеют кратность 2, а пятым корнем является $y_5=2$.

Если теперь положить $a=1-\Delta a$, где Δa – довольно малое положительное число, то значения корней уравнения $P(y,\,1-\Delta a)=0$ также изменятся. Будем иметь пять корней:

$$z_1=y_1-\Delta y;\quad z_2=y_1+\Delta y;\quad z_3=y_2-\Delta y;\quad z_4=y_2+\Delta y;\quad z_5=y_5-\Delta y.$$

Подставляя z_5 в $P(y,\,1-\Delta a)$, выполняя преобразования и оставляя слагаемые, содержащие только Δy, будем иметь:

$$-5y_3^4\Delta y+15y_3^2\Delta y-5\Delta y+2\Delta a=0,$$

или, учитывая, что $y_5=2$,

$$\Delta y=\frac{2}{25}\Delta a.$$

Таким образом, в окрестности точки $y=2$ значение корня будет равно

$$z_5=2-\frac{2}{25}\Delta a\ \text{ или }\ z_5=2-\frac{2}{25}(1-a).\tag{9}$$

Подстановка z_1 в $P(y,\,1-\Delta a)$ дает

$$(y_1-\Delta y)^5-5(y_1-\Delta y)^3+5(y_1-\Delta y)-2(1-\Delta a)=0.$$

Раскрывая скобки и оставляя слагаемые содержащие Δy и Δy^2, будем иметь:

$$y_1^5-5y_1^4\Delta y+10y_1^3\Delta y^2-5y_1^3+15y_1^2\Delta y-15y_1\Delta y^2+5y_1-5\Delta y-2+2\Delta a=0.$$

Учитывая, что при $y_1\cong-1.618$ $y_1^5-5y_1^3+5y_1-2=0$ и $5y_1^4-15y_1^2+5=0$, перепишем последнее уравнение в следующем виде:

$$10y_1^3\Delta y^2-15y_1\Delta y^2+2\Delta a=0,$$

и, следовательно,

$$\Delta y=\sqrt{\frac{2}{15y_1-10y_1^3}\Delta a}\cong\sqrt{\frac{2}{18.088}\Delta a}\cong0.3325\sqrt{1-a}.$$

Таким образом, в окрестности точки $y=-1.618$ новое значение корня будет равно

$$z_1=-1.618-0.3325\sqrt{1-a}.\tag{10}$$

Рассуждая аналогичным образом, найдем выражения для корней z_2, z_3, и z_4:

$$z_2=-1.618+0.3325\sqrt{1-a},\tag{11}$$

$$z_3=0.618-0.3325\sqrt{1-a},\tag{12}$$

$$z_4 = 0.618 + 0.3325\sqrt{1-a}. \tag{13}$$

При $a=0$ корни находятся достаточно легко:

$$P(y,0) = y^5 - 5y^3 + 5y = y\left(y^4 - 5y^2 + 5\right) = 0,$$

$$\begin{gathered} y_1 = -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \cong -1.902; \quad y_2 = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \cong -1.176; \quad y_3 = 0; \\ y_4 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \cong 1.176; \quad y_2 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \cong 1.902. \end{gathered} \tag{14}$$

Для диапазона $-1 \le a < 0$ корни будут противоположны по знакам корням, найденным выше для диапазона $0 < a \le 1$. Таким образом, для $a=-1$ будем иметь:

$$y_1 = -2; \quad y_2 = -\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \cong -0.618; \quad y_3 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \cong 1.618; \tag{15}$$

причем, корни $y_2=-0.618$ и $y_3=+1.618$ имеют кратность 2.

Для $a=-1+\Delta a$, где Δa – довольно малое положительное число, можем записать:

$$z_1 = -2 + \frac{2}{25}\Delta a \text{ или } z_1 = -2 + \frac{2}{25}(1+a), \tag{16}$$

$$z_2 = -0.618 - 0.3325\sqrt{1+a}, \tag{17}$$

$$z_3 = -0.618 + 0.3325\sqrt{1+a}, \tag{18}$$

$$z_4 = 1.618 - 0.3325\sqrt{1+a}, \tag{19}$$

$$z_5 = 1.618 + 0.3325\sqrt{1+a}. \tag{20}$$

Таким образом, зависимость корней уравнения (3) от параметра a может быть представлена в виде набора формул (7) – (20).

Анализ зависимости корней полинома от параметра a показывает, что при $a \approx 1$ корни располагаются около точек:

$$y_1 = -\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \cong -1.618; \quad y_2 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \cong 0.618; \quad y_3 = 2.$$

По мере уменьшения параметра a корни отходят («расползаются») от этих точек по выведенным формулам. От –1.618 корни движутся к –1.902 и –1.176, а от 0.618 – к нулю и 1.176. От точки +2 корень смещается влево к 1.902.

При переходе параметра a в область отрицательных значений, т.е. при $-1 \le a < 0$, корни начинают сосредотачиваться около точек –2, –0.618 и 1.618, и при $a=-1$ имеем три корня: –2, –0.618 и 1.618.

Учитывая первоначальную замену переменной $y=2x$, окончательно представим полученные результаты в виде табл. 1.

Таблица 1. Корни полинома при различных значениях параметра a

Параметр	Корни				
a	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-1	-1	-0.309	-0.309	0.809	0.809
$-1<a<0$	$-1+\frac{1}{25}(1+a)$	$-0.309-$ $-0.1662\sqrt{1+a}$	$-0.309+$ $+0.1662\sqrt{1+a}$	$0.809-$ $-0.1662\sqrt{1+a}$	$0.809+$ $+0.1662\sqrt{1+a}$
0	-0.951	-0.588	0	0.588	0.951
$0<a<1$	$-0.809-$ $-0.1662\sqrt{1-a}$	$-0.809+$ $+0.1662\sqrt{1-}$	$0.309-$ $-0.1662\sqrt{1-a}$	$0.309+$ $+0.1662\sqrt{1-a}$	$1-\frac{1}{25}(1-a)$
1	-0.809	-0.809	0.309	0.309	1

Выводы

В работе предложен неитерационный метод поиска корней частного полинома пятой степени, содержащего параметр в качестве свободного члена. Метод состоит в том, что сначала выполняется поиск корней для фиксированных значений параметра, которые, как правило, удается найти достаточно легко. Далее, задавая небольшое приращение значению параметра, проводится анализ на изменение значений корней полинома. Это возможно в силу того, что параметр является свободным членом полинома, и его приращение приводит к сдвигу графика полинома вдоль вертикальной оси. Данный подход позволяет находить приближенные значения корней без использования итерационных численных методов.

В качестве дальнейших исследований представляется целесообразным попытаться решить уравнение (3) по известным формулам Эйткена или Эйлера [10, 11].

Финансирование

Автор заявляет об отсутствии источников финансирования.

Конфликт интересов

Конфликт интересов отсутствует.

Список литературы

1. *Клейн Ф.* Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени / Пер. с нем.; Под. ред. А.Н. Тюрина. М.: Наука, 1989. 336 с.

2. *Михалкин Е.Н.* О решении уравнения пятой степени // Известия вузов. Математика. 2009. № 6. С. 20–30.

3. *Ростовцев Н.А.* Об итерационном решении уравнений нечетных степеней с положительными коэффициентами // УМН, 1952. Т. 7. Вып. 3(49). С. 135–138.

4. *Несмеев Ю.А.* Решение уравнения пятой степени разложением левой части на произведение многочленов второй и третьей степени // Вестник Пермского университета. Сер.: Математика. Механика. Информатика. Вып. 1 (36), 2017. С. 21–28.

5. *Гусак А.А., Гусак Г.М., Бричикова Е.А.* Справочник по высшей математике. Минск: ТетраСистемс, 1999. 640 с.

6. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1973. 720 с.

7. *Лебедев В.И.* Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 296 с.

8. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. 636 с.

9. *Кудрявцев К.Я., Прудников А.М.* Методы оптимизации. М.: НИЯУ МИФИ, 2015, 140 с.

10. *Шмойлов В.И., Кириченко Г.А.* Решение алгебраических уравнений непрерывными дробями Никипорца // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер.: Математика. Механика. Информатика, 2014. Т. 14. Вып. 4. Ч. 1. С. 428 – 439. DOI: 10.18500/1816-9791-2014-14-4-428-439.

11. *Абызов А.Н.* Метод Фаньяно решения алгебраических уравнений: исторический обзор и его развитие // Ученые записки Казанского университета. Сер.: Физико-математические науки, 2021. Т. 163. Кн. 3 – 4. С. 304 – 348. DOI: 10.26907/2541-7746.2021.3-4.304-348.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2025, vol. 14, no. 2, pp. 141 – 148

Approximate solution of a parametric equation of the fifth degree

K. Ya. Kudryavtsev✉

National Research Nuclear University «MEPhI», Moscow, 115409, Russia

✉ KYKudryavtsev@mephi.ru

Received December 24, 2024; revised March 19, 2025; accepted March 25, 2025

The problem of finding the roots of high-degree polynomials is complex and generally unsolvable. However, in a number of special cases, the roots can be found. The article proposes an original approach to finding the roots of a partial fifth-degree polynomial containing a parameter as a free term. An attempt to find the roots of a parametric fifth-degree polynomial by representing this polynomial as a product of third- and second-degree polynomials, with the subsequent compilation of a system of equations for finding the coefficients of third- and second-degree polynomials, leads to very cumbersome equations, the complexity of solving which is very high. Therefore, an approach is proposed, the idea of which is that the roots are first found for fixed values of the parameter. Then, by setting a small increment to the parameter value, an analysis is carried out for changes in the values of the roots of the polynomial. This becomes possible due to the fact that the parameter is a free term of the polynomial and its increment leads to a shift in the polynomial graph along the vertical axis. This approach allows finding approximate values of roots without using iterative numerical methods.

Keywords: polynomials of high degrees, parametric polynomial of the fifth degree, roots of the polynomial.

References

1. *Klein F.* Lekcii ob ikosaedre i reshenii uravnenij pyatoj stepeni / Per. s nem., pod. red. A.N. Tyurina [Lectures on the icosahedron and the solution of equations of the fifth degree / translated from German, edited by A.N. Tyurin]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 336 p.

2. *Mikhalkin E.N.* O reshenii uravneniya pyatoj stepeni [On the solution of the equation of the fifth degree]. Izvestiya vuzov. Matematika, 2009. No. 6. Pp. 20 – 30 (in Russian).

3. *Rostovtsev N.A.* Ob iteracionnom reshenii uravnenij nechetnyj stepenej s polozhitel'nymi koefficientami [On the iterative solution of equations of odd degrees with positive coefficients]. UMN, 1952. Vol. 7. Iss. 3 (49). Pp. 135 – 138 (in Russian).

4. *Nesmeev Yu.A.* Reshenie uravneniya pyatoj stepeni razlozheniem levoj chasti na proizvedenie mnogochlenov vtoroj i tret'ej stepeni [Solution of the equation of the fifth degree by decomposing the left-hand side into a product of polynomials of the second and third degrees]. Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika, 2017. Iss. 1 (36). Pp. 21 – 28 (in Russian).

5. *Gusak A.A., Gusak G.M., Brichikova E.A.* Spravochnik po vysshej matematike [Handbook of Higher Mathematics]. Minsk, Tetrasystems Publ., 1999. 640 p. (in Russian).

6. *Korn G., Korn T.* Spravochnik po matematike (dlya nauchnyh rabotnikov i inzhenerov) [Handbook of Mathematics (for scientists and engineers)]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 720 p. (in Russian).

7. *Lebedev V.I.* Funkcional'nyj analiz i vychislitel'naya matematika [Functional analysis and computational mathematics]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2005. 296 p. (in Russian).

8. *Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M.* Chislennye metody [Numerical methods]. Moscow, BINOM. Laboratoriya znanij Publ., 2008. 636 p. (in Russian).

9. *Kudryavtsev K.Ya., Prudnikov A.M.* Metody optimizacii [Optimization methods]. Moscow, NIYAU MIFI Publ., 2015, 140 p. (in Russian).

10. *Shmoilov V.I., Kirichenko G.A.* Reshenie algebraicheskih uravnenij nepreryvnymi drobyami Nikiporca [Solution of algebraic equations by Nikiports continued fractions]. Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika, 2014. Vol. 14. Iss. 4. Part 1. Pp. 428–439. DOI: 10.18500/1816-9791-2014-14-4-428-439 (in Russian).

11. *Abyzov A.N.* Metod Fan'yano resheniya algebraicheskih uravnenij: istoricheskij obzor i ego razvitie [Fagnano method for solving algebraic equations: historical review and its development]. Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki, 2021. Vol. 163. Book 3. Pp. 304–348. DOI: 10.26907/2541-7746.2021.3-4.304-348 (in Russian).