

УДК 512.1; 517.58

Решение обобщенного сравнения степенных выражений с помощью W -функции Ламберта

© 2025 г. А. Е. Дубинов^{1,2}¹ Саровский физико-технический институт – филиал Научно-исследовательского ядерного университета «МИФИ» (СарФТИ НИЯУ МИФИ), Саров, Нижегородская обл., 607186, Россия² Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики (РФЯЦ-ВНИИЭФ), Саров, Нижегородская обл., 607188, Россия

Представлены некоторые свойства новой трансцендентной W -функции Ламберта: определение функции, ее график, координаты характерных точек, простейшие тождества. Даны несколько примеров, показывающих, как с помощью W -функции можно решать аналитически трансцендентные уравнения, содержащие степенные, логарифмические и экспоненциальные члены. Представлено полученное недавно решение сравнения двух функциональных выражений степенного типа x^y и y^x , которое возникает благодаря обобщению сравнения чисел e^π и π^e . Впервые получено точное решение нового обобщенного сравнения более сложных степенных выражений x^{y^α} и y^{x^α} на множествах положительных действительных чисел x и y для положительных значений показателя α . Решение представлено как в виде точной формулы с помощью W -функции Ламберта, так и с помощью графиков.

Ключевые слова: W -функция Ламберта, трансцендентное уравнение, сравнение.

Введение

Более полувека назад канадский математик Иван М. Нивен, автор доказательства иррациональности числа π , придумал интересную задачу для студентов колледжей [1], которая связывает две фундаментальные математические константы e и π : требуется определить, не используя вычислений, что больше, e^π или π^e (в краткой записи это сравнение можно записать: $e^\pi \stackrel{?}{>} \pi^e$). Было найдено несколько эффективных методов решений этой задачи с помощью математического анализа, например в [1–4], или даже с помощью физических соображений в [5]. Ответ к этой задаче: $e^\pi > \pi^e$.

Задача имеет естественное обобщение [6, 7]: необходимо решить сравнение $x^y \stackrel{?}{>} y^x$ на множестве действительных положительных чисел и определить границы областей на плоскости xOy , в которых выполняется первый знак неравенства « $<$ », и границы областей, в которых выполняется второй знак неравенства « $>$ ». Иными словами, требуется найти уравнения границ между указанными областями. К примеру, $2^3 < 3^2$, но $2^5 > 5^2$.

Сравнение $x^y \stackrel{?}{>} y^x$ недавно точно решено в [8]. В этом решении уравнения границ определяются при помощи сравнительно новой трансцендентной функции – W -функции Ламберта.

В данной статье выведено точное решение обобщенного сравнения $x^{y^\alpha} \stackrel{?}{>} y^{x^\alpha}$. Оказывается, что уравнения границ областей и для этого обобщенного сравнения также можно выразить через W -функцию

✉ А.Е. Дубинов: dubinov-ae@yandex.ru

Поступила в редакцию: 14.05.2025

После доработки: 26.05.2025

Принята к публикации: 26.06.2025

Ламберта. Статья также преследует образовательную цель: ознакомление широкого круга специалистов, преподавателей и студентов с теми новыми возможностями, которые дает использование W -функции Ламберта – решение широкого круга трансцендентных уравнений и неравенств (или сравнений).

W -функция Ламберта: определение и некоторые свойства

В середине 1990-х годов пятеро математиков R.M. Corless, G.H. Gonnet, D.E.G. Hare, D.J. Jeffrey и D.E. Knuth – изобрели новую математическую функцию [9], назвав ее W -функцией Ламберта в честь знаменитого математика, механика и оптика И.-Г. Ламберта, коллеги Л. Эйлера по Берлинскому университету. И.-Г. Ламберт наиболее известен своими трудами по фотометрии. Он, например, установил закон распределения яркости в излучении абсолютно черного тела, впоследствии названный его именем. В оптике даже существует специальная единица яркости – ламберт.

Определение. W -функция Ламберта есть функция, обратная к функции $y = x \exp x$.

Это определение позволяет легко установить ее простейшие свойства и построить график (рис. 1). W -функция Ламберта не является ни четной, ни нечетной. Она определена в интервале $[-1/e; \infty)$, на котором принимает значения от $-\infty$ до $+\infty$, причем для отрицательных x функция двузначна. Точка A с координатами $(-1/e; -1)$ делит график функции на две сопряженные ветви, верхнюю $W_0(x)$ и нижнюю $W_{-1}(x)$ так, что обе ветви в точке A имеют вертикальную касательную. Верхняя ветвь $W_0(x)$, часто называемая основной [англ.: *the principal branch*], проходит через начало координат и больше не имеет особенностей. Нижняя же ветвь $W_{-1}(x)$ [англ.: *the negative branch*] имеет точку перегиба B с координатами $(-2/e^2; -2)$ и вертикальную асимптоту при $x = 0$. Другие целые значения индекса $k \neq -1; 0$ для функции $W_k(x)$ относятся к комплексно-значным ветвям, которых имеется бесконечно много [9, 19]. Заметим, что если индекс у W -функции Ламберта в каком-либо выражении не указан, то считается, что данное выражение справедливо для всех целых значений k .

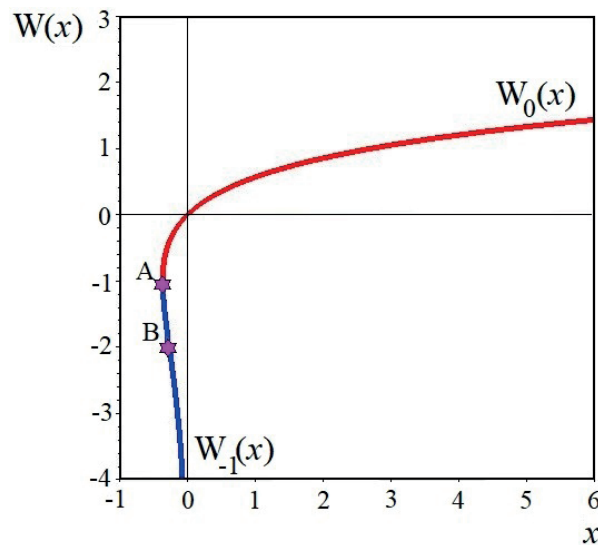


Рис. 1. График действительных ветвей W -функции Ламберта

Математические свойства W -функции Ламберта и многочисленные примеры ее применения в физических задачах представлены в обзорах [9–18] и книгах [19, 20].

W -функция Ламберта оказалась весьма востребованной для описания процессов и закономерностей во многих областях физики и техники. Укажем лишь несколько примеров: математическое описание ионного транспорта в электролитах [21], теплового излучения черного тела и, в частности, закона смещения Вина [10, 22], свойств термолюминесцентных дозиметров [23, 24], подъема жидкости в капиллярах [25], характеристик волны горения [26], диффузионно-дейфовых процессов в реальных газах [27].

Известно также несколько примеров эффективного использования комплекснозначных ветвей W -функции в задачах физики. Например, в [9] представлено решение задачи о распределении электрического поля в плоском конденсаторе конечных размеров, в [28] аналитически найден бесконечный набор решений дисперсионного уравнения Ландау для электронных колебаний плазмы, а в [29] – бесконечный набор решений дисперсионного уравнения для колебаний плазмы в рамках обобщенной больцмановской кинетики.

Кроме того, W -функция используется в теориях распространения эпидемий [9, 30]. Ряд примеров применения W -функции рассмотрен также в следующем разделе.

Рассмотрим только те, которые необходимы для решения сравнения $x^{y^a} \stackrel{?}{\leq} y^{x^a}$, а именно, методы решения трансцендентных уравнений.

W -функция Ламберта удовлетворяет следующим простым тождествам [19], которые следуют из ее определения:

$$\exp[W(a)] = \frac{a}{W(a)}; \quad (1)$$

$$\ln[W(a)] = \ln a - W(a). \quad (2)$$

И еще одно важное тождество, которое нам понадобится для решения основной задачи данной статьи:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\ln a} W_0\left(-\frac{\ln a}{a}\right) &\text{ при } 0 < a < e \\ -\frac{1}{\ln a} W_{-1}\left(-\frac{\ln a}{a}\right) &\text{ при } a \geq e \end{aligned} \right\} = -\ln a, \quad (3)$$

которое доказано в [8, 20]. Отметим, что выражение $-\frac{1}{\ln a} W_0\left(-\frac{\ln a}{a}\right)$ при $a \geq e$ и выражение $-\frac{1}{\ln a} W_{-1}\left(-\frac{\ln a}{a}\right)$ при $0 < a < e$ преобразовать подобным образом нельзя.

Решение трансцендентных уравнений

С помощью W -функции Ламберта можно легко решить трансцендентное уравнение

$$x \exp x = a. \quad (4)$$

Его решение есть $x = W(a)$. Мы осознанно здесь не поставили у функции индекс – номер ветви W -функции. Если $a \geq 0$, то действительное решение единственно, и оно определяется основной ветвью, а если же $-1/e < a < 0$, то действительных решений два, при $a = -1/e$ действительное решение снова единственное, и оно определяется точкой сопряжения действительных ветвей – точка A на рис. 1, а при $a < -1/e$ действительных корней нет. Если же задача заключается в нахождении всех комплексных корней уравнения (1), то ответ таков: $x_k = W_k(a)$, где номер k пробегает все целые числа от $-\infty$ до $+\infty$.

Однако было бы не интересно придумывать новую функцию для решения всего лишь одного трансцендентного уравнения. И W -функция Ламберта оказалась столь удачной, что с ее помощью можно решить много разных уравнений, систем уравнений и неравенств. Основная стратегия решения трансцендентных уравнений – сведение их к выражению вида $f \exp f$, воспроизводящему определение W -функции Ламберта. Приведем несколько примеров решения некоторых простейших трансцендентных уравнений, используя эту стратегию.

Рассмотрим уравнение

$$x + \exp x = a. \quad (5)$$

Уравнение, подобное (5), описывает простейшее критическое условие для гомогенного ядерного реактора без отражения нейтронов [31], и аналогичное уравнение, но с другими параметрами, возникает в задаче об электрической зарядке пылинки в плазме [32].

Уравнение (5) решается так. Сначала возьмем экспоненту от правой и левой его частей:

$$\exp(x + \exp x) = \exp a, \quad (6)$$

а затем перепишем в виде, воспроизводящем определение W -функции,

$$\exp x \cdot \exp(\exp x) = \exp a. \quad (7)$$

Тогда

$$\exp x = W_0(\exp a). \quad (8)$$

Мы взяли здесь основную ветвь W -функции, поскольку ее аргумент всегда положителен. Логарифмируя обе части (8), получим единственный действительный корень уравнения

$$x = \ln[W_0(\exp a)] = a - W_0(\exp a). \quad (9)$$

В завершающем решении в (9) мы воспользовались тождеством (2).

Рассмотрим теперь трансцендентное уравнение, которое возникает, например, при решении задач о распределении плотности плазмы в приэлектродных слоях [33] и задач о форме солитонов в плазме [18, 34]:

$$x + \ln x = a. \quad (10)$$

Для решения достаточно переписать его в виде

$$\ln(\exp x) + \ln x = \ln(x \exp x) = a. \quad (11)$$

Взяв экспоненты от обеих частей уравнения (11), можно привести это уравнение к виду, воспроизводящему определение W -функции. Тогда его корень есть

$$x = W_0(\exp a). \quad (12)$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$x \exp(ax^2) = 1, \quad (13)$$

которое возникает в теориях броуновского движения частиц [35] и, например, в задаче о предельной скорости ионно-звукового солитона в плазме [13, 36]. Возведем обе части (13) в квадрат, а затем умножим их на $2a$. В результате этих действий получим уравнение, в котором левая часть воспроизводит определение W -функции Ламберта:

$$2ax^2 \exp(2ax^2) = 2a. \quad (14)$$

Взяв от обеих частей (14) W -функцию Ламберта, легко получим решение уравнения (13):

$$x = \sqrt{\frac{W(2a)}{2a}}. \quad (15)$$

Решение сравнения $x^y \stackrel{?}{\lessgtr} y^x$ с использованием W -функции Ламберта (по [8])

Ознакомившись с точными решениями трансцендентных уравнений, содержащих степенные, логарифмические и экспоненциальные члены, рассмотрим решение сравнения $x^y \stackrel{?}{\lessgtr} y^x$ по материалам статьи [8]. Для нахождения уравнений границ областей следует решить трансцендентное уравнение на множестве положительных действительных чисел

$$x^y = y^x, \quad (16)$$

например, относительно y . Его решение легко получить, используя W -функцию Ламберта и рассмотренную в предыдущей секции стратегию:

$$y_{-1,0} = -\frac{x}{\ln x} W_{-1,0} \left(-\frac{\ln x}{x} \right) = \exp \left[-W_{-1,0} \left(-\frac{\ln x}{x} \right) \right]. \quad (17)$$

Поскольку функция $\ln x$ при положительных значениях x может быть как положительной, так и отрицательной, то в решении (17) должны быть задействованы две действительные ветви W -функции Ламберта. В (17) даны две эквивалентные формы записи решения. Их эквивалентность легко подтверждается с помощью тождества (1). Решение (17) представляет собой уравнения границ областей в первом квадранте плоскости xOy , в каждой из которых выполняется один из знаков неравенства в сравнении $x^y \stackrel{?}{\lessgtr} y^x$.

Заметим, что аргумент экспоненты представляет собой функциональное выражение, входящее в левую часть тождества (3). Пользуясь им, можно преобразовать (17) в более удобную форму, позволяющую увидеть, что некоторые ветви решения являются, по сути, тривиальным решением $y = x$:

$$y = \begin{cases} x & \text{при } 0 < x < 1; \\ \begin{cases} x \\ \exp \left[-W_{-1} \left(-\frac{\ln x}{x} \right) \right] \end{cases} & \text{при } 1 < x < e; \\ \begin{cases} x \\ \exp \left[-W_0 \left(-\frac{\ln x}{x} \right) \right] \end{cases} & \text{при } e < x < \infty. \end{cases} \quad (18)$$

Решение в форме (18) получено в [8].

Теперь можно построить в первом квадранте плоскости xOy графики границ, задаваемых уравнениями (18) (рис. 2). Квадрант поделен границами на четыре области, в двух из которых выполняется $x^{y^a} > y^{x^a}$, а в двух других $-x^{y^a} < y^{x^a}$.

Все границы стягиваются к единой точке пересечения A^* , координаты которой (e, e) . Значения координат в этой точке соответствуют точке сопряжения ветвей функции $W_{-1,0} \left(-\frac{\ln x}{x} \right)$, входящей

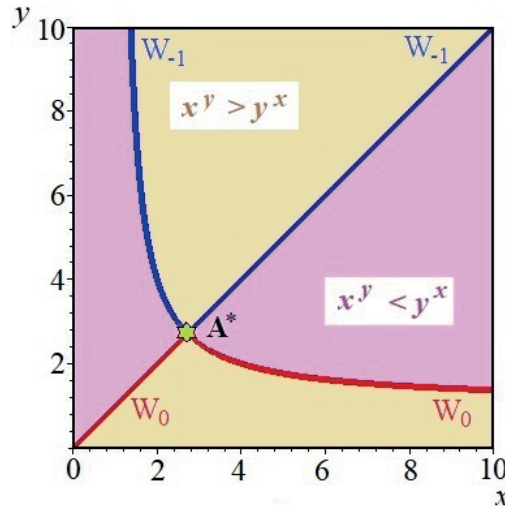


Рис. 2. Графики границ областей с различающимися знаками неравенства для сравнения $x^y \stackrel{?}{\gtrless} y^x$

в (18), аналогичной точке A на рис. 1. Фактически, точка A^* на рис. 2 является образом точки A рис. 1 при преобразовании аргумента $x \rightarrow -\frac{\ln x}{x}$ W -функции Ламберта.

Точка с координатами (e, π) , соответствующая сравнению Нивена $e^\pi \stackrel{?}{\gtrless} \pi^e$, лежит чуть выше точки A^* в области $x^y > y^x$, из чего сразу же следует ответ: $e^\pi > \pi^e$. Поразительно, что сам Нивен построил аналогичные графики границ, показанных на рис. 2, и определил координаты точки A^* почти на 20 лет раньше публикаций о новой W -функции Ламберта!

Решение обобщенного сравнения $x^{y^\alpha} \stackrel{?}{\gtrless} y^{x^\alpha}$

Воспользовавшись свойствами W -функции Ламберта и стратегией решения трансцендентных экспоненциально-степенных уравнений, приступим к решению обобщенного сравнения $x^{y^\alpha} \stackrel{?}{\gtrless} y^{x^\alpha}$, в котором показатель α задан положительным числом. Решим уравнение

$$x^{y^\alpha} = y^{x^\alpha}, \quad (19)$$

определяющее границы областей, например, относительно y :

$$y_{-1,0} = \exp \left[-\frac{1}{\alpha} W_{-1,0} \left(-\frac{\alpha \ln x}{x^\alpha} \right) \right]. \quad (20)$$

Если внести коэффициент α под знак логарифма, то аргумент W функции в (20) примет вид

$$-\frac{\ln x^\alpha}{x^\alpha} = -\frac{\ln \tilde{x}}{\tilde{x}}, \quad (21)$$

где $\tilde{x} = x^\alpha$, который также позволяет воспользоваться тождеством (3). В результате, получаем решение уравнение (19) в виде

$$y = \begin{cases} x & \text{при } 0 < x < 1; \\ \begin{cases} x & \text{при } 1 < x < e^{1/\alpha}; \\ \exp\left[-\frac{1}{\alpha} W_{-1}\left(-\frac{\alpha \ln x}{x^\alpha}\right)\right] & \text{при } 1 < x < e^{1/\alpha}; \end{cases} \\ \begin{cases} x & \text{при } e^{1/\alpha} < x < \infty. \\ \exp\left[-\frac{1}{\alpha} W_0\left(-\frac{\alpha \ln x}{x^\alpha}\right)\right] & \text{при } e^{1/\alpha} < x < \infty. \end{cases} \end{cases} \quad (22)$$

Построим в первом квадранте плоскости xOy графики границ, задаваемых уравнениями (22) для двух значений показателя α : $\alpha < 1$ и $\alpha > 1$ (рис. 3 а, б). В обоих случаях квадрант так же, как и на рис. 2, поделен границами на четыре области, в двух из которых выполняется $x^{y^\alpha} > y^{x^\alpha}$, а в двух других – $x^{y^\alpha} < y^{x^\alpha}$. При этом точка пересечения границ A^* имеет координаты $(e^{1/\alpha}, e^{1/\alpha})$.

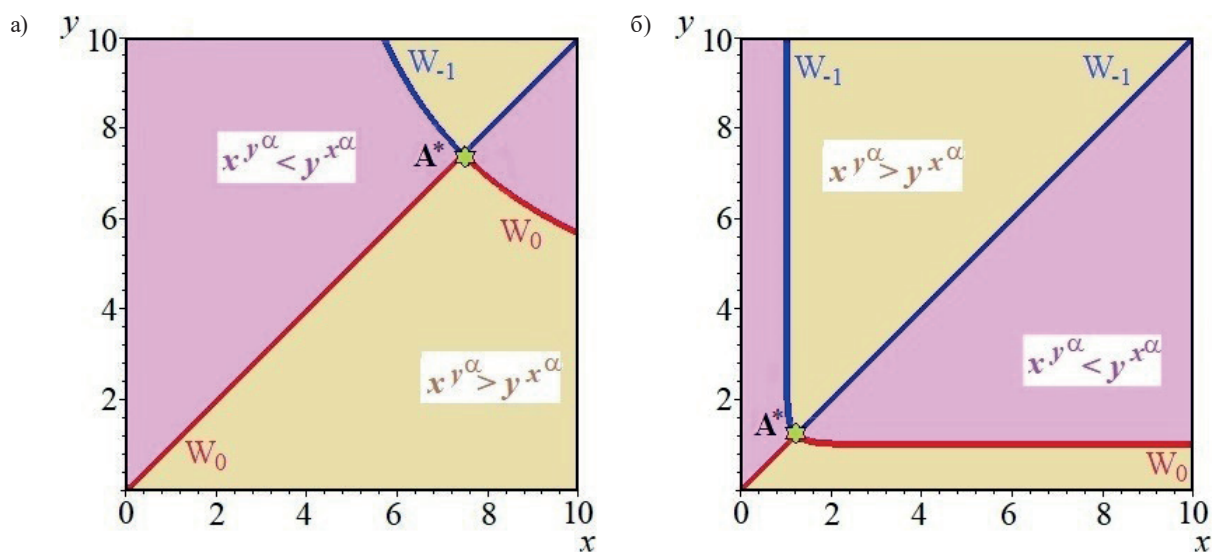


Рис. 3. Графики границ областей с различающимися знаками неравенства для обобщенного сравнения $x^{y^\alpha} \stackrel{?}{\lessgtr} y^{x^\alpha}$: а) при $\alpha = 1/2$; б) при $\alpha = 5$

Таким образом, обобщенное сравнение $x^{y^\alpha} \stackrel{?}{\lessgtr} y^{x^\alpha}$ полностью решено на множестве положительных действительных чисел.

Заключение

В статье представлены некоторые важные свойства трансцендентной W -функции Ламберта: график, координаты характерных точек, тождества. Показано, как с помощью W -функции можно решать трансцендентные уравнения, содержащие степенные, логарифмические и экспоненциальные члены.

Представлено полученное в [8] решение сравнения $x^{y^\alpha} \stackrel{?}{\lessgtr} y^{x^\alpha}$, возникшего благодаря обобщению сравнения чисел e^π и π^e .

Получено точное решение обобщенного сравнения $x^{y^\alpha} \stackrel{?}{\lessgtr} y^{x^\alpha}$ на множестве положительных действительных чисел для положительных значений показателя α . Решение представлено в виде точной формулы с помощью W -функции Ламберта и графиков.

Финансирование

Автор заявляет об отсутствии прямых источников финансирования.

Конфликт интересов

Конфликт интересов отсутствует.

Список литературы

1. Niven I. Which is larger, e^π or π^e ? // Two-Year College Mathematics Journal, 1972. V. 3. № 2. Pp. 13–15. DOI: 10.1080/00494925.1972.11974209.
2. McCartin B.J. e : the master of all // Mathematical Intelligencer, 2006. V. 28. P. 10–21. DOI: 10.1007/BF02987150.
3. Chakraborty B. A visual proof that $\pi^e < e^\pi$ // Mathematical Intelligencer, 2019. V. 41. P. 56. DOI: 10.1007/S00283-018-9816-4.
4. Haque N. A visual proof that $e < A \Rightarrow e^A > A^e$ // Mathematical Intelligencer, 2020. V. 42. P. 74. DOI: 10.1007/S00283-019-09964-X.
5. Vallejo A., Bove I. Which is greater: e^π or π^e ? An unorthodox physical solution to a classic puzzle // American Journal of Physics, 2024. V. 92. P. 397–398. DOI: 10.1119/5.0188912.
6. Rosendahl J., Gilmore J. Comparing B^A and A^B for $A > B$ // College Mathematics Journal, 1987. V. 18. P. 50. DOI: 10.1080/07468342.1987.11973008.
7. Chakraborty B. A visual proof that $b^a < a^b$ when $e \leq a < b$ // International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 2024. V. 55. P. 1291–1292. DOI: 10.1080/0020739X.2022.2102547.
8. Haque N., Chakraborty B. Comparing a^b and b^a via location of zeros // Mathematical Intelligencer, 2025. V. 47. P. 40–43. DOI: 10.1007/s00283-024-10342-5.
9. Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E. G., Jeffrey D.J., Knuth D.E. On the Lambert W function // Advances in Computational Mathematics, 1996. V. 5. P. 329–359. DOI: 10.1007/BF02124750.
10. Valluri S.R., Jeffrey D.J., Corless R.M. Some applications of the Lambert W function to physics // Canadian Journal of Physics, 2000. V. 78. P. 823–831. DOI: 10.1139/p00-065.
11. Дубинова И.Д. Применение W-функции Ламберта в математических задачах физики плазмы // Физика плазмы, 2004. Т. 30. С. 937–943. DOI: 10.1134/1.1809403.
12. Дубинова И.Д. Точные явные решения некоторых нелинейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения, 2004. Т. 40. С. 1129–1130. DOI: 10.1023/B:DIEQ.0000049837.34049.2d.
13. Dubinov A.E., Dubinova I.D. How can one solve exactly some problems in plasma theory // Journal of Plasma Physics, 2005. V. 71. P. 715–728. DOI: 10.1017/S0022377805003788.
14. Valluri S.R., Gil M., Jeffrey D.J., Basu S. The Lambert W function and quantum statistics // Journal of Mathematical Physics, 2009. V. 50. Article ID: 102103. DOI: 10.1063/1.3230482.
15. Veberič D. Lambert W function for applications in physics // Computer Physics Communications, 2012. V. 183. P. 2622–2628. DOI: 10.1016/j.cpc.2012.07.008.
16. Dence T.P. A brief look into the Lambert W function // Applied Mathematics, 2013. V. 4. P. 887–892. DOI: 10.4236/am.2013.46122.
17. Houari A. Additional applications of the Lambert W function in physics // European Journal of Physics, 2013. V. 34. P. 695–702. DOI: 10.1088/0143-0807/34/3/695.
18. Dubinov A.E. Mathematical tricks for pseudopotentials in the theories of nonlinear waves in plasmas // Physics of Plasmas, 2022. V. 29. Article ID: 020901-1–19. DOI: 10.1063/5.0078573.
19. Дубинов А.Е., Дубинова И.Д., Сайков С.К. W функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2006. 159 с.
20. Mezö I. The Lambert W function and its generalizations and applications. Boca Raton, FL: CRC Press, Taylor & Francis Group, LLC, 2022. 274 p.
21. Дубинов А.Е., Дубинова И.Д. Точное значение сопряженного тока в электролите в диффузионно-миграционной модели Гуревича – Харкаца // ЖТФ, 2004. Т. 74, С. 118–119. DOI: 10.1134/1.1826201.
22. Дубинов А.Е., Китаев И. Н. Обобщенные закон смещения Вина и закон Стефана – Больцмана для теплового излучения, имеющего ненулевой химический потенциал // Оптический журнал, 2018. Т. 85. С. 3–5. DOI: 10.1364/JOT.85.000314.
23. Kitis G., Pagonis V. New expressions for half life, peak maximum temperature activation energy and kinetic order of a thermoluminescence glow peak based on the Lambert W function // Radiation Measure, 2017. V. 97. P. 28–34. DOI: 10.1016/j.radmeas.2016.12.013.
24. Pagonis V., Kitis G., Chen R. A new analytical equation for the dose response of dosimetric materials, based on the Lambert W function // Journal of Luminescence, 2020. V.225. Article ID: 117333-1–7. DOI: 10.1016/j.jlumin.2020.117333.
25. Fries N., Dreyer M. An analytic solution of capillary rise restrained by gravity // Journal of Colloid and Interface Science, 2008. V. 320. P. 259–263. DOI: 10.1016/j.jcis.2008.01.009.
26. Дубинов А.Е., Дубинова И.Д., Сайков С.К. Точное решение задачи о распространении волны горения // Доклады Академии наук, 2004. Т. 394. С. 767–768. DOI: 10.1134/1.1686887.

27. Dubinov A.E. Einstein-Smoluchowski-type relations for real gases // Journal of Mathematical Chemistry, 2025. V. 63. P. 1116–1125. DOI: 10.1007/s10910-025-01711-2.
28. Дубинов А.Е., Дубинова И.Д. Точное решение дисперсионного уравнения Ландау для колебаний электронной плазмы // Письма в ЖТФ, 2006. Т. 32. С. 71–74. DOI: 10.1134/S1063785006010123.
29. Алексеев Б.В., Дубинов А.Е., Дубинова И.Д. Аналитические и численные решения обобщенных дисперсионных уравнений для одномерных затухающих колебаний плазмы // Теплофизика высоких температур, 2005. Т. 43. С. 485–491. DOI: 10.1007/s10740-005-0088-2.
30. Kudryashov N.A., Chmykhov M.A., Vigdorowitsch M.V. An estimative (warning) model for recognition of pandemic nature of virus infection // International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 2023. V. 24. P. 213–226. DOI: 10.1515/ijnsns-2020-0154.
31. Siewert C.E. An exact analytical solutions of an elementary critical condition // Nuclear Science and Engineering, 1973. V. 51. P. 78. DOI: 10.13182/NSE73-A23260.
32. Barkan A., D'Angelo N., Merlino L.R. Charging of dust grains in a plasma // Physical Review Letters, 1994. V. 73. P. 3093–3096. DOI: 10.1103/PhysRevLett.73.3093.
33. Альтеркоп Б.А., Дубинова И.Д., Дубинов А.Е. О структуре заряженного слоя на границе плазмы с заряженным телом // ЖЭТФ, 2006. Т. 129. С. 197–206. DOI: 10.1134/S1063776106010201.
34. Гордиенко В.А., Дубинова И.Д., Дубинов А.Е. Нелинейная теория стационарных уединенных волн большой амплитуды в симметричных немагнитных e^-e^+ -плазме и $C_{60}^-C_{60}^+$ -плазме // Физика плазмы, 2006. Т. 32. С. 987–993. DOI: 10.1134/S1063780X06110043.
35. Sastry G. M., Agmon N. The span of one-dimensional multiparticle Brownian motion // Journal of Chemical Physics, 1996. V. 104. P. 3022–3025. DOI: 10.1063/1.471069.
36. Vedenov A.A., Velikhov E.P., Sagdeev R.Z. Nonlinear oscillations of rarified plasma // Nuclear Fusion, 1961. V. 1. P. 82–100. DOI: 10.1117/12.965080.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2025, vol. 14, no. 4, pp. 357–367

Solving a generalized comparison of power expressions using the Lambert W function

A. E. Dubinov^{1,2,✉}

¹ Sarov Institute of Physics and Technology – Branch of National Research Nuclear University «MEPhI» (SarFTI – NRNU MEPhI), 6 Dukhova St., Sarov, Nizhny Novgorod region, 607186, Russia

² Russian Federal Nuclear Center – All-Russia Scientific and Research Institute of Experimental Physics (RFNC – VNIIEF), 37 Mira Ave., Sarov, Nizhny Novgorod region, 607188, Russia

✉ dubinov-ae@yandex.ru

Received May 14, 2025; revised June 25, 2025; accepted June 26, 2025

Some properties of the new transcendental Lambert W function are presented: the definition of the function, its graph, coordinates of characteristic points, and simple identities. Several examples are given showing how the W function can be used to solve analytically transcendental equations that contain power, logarithmic, and exponential terms. A recently obtained solution of the comparison of two functional expressions of power type x^y and y^x is presented, which arises due to the generalization of the comparison of numbers e^π and π^e . An exact solution of the new generalized comparison of more complex power expressions x^{y^α} and y^{x^α} on sets of positive real numbers x and y for positive values of the exponent α is obtained for the first time. The solution is presented both as an exact formula using the Lambert W function and using graphs.

Keywords: the Lambert W function, transcendent equation, comparison.

References

1. Niven I. Which is larger, e^π or π^e ? Two-Year College Mathematics Journal, 1972. Vol. 3, No. 2. Pp. 13–15. DOI: 10.1080/00494925.1972.11974209.
2. McCartin B.J. e : the master of all. Mathematical Intelligencer, 2006. Vol. 28. Pp. 10–21. DOI: 10.1007/BF02987150.
3. Chakraborty B. A visual proof that $\pi^e < e^\pi$. Mathematical Intelligencer, 2019. Vol. 41. Pp. 56. DOI: 10.1007/s00283-018-9816-4.
4. Haque N. A visual proof that $e < A \Rightarrow e^A > A^e$. Mathematical Intelligencer, 2020. Vol. 42. Pp. 74. DOI: 10.1007/s00283-019-09964-x.
5. Vallejo A., Bove I. Which is greater: e^π or π^e ? An unorthodox physical solution to a classic puzzle. American Journal of Physics, 2024. Vol. 92. Pp. 397–398. DOI: 10.1119/5.0188912.
6. Rosendahl J., Gilmore J. Comparing B^A and A^B for $A > B$. College Mathematics Journal, 1987. Vol. 18. Pp. 50. DOI: 10.1080/07468342.1987.11973008.
7. Chakraborty B. A visual proof that $b^a < a^b$ when $e \leq a < b$. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 2024. Vol. 55. Pp. 1291–1292. DOI: 10.1080/0020739X.2022.2102547.
8. Haque N., Chakraborty B. Comparing a^b and b^a via location of zeros. Mathematical Intelligencer, 2025. Vol. 47. Pp. 40–43. DOI: 10.1007/s00283-024-10342-5.
9. Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E. G., Jeffrey D.J., Knuth D.E. On the Lambert W function. Advances in Computational Mathematics, 1996. Vol. 5. Pp. 329–359. DOI: 10.1007/BF02124750.
10. Valluri S.R., Jeffrey D.J., Corless R.M. Some applications of the Lambert W function to physics. Canadian Journal of Physics, 2000. Vol. 78. Pp. 823–831. DOI: 10.1139/p00-065.
11. Dubinova I. D. Primenenie W-funkcii Lamberta v matematicheskikh zadachah fiziki plazmy [Application of Lambert W-function in mathematical problems of plasma physics]. Fizika plazmy, 2004. Vol. 30. Pp. 937–943 (in Russian). DOI: 10.1134/1.1809403.
12. Dubinova I.D. Tochnye yavnye resheniya nekotorykh nelinejnykh differencial'nykh uravnenij [Exact explicit solutions of some nonlinear differential equations]. Differenciial'nye uravneniya, 2004. Vol. 40. Pp. 1129–1130 (in Russian). DOI: 10.1023/B:DIEQ.0000049837.34049.2d.
13. Dubinov A.E., Dubinova I.D. How can one solve exactly some problems in plasma theory. Journal of Plasma Physics, 2005. Vol. 71. Pp. 715–728. DOI: 10.1017/S0022377805003788.
14. Valluri S.R., Gil M., Jeffrey D.J., Basu S. The Lambert W function and quantum statistics. Journal of Mathematical Physics, 2009. Vol. 50. Article ID: 102103. DOI: 10.1063/1.3230482.
15. Veberič D. Lambert W function for applications in physics. Computer Physics Communications, 2012. Vol. 183. Pp. 2622–2628. DOI: 10.1016/j.cpc.2012.07.008.0
16. Dence T.P. A brief look into the Lambert W function. Applied Mathematics, 2013. Vol. 4. Pp. 887–892. DOI: 10.4236/am.2013.46122.
17. Houari A. Additional applications of the Lambert W function in physics. European Journal of Physics, 2013. Vol. 34. Pp. 695–702. DOI: 10.1088/0143-0807/34/3/695.
18. Dubinov A.E. Mathematical tricks for pseudopotentials in the theories of nonlinear waves in plasmas. Physics of Plasmas, 2022. Vol. 29. Article ID: 020901-1–19. DOI: 10.1063/5.0078573.
19. Dubinov A.E., Dubinova I.D., Sajkov S.K. W funkciya Lamberta i ee primeneniye v matematicheskikh zadachah fiziki [Lambert's W function and its application in mathematical problems of physics]. Sarov, RFYAC-VNIIEF Publ., 2006. 159 p.
20. Mező I. The Lambert W function and its generalizations and applications. Boca Raton, FL, CRC Press, Taylor & Francis Group, LLC, 2022. 274 p.
21. Dubinov A.E., Dubinova I.D. Tochnoe znachenie sopryazhennogo toka v elektrolite v diffuzionno-migracionnoj modeli Gurevicha – Harkaca [The exact value of the conjugate current in the electrolyte in the Gurevich – Kharkats diffusion-migration model]. ZHTF, 2004. Vol. 74. Pp. 118–119 (in Russian). DOI: 10.1134/1.1826201.
22. Dubinov A.E., Kitaev I.N. Obobshchennyye zakon smeshcheniya Vina i zakon Stefana – Bol'cmana dlya teplovogo izlucheniya, imeyushchego nenulevoj himicheskij potencial [Generalized Wien displacement law and Stefan – Boltzmann law for thermal radiation having non-zero chemical potential]. Opticheskij zhurnal, 2018. Vol. 85. Pp. 3–5 (in Russian). DOI: 10.1364/JOT.85.000314.
23. Kitis G., Pagonis V. New expressions for half life, peak maximum temperature activation energy and kinetic order of a thermoluminescence glow peak based on the Lambert W function. Radiation Measure, 2017. Vol. 97. Pp. 28–34. DOI: 10.1016/j.radmeas.2016.12.013.
24. Pagonis V., Kitis G., Chen R. A new analytical equation for the dose response of dosimetric materials, based on the Lambert W function. Journal of Luminescence, 2020. Vol. 225. Article ID: 117333-1–7. DOI: 10.1016/j.jlumin.2020.117333.
25. Fries N., Dreyer M. An analytic solution of capillary rise restrained by gravity. Journal of Colloid and Interface Science, 2008. Vol. 320. Pp. 259–263. DOI: 10.1016/j.jcis.2008.01.009.

26. Dubinov A.E., Dubinova I.D., Sajkov S.K. Tochnoe reshenie zadachi o rasprostranenii volny goreniya [Exact solution of the problem of combustion wave propagation]. Doklady Akademii nauk, 2004. Vol. 394. Pp. 767–768 (in Russian). DOI: 10.1134/1.1686887.
27. Dubinov A.E. Einstein-Smoluchowski-type relations for real gases. Journal of Mathematical Chemistry, 2025. Vol. 63. Pp. 1116–1125. DOI: 10.1007/s10910-025-01711-2.
28. Dubinov A.E., Dubinova I.D. Tochnoe reshenie dispersionnogo uravneniya Landau dlya kolebanij elektronnoj plazmy [Exact solution of the Landau dispersion equation for electron plasma oscillations]. Pis'ma v ZHETF, 2006. Vol. 32. Pp. 71–74 (in Russian). DOI: 10.1134/S1063785006010123.
29. Alekseev B.V., Dubinov A.E., Dubinova I.D. Analiticheskie i chislennye resheniya obobshchennykh dispersionnykh uravnenij dlya odnomernykh zatuhayushchih kolebanij plazmy [Analytical and Numerical Solutions of Generalized Dispersion Equations for One-Dimensional Damped Plasma Oscillations]. Teplofizika vysokih temperatur, 2005. Vol. 43. Pp. 485–491 (in Russian). DOI: 10.1007/s10740-005-0088-2.
30. Kudryashov N.A., Chmykhov M.A., Vigdorowitsch M.V. An estimative (warning) model for recognition of pandemic nature of virus infection. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 2023. Vol. 24. Pp. 213–226. DOI: 10.1515/ijnsns-2020-0154.
31. Siewert C.E. An exact analytical solutions of an elementary critical condition. Nuclear Science and Engineering, 1973. Vol. 51. P. 78. DOI: 10.13182/NSE73-A23260.
32. Barkan A., D'Angelo N., Merlino L.R. Charging of dust grains in a plasma. Physical Review Letters, 1994. Vol. 73. Pp. 3093–3096. DOI: 10.1103/PhysRevLett.73.3093.
33. Al'terkop B.A., Dubinova I.D., Dubinov A.E. O strukture zaryazhennogo sloya na granice plazmy s zaryazhennym telom [On the structure of a charged layer at the boundary of a plasma with a charged body]. ZHETF, 2006. Vol. 129. Pp. 197–206 (in Russian). DOI: 10.1134/S1063776106010201.
34. Gordienko V.A., Dubinova I.D., Dubinov A.E. Nelinejnaya teoriya stacionarnykh uedinennykh voln bol'shoj amplitudy v simmetrichnykh nezamagnichennykh e^-e^+ -plazme i $C_{60}^-C_{60}^+$ -plazme [Nonlinear Theory of Large-Amplitude Stationary Solitary Waves in Symmetric Unmagnetized e^-e^+ -Plasma and $C_{60}^-C_{60}^+$ -Plasma]. Fizika plazmy, 2006. Vol. 32. Pp. 987–993 (in Russian). DOI: 10.1134/S1063780X06110043.
35. Sastry G.M., Agmon N. The span of one-dimensional multiparticle Brownian motion. Journal of Chemical Physics, 1996. Vol. 104. Pp. 3022–3025. DOI: 10.1063/1.471069.
36. Vedenov A.A., Velikhov E.P., Sagdeev R.Z. Nonlinear oscillations of rarified plasma. Nuclear Fusion, 1961. Vol. 1. Pp. 82–100. DOI: 10.1117/12.965080.