

УДК 539.3

## Сдвиговые волны в нелинейно-вязко упругой цилиндрической оболочке

© 2025 г. А. И. Землянухин, А. В. Бочкарев, Н. А. Артамонов

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Саратов, 410054, Россия

Методами асимптотического интегрирования проведено моделирование распространения пучка сдвиговых волн вдоль образующей нелинейно-вязко упругой цилиндрической оболочки модели Сандерса – Койтера. Считается, что оболочка изготовлена из материала, характеризующегося кубической зависимостью между интенсивностями напряжений и деформаций, безразмерные параметры тонкостенности и физической нелинейности являются величинами одного порядка малости, а отношение вязкоупругих постоянных есть безразмерный параметр более высокого порядка малости. Используется разновидность метода многомасштабных разложений, позволяющая из уравнений линейного приближения определить скорость распространения волны, а в первом существенно нелинейном приближении получить разрешающее нелинейное квазигиперболическое уравнение для главного члена разложения сдвиговой компоненты смещения. Выведенное уравнение представляет собой кубическую нелинейную модификацию бездисперсионного уравнения Кадомцева – Петвиашвили – Бюргерса, являясь частным случаем модифицированного уравнения Хохлова – Заболотской – Кузнецова. Решение выведенного уравнения отыскивается в виде одной гармоники с медленно меняющейся комплексной амплитудой, поскольку в деформируемых средах с кубической нелинейностью эффект самовоздействия волны существенно преобладает над эффектом генерации высших гармоник. В результате для комплексной амплитуды получено уравнение Гинзбурга – Ландау, для которого построено точное физически состоятельное решение.

**Ключевые слова:** нелинейно-вязкоупругая цилиндрическая оболочка, сдвиговые волны, асимптотическое интегрирование, уравнение Гинзбурга – Ландау.

### Введение

В настоящее время отмечается возрастание интереса к изучению нелинейных сдвиговых волн в системах различной физической природы применительно к задачам акустической диагностики и неразрушающего контроля. Биомедицинские приложения сдвиговых волн обсуждаются в [1–2]. Показана возможность диагностики патологий и функционального состояния мышечной системы, связанной с тем, что скорость этих волн в мышцах много меньше скорости продольных волн, и формированием более высокой симметрии. Соответствующие акустические методы имеют большие перспективы в диагностике невралгических патологий, а также в геронтологии, спортивной и космической медицине. В [3] предложен способ измерения сдвиговой упругости радиационным давлением фокусированного ультразвука, известный как SWEI (Shear Wave Elasticity Imaging). Развитие этой методики, называемое сверхзвуковой сдвиговой визуализацией (SSI), обсуждается в [4–5]. Результаты наблюдения сдвиговой волны, возбужденной с помощью фокусированного ультразвука в резиноподобной среде, приведены в [6]. Построена теоретическая модель, позволяющая вычислять характеристики генерируемой сдвиговой волны в зависимости от параметров среды и исходной продольной волны.

✉ А.И. Землянухин: [azemlyanukhin@mail.ru](mailto:azemlyanukhin@mail.ru)  
А.В. Бочкарев: [ab2009sar@list.ru](mailto:ab2009sar@list.ru)  
Н.А. Артамонов: [twostvoll@gmail.com](mailto:twostvoll@gmail.com)

Поступила в редакцию: 28.07.2025  
После доработки: 23.08.2025  
Принята к публикации: 28.08.2025

В [7] рассматриваются плоские нелинейные сдвиговые волны в среде с памятью. Выведены модельные уравнения с кубической нелинейностью, анализ которых проводится на основе уравнения Дуффинга. Исследованию распространения линейных и нелинейных сдвиговых волн в вязкоупругих средах посвящена диссертация [8]. Классы точных волновых решений для сдвиговых волн в специальных вязких средах построены в [9]. В [10] аналитически и численно анализируются эффекты кубической нелинейности в пучках сдвиговых волн различной поляризации. Уединенные и компактные сдвиговые волны изучаются в [11]. В [12] нелинейные волны сдвига анализируются на основе неньютоновской вязкоупругой жидкости с использованием обобщенной гидродинамической модели. Получено численное решение, которое показывает, что начальные периодические решения повторяются после прохождения нескольких паттернов периодических волн. Таким образом, выявлен аналог возврата Ферми – Паста – Улама. В [13] рассмотрено распространение двумерных волн сдвига конечной амплитуды в нелинейном предварительно напряженном несжимаемом твердом теле. Показано, что скалярное уравнение Заболоцкой является асимптотическим пределом уравнений движения для всех упругих обобщенных неогуковских тел (с энергией деформации, зависящей только от первого главного инварианта деформации Коши – Грина). Учет дисперсии и диссипации позволяет получить известные уравнения Кадомцева – Петвиашвили, Заболоцкой – Хохлова и Хохлова – Заболоцкой – Кузнецова. Возможность генерации второй гармоники для сдвиговых волн в упруго-пластической среде продемонстрирована в [14]. В [15] рассмотрены сдвиговые горизонтальные (SH) волны в свободных и зажатых моноклинных пластинах с произвольной неоднородностью на пластине. Представлено аналитическое и численное моделирование дисперсионных ветвей SH. Оценки в замкнутой форме сравниваются с точными кривыми, рассчитанными для свободной пластины с непрерывно меняющимися свойствами. Нелинейные сдвиговые волны в твердом теле с микроструктурой изучаются в [16]. В [17] аналитически моделируются сдвиговые волны в нелинейно-упругом теле. Распространение пучка сдвиговых волн в наследственной среде в квазиоптическом приближении рассмотрено в [18]. В [19] моделируется распространение сдвиговых солитонов в упругой пластине. В работах [20–23] выводятся квазигиперболические и эволюционные уравнения, редуцируемые к интегрируемым. Тем самым показываются возможность генерации и условия существования сдвиговых солитонов. Нелинейные продольные и сдвиговые стационарные волны деформации в градиентно-упругой среде рассмотрены в [20]. Показано, что сдвиговые стационарные волны описываются уравнением Дуффинга. В [21] установлено, что сдвиговые волны, распространяющиеся в нелинейной пластине, лежащей на упругом основании, параметры которого изменяются по закону бегущей волны, являются модуляционно неустойчивыми. Изучен вопрос о стабилизации этой неустойчивости с помощью изменения параметров упругого основания. Распространение нелинейных сдвиговых волн в зернистой среде рассмотрено в [22]. Показано, что низкочастотные солитоноподобные возмущения описываются уравнением Буссинеска. В [23] моделирование уединенных сдвиговых волн в зернистой среде впервые привело к возмущенному уравнению синус – Гордона. Показано, что скорость уединенной волны всегда меньше скорости поперечной сейсмической волны. В [24] исследуется влияние разномодульности материала на эволюцию сдвиговой волны Римана. Выявлена зависимость характерного расстояния опрокидывания волны Римана от значений соответствующих модулей упругости.

Задачи нелинейной волновой динамики цилиндрических оболочек, в отличие от аналогичных задач для стержней и пластин [25], до настоящего времени исследованы в меньшей степени. Причина состоит в том, что в стержнях и пластинах тангенциальные и нормальные перемещения разделены в линейном приближении и связываются только за счет нелинейности, что упрощает использование процедур асимптотического интегрирования [26] систем исходных уравнений. В оболочках (за счет кривизны), продольные, окружные и нормальные смещения связаны уже в линейном приближении, и разделение волновых движений на продольные, сдвиговые (крутильные) и изгибные становится, до известной степени, условным. В зависимости от того, какая из компонент перемещений преобладает, здесь приходится говорить о продольно-изгибных, изгибно-продольных, изгибно-сдвиговых и т.д. волнах. Нелинейные осесимметричные вол-

ны продольно-изгибного типа рассмотрены в [27–29]. Изгибно-продольные волны изучаются в [30]. В [27–30] построены классы точных солитоноподобных и периодических решений и обсуждены вопросы их физической реализуемости.

Данная статья, посвященная моделированию распространения преимущественно сдвиговой волны вдоль образующей нелинейно-вязкоупругой цилиндрической оболочки, организована следующим образом. В первом разделе получена система уравнений движения в перемещениях для нелинейно-упругой оболочки. Во втором разделе полученная система преобразуется с учетом вязкоупругих свойств материала оболочки. Здесь же выводится разрешающее уравнение. В разделе параграфе строится точное решение одной из физически содержательных редукций выведенного уравнения. В заключении перечислены полученные результаты.

## 1. Уравнения движения в перемещениях для нелинейно-упругой оболочки

Дальнейший анализ проведем на основе модели цилиндрической оболочки Сандерса – Койтера [31–32]. Геометрически линейные уравнения движения элемента оболочки имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{2R} \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} - \frac{3}{2R} \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{1}{R} N_y - \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x, y$  – продольная и окружная координаты;  $u, v, w$  – перемещения срединной поверхности элемента оболочки в продольном, окружном и радиальном направлениях, соответственно;  $N_x, M_x$  – нормальное усилие и изгибающий момент в сечении, перпендикулярном оси  $Ox$ ;  $N_y, M_y$  – нормальное усилие и изгибающий момент в сечении, перпендикулярном оси  $Oy$ ;  $N_{xy}, M_{xy}$  – сдвиговое усилие и крутящий момент в сечении плоскостью  $Oxy$ ;  $R, \gamma$  – радиус кривизны и поверхностная плотность оболочки;  $g$  – ускорение свободного падения,  $t$  – время.

Будем считать, что оболочка изготовлена из нелинейно-упругого материала, характеризующегося кубической зависимостью между интенсивностями напряжений и деформаций [33]

$$\sigma_i = E_0 \varepsilon_i - m \varepsilon_i^3, \quad (2)$$

где  $E_0$  – начальный модуль упругости и  $m$  – константа материала, определяемая экспериментально [34].

Используем физические соотношения [34]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G \varepsilon_x, \\ \sigma_y &= \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G \varepsilon_y, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G \varepsilon_z, \\ \tau_{xy} &= G \varepsilon_{xy}, \end{aligned} \quad (4)$$

в коэффициентах Ламе которых

$$\lambda = \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}, \quad G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (5)$$

символ  $E = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}$  обозначает секущий модуль нелинейно-упругого материала, вычисляемый согласно (2),  $\mu$  – коэффициент Пуассона. Пренебрегая компонентой напряжения  $\sigma_z$  в сравнении с  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ , из получаем

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x).\end{aligned}\quad (6)$$

Примем стандартные для теории тонких оболочек связи деформаций  $\varepsilon$  произвольной точки материала с деформациями  $e$  и изменениями кривизн  $\kappa$  срединной поверхности

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= e_x + \kappa_x z, \\ \varepsilon_y &= e_y + \kappa_y z, \\ \varepsilon_{xy} &= e_{xy} + \kappa_{xy} z.\end{aligned}\quad (7)$$

Подставляя (7) в (4), (6) и интегрируя по толщине элемента оболочки в пределах от  $-\frac{h}{2}$  до  $\frac{h}{2}$ , получаем следующие выражения для погонных усилий:

$$\begin{aligned}N_x &= \frac{(E_0 - me_i^2)h}{1-\mu^2}(e_x + \mu e_y), \\ N_y &= \frac{(E_0 - me_i^2)h}{1-\mu^2}(e_y + \mu e_x), \\ N_{xy} &= \frac{(E_0 - me_i^2)h}{2(1+\mu)}e_{xy},\end{aligned}\quad (8)$$

и моментов

$$\begin{aligned}M_x &= \frac{(E_0 - me_i^2)h^3}{12(1-\mu^2)}(\kappa_x + \mu\kappa_y) - \frac{2mFh^3}{27(1-\mu^2)(1-\mu)^2}(e_x + \mu e_y), \\ M_y &= \frac{(E_0 - me_i^2)h^3}{12(1-\mu^2)}(\kappa_y + \mu\kappa_x) - \frac{2mFh^3}{27(1-\mu^2)(1-\mu)^2}(e_y + \mu e_x), \\ M_{xy} &= \frac{(E_0 - me_i^2)h^3}{12(1-\mu^2)} \cdot \frac{1-\mu}{2} \cdot \kappa_{xy} - \frac{2mFh^3}{27(1-\mu^2)(1-\mu)^2} \cdot \frac{1-\mu}{2} \cdot e_{xy},\end{aligned}\quad (9)$$

где

$$e_i^2 = \frac{4}{9} \left( e_x^2 - e_x e_y + e_y^2 + \frac{\mu}{(1-\mu)^2} (e_x + e_y)^2 + \frac{1}{3} e_{xy}^2 \right) \quad (10)$$

есть квадрат интенсивности деформаций срединной поверхности и введено обозначение

$$F = (1-\mu+\mu^2)(\kappa_x e_x + \kappa_y e_y) - \frac{1}{2}(1-4\mu+\mu^2)(\kappa_y e_x + \kappa_x e_y) + \frac{3}{4}\kappa_{xy} e_{xy} (1-\mu)^2. \quad (11)$$

Компоненты изменений кривизн и деформаций в линеаризованной модели Сандерса – Койтера связаны с компонентами перемещений следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ e_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{R}w, \quad \kappa_y = -\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial y}\right], \\ e_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \kappa_{xy} = -2\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{4R}\left(3\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя (12) в (8) и (9), а затем полученные соотношения – в (1), и пренебрегая безразмерными слагаемыми, содержащими  $h^2/R^2$ , получаем систему уравнений движения элемента оболочки в перемещениях

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\mu}{R}\frac{\partial w}{\partial x} - \\ &\frac{(1-\mu)h^2}{24R}\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{\gamma(1-\mu^2)}{gE_0}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f_1 = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial y} + \\ &+ \frac{h^2}{12R}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{3-\mu}{2}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right) - \frac{\gamma(1-\mu^2)}{gE_0}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + f_2 = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} &-\frac{h^2}{12}\nabla^4 w + \frac{\mu}{R}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{R^2}w - \\ &-\frac{h^2}{12R}\left(\frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{3-\mu}{2}\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} - \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}\right) - \frac{\gamma(1-\mu^2)}{gE_0}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + f_3 = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

в которых все нелинейные слагаемые сведены в  $f_1, f_2$ , и  $f_3$ . Полученная система отличается от аналогичной системы уравнений движения в классической теории оболочек Кирхгофа – Лява [34] наличием подчеркнутых членов более высоких порядков малости. Их учет при дальнейшем асимптотическом интегрировании, как будет показано ниже, приводит к новому виду разрешающего уравнения.

## 2. Вывод разрешающего уравнения для нелинейно-вязкоупругой оболочки

Диссипативные эффекты, сопровождающие волновые процессы в оболочках чаще всего учитываются путем введения в уравнения движения дополнительного демпфирующего слагаемого (так называемое «конструкционное демпфирование») [34]. Более строгий учет потерь энергии может быть проведен с использованием различных моделей вязкоупругости [35]. В данной работе используется именно такой подход.

Уравнения движения вязкоупругой оболочки с независимым от времени коэффициентом Пуассона, вязкоупругие свойства которой определяются интегральным оператором  $\tilde{E}$ , действующим на функцию  $f(t)$  по закону

$$\tilde{E}f = Ef - \alpha E \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-\tau)} f(\tau) d\tau, \quad (16)$$

получаются из уравнений движения – элемента нелинейно-упругой оболочки заменой  $E$  на  $\tilde{E}$ . Постоянные  $\alpha$  и  $\beta$  в (16), имеющие размерность [время]<sup>-1</sup>, характеризуют вязкоупругие свойства материала оболочки.

Считая время релаксации  $\beta^{-1}$  много большим в сравнении с периодом сдвиговой волны, разложим  $f(t)$  в ряд Маклорена, удерживая два первых члена разложения. Тогда после интегрирования от интегрального оператора можно перейти к приближенному дифференциальному оператору [36]

$$\tilde{E}f \approx \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) Ef - \frac{\alpha}{\beta^2} E \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (17)$$

Используя (17), получим из (13)–(15) уравнения движения элемента нелинейно-вязкоупругой оболочки:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\mu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{(1-\mu)h^2}{24R} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + f_1 \right) - \\ & - \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\mu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{(1-\mu)h^2}{24R} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + f_1 \right) - \\ & - \frac{\gamma(1-\mu^2)}{gE_0} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{h^2}{12R} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{3-\mu}{2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) + f_2 \right) - \\ & - \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{h^2}{12R} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{3-\mu}{2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) + f_2 \right) - \\ & - \frac{\gamma(1-\mu^2)}{gE_0} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) \left( -\frac{h^2}{12} \nabla^4 w + \frac{\mu}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{R^2} w - \frac{h^2}{12R} \left( \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{3-\mu}{2} \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} - \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + f_3 \right) - \\ & - \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{h^2}{12} \nabla^4 w + \frac{\mu}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{R^2} w - \frac{h^2}{12R} \left( \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{3-\mu}{2} \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} - \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + f_3 \right) - \\ & - \frac{\gamma(1-\mu^2)}{gE_0} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + f_3 = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

Введем в рассмотрение безразмерные независимые и зависимые переменные по формулам:

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{l}, \quad Y = \frac{y}{R}, \quad T = \sqrt{\frac{E_0 g}{\gamma(1-\mu^2)}} \cdot \frac{t}{l}, \\ U &= \frac{u}{R}, \quad V = \frac{v}{R}, \quad W = \frac{w}{h}. \end{aligned} \quad (21)$$

Подстановка (21) в уравнения движения (18)–(20) выявляет в последних малые параметры нелинейности и тонкостенности  $\frac{R}{l}$  и  $\frac{h}{R}$ , которые будем считать величинами одного порядка малости с отношением параметров физической нелинейности:

$$\frac{R}{l} = \frac{h}{R} = \frac{E_0}{m} = \varepsilon. \quad (22)$$

Кроме того, в предположении о большой величине времени релаксации, будем считать

$$\frac{\alpha}{\beta} = \varepsilon^2. \quad (23)$$

Предположение (22) характерно для задач асимптотического анализа длинноволновых возмущений [27–29]. Согласно (22), параметр дисперсии  $\frac{h}{l}$  есть величина порядка  $\varepsilon^2$ .

Считая, что пучок сдвиговых волн распространяется вдоль образующей оболочки, вводим в рассмотрение новые независимые переменные и разложения зависимых переменных по степеням малого параметра  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \chi &= \varepsilon^2 X, \quad \eta = \varepsilon^2 Y, \quad \tau = T - \frac{X}{C}, \\ U &= \varepsilon^{3/2} U_0 + \varepsilon^{5/2} U_1, \quad V = \varepsilon^{1/2} V_0 + \varepsilon^{5/2} V_1, \quad W = \varepsilon^{3/2} W_0 + \varepsilon^{5/2} W_1. \end{aligned} \quad (24)$$

где  $C$  – пока неизвестная скорость распространения возмущения. С учетом (21)–(24), в главном порядке по степеням малого параметра система уравнений (18)–(20) принимает вид

$$\frac{\mu}{C} \frac{\partial W_0}{\partial \tau} + \left( \frac{1}{C^2} - 1 \right) \frac{\partial^2 U_0}{\partial \tau^2} - \frac{(1+\mu)}{2C} \frac{\partial^2 V_0}{\partial \tau \partial \eta} = 0, \quad (25)$$

$$(2C^2 + \mu - 1) \frac{\partial^2 V_0}{\partial \tau^2} = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\mu}{C} \frac{\partial U_0}{\partial \tau} + W_0 - \frac{\partial V_0}{\partial \eta} = 0. \quad (27)$$

Из уравнения (26) определяется безразмерная скорость возмущения

$$C = \pm \sqrt{\frac{1-\mu}{2}}. \quad (28)$$

Отметим, что система (25)–(27) и выражение для скорости (28) совпадают с аналогичными выражениями, полученными в нелинейно-упругом случае [37]. Это означает, что вязкостные эффекты проявляются на нелинейной стадии волнового процесса.



Уравнение (19) в первом существенно нелинейном приближении имеет вид

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 V_0}{\partial \eta^2} + \sqrt{2-2\mu} \frac{\partial^2 V_0}{\partial \tau \partial \chi} + \frac{1+\mu}{\sqrt{2-2\mu}} \frac{\partial^2 U_0}{\partial \tau \partial \eta} + \frac{\partial W_0}{\partial \eta} + \frac{2}{1-\mu} \left( \frac{\partial V_0}{\partial \tau} \right)^2 \frac{\partial^2 V_0}{\partial \tau^2} + \frac{1}{l\beta} \sqrt{\frac{\varepsilon mg}{\gamma(1-\mu^2)}} \frac{\partial^3 V_0}{\partial \tau^3} = 0. \quad (29)$$

Выражая при помощи (25), (27) слагаемые с функциями  $U_0$  и  $W_0$  через  $V_0$ , придаем уравнению окончательную форму

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial \tau^2} + c_1 \frac{\partial^3 V_0}{\partial \tau^3} + c_2 \frac{\partial^2 V_0}{\partial \tau \partial \chi} + c_3 \frac{\partial^2 V_0}{\partial \eta^2} + c_4 \left( \frac{\partial V_0}{\partial \tau} \right)^2 \frac{\partial^2 V_0}{\partial \tau^2} = 0, \quad (30)$$

где

$$c_1 = \frac{1}{l\beta} \sqrt{\frac{\varepsilon mg}{\gamma(1-\mu^2)}}, \quad c_2 = \sqrt{2-2\mu}, \quad c_3 = \frac{1-\mu}{2(1+2\mu)}, \quad c_4 = \frac{2}{1-\mu}. \quad (31)$$

### 3. Обсуждение свойств уравнения (30) и построение точных решений

Заменяя переменную  $\tau$  линейной комбинацией  $\tau_1 = \tau - \chi/c_2$ , в (30) можно исключить слагаемое со второй производной по времени:

$$\frac{c_1}{c_2} \frac{\partial^3 V_0}{\partial \tau_1^3} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial \tau_1 \partial \chi} + \frac{c_3}{c_2} \frac{\partial^2 V_0}{\partial \eta^2} + \frac{c_4}{c_2} \left( \frac{\partial V_0}{\partial \tau_1} \right)^2 \frac{\partial^2 V_0}{\partial \tau_1^2} = 0. \quad (32)$$

Для функции  $f = \frac{\partial V_0}{\partial \tau}$ , выражение (32) принимает форму модифицированного диссипативного уравнения Хохлова – Заболотской [38]

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial f}{\partial \tau} + c_1 \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} + c_2 \frac{\partial f}{\partial \chi} + c_4 f^2 \frac{\partial f}{\partial \tau} \right) = -c_3 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}, \quad (33)$$

которое, в свою очередь, является частным случаем модифицированного (кубически нелинейного) уравнения Хохлова – Заболотской – Кузнецова или бездисперсионным модифицированным уравнением Кадомцева – Петвиашвили – Бюргерса. На основе уравнения (33) в [39] обсуждался вопрос о безынерционном самовоздействии дифрагирующих пучков в кубически-нелинейных диссипативных средах без дисперсии.

Представляя функцию  $V_0(\chi, \eta, \tau_1)$  в виде произведения комплексной амплитуды  $B(\chi, \eta)$  на периодическую функцию, зависящую от  $\tau_1$ ,

$$V_0(\chi, \eta, \tau_1) = B(\chi, \eta) e^{-i\omega\tau_1} + \text{к.с.}, \quad (34)$$

в главном порядке по экспоненциальной функции для амплитуды  $B(\chi, \eta)$  получаем комплексное уравнение Гинзбурга – Ландау [40]

$$i \frac{\partial B}{\partial \chi} + p \frac{\partial^2 B}{\partial \eta^2} + q |B|^2 B = i\gamma B, \quad (35)$$



где

$$p = -\frac{c_3}{\omega c_2}, \quad q = \frac{c_4 \omega^3}{c_2}, \quad \gamma = \frac{c_1 \omega^2}{c_2}. \quad (36)$$

Уравнение, аналогичное (35), ранее возникало при моделировании сдвиговых волн в среде Фойгта [36]. Отметим, что представление уравнение (34) традиционно используется в задачах волновой динамики кубически-нелинейных сред, в которых явление самовоздействия волны существенно преобладает над эффектом генерации высших гармоник.

Несмотря на внешнее сходство (35) с возмущенным НУШ, для построения его точного решения приходится использовать специальные подстановки. Будем следовать подходу [40]. После подстановки

$$B(\chi, \eta) = y(\zeta) e^{i\theta}, \quad (37)$$

где  $\zeta = \eta - c\chi$ ,  $\theta = \theta(\zeta, \chi)$ , уравнение (35) сводится к системе уравнений для функций  $\Phi$ ,  $\Psi$ :

$$2\Phi \frac{d^2 \Phi}{d\zeta^2} - \left( \frac{d\Phi}{d\zeta} \right)^2 + a_2 \Phi \Psi - 4\Psi^2 - a_3 \Phi^2 + a_4 \Phi^3 = 0, \quad (38)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} - b_1 \frac{d\Phi}{d\zeta} + b_3 \Phi = 0, \quad (39)$$

где  $\Phi = y^2$ ,  $\Psi = y^2 z$ ,  $z = \frac{\partial \theta}{\partial \zeta}$  и коэффициенты определены следующим образом:

$$a_2 = \frac{4c}{p}, \quad a_3 = \frac{4\beta}{p}, \quad a_4 = \frac{4q}{p}, \quad b_1 = \frac{c}{2p}, \quad b_3 = -\frac{\gamma}{p}.$$

Авторы [40] отмечают, что несмотря на то, что уравнение является алгебраическим по  $\Psi$ , непосредственное его решение относительно  $\Psi$  с последующей подстановкой в (39) приводит к чрезвычайно громоздкому и трудно решаемому уравнению. Поэтому они, после проведения пенлеве-анализа, дополняют систему (38), (39) линейным уравнением связи между функциями  $\Phi$  и  $\Psi$ :

$$\Psi = A \frac{d\Phi}{d\zeta} + B\Phi + S, \quad (40)$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $S$  – параметры, подлежащие определению. Подстановка (40) в систему (38), (39) позволяет свести последнюю к нелинейному уравнению

$$f_1 \left( \frac{d\Phi}{d\zeta} \right)^2 + f_2 \Phi \frac{d\Phi}{d\zeta} + f_3 \Phi^3 + f_4 \Phi^2 = 0, \quad (41)$$

где

$$f_1 = -A(4A^2 + 1), \quad f_2 = (a_2 - 8B)A^2 - 2B + 2b_1, \\ f_3 = Aa_4, \quad f_4 = -(4B^2 - Ba_2 + a_3)A - 2b_3.$$

и считается, что  $S = 0$ . Решение уравнения (41) имеет полюс 2-го порядка и может быть найдено, в частности, методом гиперболического тангенса. Подстановка анзаца

$$\Phi = d_0 + d_1 \tanh(k\zeta) + d_2 \tanh^2(k\zeta) \quad (42)$$

дает нетривиальные решения при следующих сочетаниях коэффициентов:

$$d_0 = d_2, \quad d_1 = \mp 2d_2, \quad f_3 = -\frac{f_2^2}{16f_1d_2}, \quad f_4 = \frac{f_2^2}{4f_1}, \quad k = \pm \frac{f_2}{8f_1}. \quad (43)$$

## Заключение

Установлено, что при моделировании распространения пучка сдвиговых волн вдоль образующей нелинейно-вязкоупругой цилиндрической оболочки возникает квазигиперболическое уравнение с кубической нелинейностью, представляющее собой модификацию диссипативного уравнения Хохлова – Заболотской. Полученное уравнение приводится к бездисперсионному модифицированному уравнению Кадомцева – Петвиашвили – Бюргерса, являющемуся частным случаем модифицированного уравнения Хохлова – Заболотской – Кузнецова. Показано, что вязкостные свойства материала оболочки начинают оказывать влияние на волновой процесс на нелинейной стадии распространения сдвиговой волны. Кубическая нелинейность позволяет преобразовать выведенное уравнение в нелинейное комплексное уравнение Гинзбурга – Ландау, для которого построено точное локализованное решение.

## Финансирование

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-29-00071, <https://rscf.ru/project/24-29-00071/>.

## Конфликт интересов

Конфликт интересов отсутствует.

## Вклад авторов

*А.И. Землянухин* – формулировка идеи и целей исследования, постановка задачи, участие в обсуждении результатов.

*А.В. Бочкарев* – выбор методов исследования, разработка математической модели.

*Н.А. Артамонов* – разработка математической модели, вывод разрешающего уравнения и построение его точного решения, подготовка текста статьи и участие в обсуждении результатов.

## Список литературы

1. Руденко О.В., Сарвазян А.П. Волновая биомеханика скелетной мышцы // Акустический журнал, 2006. Т. 52. № 6. С. 833–846.
2. Руденко О.В. Нелинейные волны: некоторые биомедицинские приложения // Успехи физических наук, 2007. Т. 177. № 4. С. 374–383.
3. Sarvazyan A.P., Rudenko O.V., Swanson S.D., Fowlkes J.B., Emelianov S.Y. Shearwave elasticity imaging: a new ultrasonic technology of medical diagnostics // Ultrasound in medicine & biology, 1998. V. 24(9). P. 1419–1435.
4. R'énier M., Gennisson J.-L., Tanter M., Catheline S., Barrière C., Royer D., Fink M. Nonlinear shear elastic moduli in quasi-incompressible soft solids // Proceedings of the IEEE Ultrasonics Symposium, 2007. P. 554–557.
5. Gennisson J.-L. New parameters in shear wave elastography in vivo // Mécanique pour le vivant. Identification et modélisation du comportement des tissus biologiques humains et animaux. Avancées et perspectives. Colloque National, du 18 au 22 janvier 2016. URL: <https://mecamat.ensma.fr/Aussois/2016/DOCUMENT/TexteGennisson.pdf> [дата обращения 22.05.2025].

6. Андреев В.Г., Дмитриев В.Н., Пищальников Ю.А., Руденко О.В., Сапожников О.А., Сарвазян О.П. Наблюдение сдвиговой волны, возбужденной помощью фокусированного ультразвука в резиноподобной среде // Акустический журнал, 1997. Т. 43(2). С. 149–155.
7. Cormack J.M., Hamilton M.F. Plane nonlinear shear waves in relaxing media // The Journal of the Acoustical Society of America, 2018. V. 143(2). P. 1035–1048.
8. Lindley B.S. Linear and nonlinear shear wave propagation in viscoelastic media. University of North Carolina: Chapel Hill, 2008. 78 p. <https://cdr.lib.unc.edu/downloads/z029p543p>.
9. Rajagopal K.R., Saccomandi G. Shear waves in a class of nonlinear viscoelastic solids // The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 2003. V. 56. Iss. 2. P. 311–326. DOI: 10.1093/QJMAM/56.2.311
10. Wochner M.S., Hamilton M.F., Ilinskii Y.A., Zabolotskaya E.A. Cubic nonlinearity in shear wave beams with different polarizations // Journal of the Acoustical Society of America, 2008. V. 123. Iss. 5. P. 2488–2495. DOI: 10.1121/1.2890739.
11. Destrade M., Saccomandi G. Solitary and compact-like shear waves in the bulk of solids // Physical Review E., 2006. V. 73. 065604. Iss. 6. Art. 065604. DOI: 10.1103/PHYSREVE.73.065604
12. Banerjee D., Janaki M. S., Chakrabarti N., Chaudhuri M. Nonlinear shear wave in a non Newtonian visco-elastic medium // Physics of Plasma, 2012. V. 19. Iss. 6. Art. 062301.
13. Destrade M., Goriely A., Saccomandi G. Scalar evolution equations for shear waves in incompressible solids: A simple derivation of the Z, ZK, KZK, and KP equations // Proceedings of the Royal Society A, 2011. V. 467. P. 1823–1834.
14. Доронин А.М., Ерофеев В.И. Генерация второй гармоники сдвиговой волны в упруго-пластической среде. Письма о материалах. 2016. Т. 6. № 2. С. 102–104.
15. Shuvalov A.L., Poncelet O., Kiselev A.P. Shear horizontal waves in transversely inhomogeneous plates // Wave Motion, 2008. V. 45. № 5. P. 605–615.
16. Ерофеев В.И. Распространение нелинейных сдвиговых волн в твердом теле с микроструктурой // Прикладная механика, 1993. Т. 29. № 4. С. 18–22.
17. Ерофеев В.И., Раскин И.Г. О распространении сдвиговых волн в нелинейно-упругом теле // Прикладная механика, 1991. Т. 27. № 1. С. 127–129.
18. Потапов А.И., Солдатов И.Н. Квазиоптическое приближение для пучка сдвиговых волн в наследственной среде // Прикладная механика и техническая физика, 1986. № 1. С. 144–147.
19. Кившарь Ю.С., Сыркин Е.С. Сдвиговые солитоны в упругой пластине // Акустический журнал, 1991. Т. 37(1). С. 104–109.
20. Ерофеев В.И., Шешенина О.А. Нелинейные продольные и сдвиговые стационарные волны деформации в градиентно-упругой среде // Математическое моделирование систем и процессов, 2007. № 15. С. 15–27.
21. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Сандалов В.М. Демодуляция сдвиговой волны в нелинейной пластине, лежащей на упругом основании, параметры которого изменяются по закону бегущей волны // Проблемы прочности и пластичности, 2013. Т. 75(4). С. 268–272.
22. Богданов А.Н., Скворцов А.Т. Нелинейные сдвиговые волны в зернистой среде // Акустический журнал, 1992. Т. 38(3). С. 408–412.
23. Быков В.Г. Уединенные сдвиговые волны в зернистой среде // Акустический журнал, 1999. Т. 45(2). С. 169–173.
24. Ерофеев В.И., Шарабанова А.В. Сдвиговые волны Римана в материале, свойства которого зависят от вида напряженного состояния // Проблемы машиностроения и надежности машин, 2004. № 1. С. 20–23.
25. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. Москва: Физматлит, 2002. 208 с.
26. Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V. Dynamics of thin walled elastic bodies. San Diego: Academic Press, 1998. 226 p.
27. Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V., Mogilevich L.I., Andrianov I.V. The generalized Schamel equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells // Nonlinear Dynamics, 2019. V. 98(1). P. 185–194.
28. Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V., Andrianov I.V., Erofeev V.I. The Schamel-Ostrovsky equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells // Journal of Sound and Vibration, 2021. V. 491. Art. 115752. DOI: 10.1016/J.JSV.2020.115752.
29. Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V., Artamonov N.A. Physically admissible and inadmissible exact localized solutions in problems of nonlinear wave dynamics of cylindrical shells // Russian Journal of Nonlinear Dynamics, 2024. Т. 20. № 2. С. 219–229.
30. Землянухин А.И., Бочкарев А.В. Осесимметричные нелинейные модулированные волны в цилиндрической оболочке // Акустический журнал, 2018. Т. 64(4). С. 417–423.
31. Yamaki N. Elastic stability of circular cylindrical shells // North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, V. 27. Amsterdam: North-Holland, 1984.
32. Amabili M. A comparison of shell theories for large-amplitude vibrations of circular cylindrical shells: Lagrangian approach // Journal of Sound and Vibration, 2003. V. 264(5). P. 1091–1125.
33. Лукаш П.А. Основы нелинейной строительной механики. М.: Стройиздат, 1978. 204 с.
34. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.

35. Москвитин В.В. Сопротивление вязко – упругих материалов. М.: Наука, 1972. 328 с.
36. Потапов А.И. Нелинейные волны деформации в стержнях и пластинах. Горький.: Изд.-во Горьковского университета, 1985. 108 с.
37. Землянухин А.И., Бочкарев А.В., Артамонов Н.А. Сдвиговые волны в нелинейно-упругой цилиндрической оболочке // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика, 2024. Т. 24(4). С. 578–586.
38. Руденко О.В. К 40-летию уравнения Хохлова – Заболотской // Акустический журнал, 2010. Т. 56(4). С. 452–462.
39. Руденко О.В., Сухоруков А.А. Дифрагирующие пучки в кубично – нелинейных средах без дисперсии // Акустический журнал, 1995. Т. 41(5). С. 822–827.
40. Porubov A.V., Velarde M.G. Exact periodic solutions of the complex Ginzburg–Landau equation // J. Math. Phys., 1999. V. 40. P. 884–896.

---

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2025, vol. 14, no. 5, pp. 379–392

---

## Shear waves in a nonlinear viscoelastic cylindrical shell

A. I. Zemlyanukhin , A. V. Bochkarev , N. A. Artamonov 

Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, 410054, Russia

 azemlyanukhin@mail.ru

 ab2009sar@list.ru

 twostvoll@gmail.com

Received July 28, 2025; revised August 23, 2025; accepted August 28, 2025

The propagation of a beam of shear waves along the generatrix of a nonlinear viscoelastic cylindrical shell of the Sanders–Koiter model is simulated by asymptotic integration methods. It is assumed that the shell is made of a material characterized by a cubic dependence between stress and strain intensities, the dimensionless parameters of wall thinness and physical nonlinearity are quantities of the same order of smallness, and the ratio of viscoelastic constants is a dimensionless parameter of a higher order of smallness. A variation of the multiscale expansion method is used, which makes it possible to determine the wave propagation velocity from the linear approximation equations and, in the first essentially nonlinear approximation, to obtain a resolving nonlinear quasi-hyperbolic equation for the leading term of the expansion of the shear component of the displacement. The derived equation is a cubic nonlinear modification of the dispersionless Kadomtsev–Petviashvili–Burgers equation, being a special case of the modified Khokhlov–Zabolotskaya–Kuznetsov equation. The solution of the derived equation is sought in the form of one harmonic with a slowly changing complex amplitude, since in deformable media with cubic nonlinearity the effect of wave self-action significantly prevails over the effect of higher harmonic generation. As a result, the Ginzburg–Landau equation is obtained for the complex amplitude, for which an exact physically consistent solution is constructed.

**Keywords:** nonlinear viscoelastic cylindrical shell, shear waves, asymptotic integration, Ginzburg–Landau equation.

## References

1. Rudenko O., Sarvazyan A. Volnovaya biomekhanika skeletnoj myshcy [Wave biomechanics of skeletal muscle]. Akusticheskij zhurnal. 2006. Vol. 52. № 6. Pp. 833–846 (in Russian).
2. Rudenko O.V. Nelinejnye volny: nekotorye biomedicinskie prilozheniya [Nonlinear waves: some biomedical applications]. Uspekhi fizicheskikh nauk, 2007, Vol. 177. № 4. Pp. 374–383 (in Russian).
3. Sarvazyan A.P., Rudenko O.V., Swanson S.D., Fowlkes J.B., Emelianov S.Y. Shear wave elasticity imaging: a new ultrasonic technology of medical diagnostics. Ultrasound in medicine & biology. 1998. Vol. 24(9). Pp. 1419–1435.

4. *R'enier M., Gennisson J.-L., Tanter M., Catheline S., Barri`ere C., Royer D., Fink M.* Nonlinear shear elastic moduli in quasi-incompressible soft solids. *Proceedings of the IEEE Ultrasonics Symposium*, 2007. Pp. 554–557.
5. *Gennisson J.-L.* New parameters in shear wave elastography in vivo. *M'ecanique pour le vivant. Identification et mod'elisation du comportement des tissus biologiques humains et animaux. Avanc'ees et perspectives. Colloque National*, du 18 au 22 janvier 2016. Available at: <https://mecamat.ensma.fr/Aussois/2016/DOCUMENT/TexteGenisson.pdf> (accessed 22.05.2025).
6. *Andreev V., Dmitriev V., Pishchalnikov Yu., Rudenko O., Sapozhnikov O., Sarvazyan A.* Nablyudenie sdvigovoy volny, vzbuzhdennojs pomoshch'yu fokusirovannogo ul'trazvuka v rezinopodobnoj srede [Observation of shear waves excited by focused ultrasound in a rubber-like medium]. *Akusticheskij zhurnal*, 1997. Vol. 43. Iss. 2. Pp. 149–155 (in Russian).
7. *Cormack J.M., Hamilton M.F.* Plane nonlinear shear waves in relaxing media. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2018. Vol. 143(2). Pp. 1035–1048.
8. *Lindley B.S.* Linear and nonlinear shear wave propagation in viscoelastic media. University of North Carolina: Chapel Hill, 2008. 78 p. <https://cdr.lib.unc.edu/downloads/z029p543p>.
9. *Rajagopal K.R., Saccomandi G.* Shear waves in a class of nonlinear viscoelastic solids. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 2003. Vol. 56. Iss.2. Pp. 311–326. DOI: 10.1093/QJMAM/56.2.311.
10. *Wochner M.S., Hamilton M.F., Ilinskii Y.A., Zabolotskaya E. A.* Cubic nonlinearity in shear wave beams with different polarizations. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2008. Vol. 123. Iss. 5. Pp. 2488–2495. DOI: 10.1121/1.2890739.
11. *Destrade M., Saccomandi G.* Solitary and compact-like shear waves in the bulk of solids // *Physical Review E.*, 2006. Vol. 73. Iss. 6. Art. 065604. DOI: 10.1103/PHYSREVE.73.065604.
12. *Banerjee D., Janaki M. S., Chakrabarti N., Chaudhuri M.* Nonlinear shear wave in a non Newtonian visco-elastic medium. *Physics of Plasma*, 2012. Vol. 19. Iss.6. Art. 062301.
13. *Destrade M., Goriely A., Saccomandi G.* Scalar evolution equations for shear waves in incompressible solids: A simple derivation of the Z, ZK, KZK, and KP equations. *Proceedings of the Royal Society A*, 2011. Vol. 467. Pp. 1823–1834.
14. *Doronin A.M., Erofeev V.I.* Generaciya vtoroj garmoniki sdvigovoy volny v uprugoplasticheskoj srede [A generation of second harmonic of shear wave in elastoplastic media]. *Pis'ma o materialah*, 2016. Vol. 6. Iss. 2. Pp. 102–104. DOI: 10.22226/2410-3535-2016-2-102-104 (in Russian).
15. *Shuvalov A.L., Poncelet O., Kiselev A.P.* Shear horizontal waves in transversely inhomogeneous plates. *Wave Motion*, 2008. Vol. 45. No. 5. Pp. 605–615.
16. *Erofeev V.I.* Rasprostranenie nelinejnyh sdvigovyh voln v tverdom tele s mikrostrukturou [Propagation of nonlinear shear waves in a solid with microstructure]. *Prikladnaya mekhanika*, 1993. Vol. 29. No. 4. Pp. 18–22 (in Russian).
17. *Erofeev V.I., Raskin I.G.* O rasprostranении sdvigovyh voln v nelinejno-uprugom tele [Propagation of sound shear waves in the nonlinear elastic solids]. *Prikladnaya mekhanika*, 1991. Vol. 27. No. 1. Pp. 127–129 (in Russian).
18. *Potapov A.I., Soldatov I.N.* Kvaziopticheskoe priblizhenie dlya puchka sdvigovyh voln v nasledstvennoj srede. [Quasi-optical approximation for a beam of shear waves in a nonlinear medium with memory]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 1986. No. 1. Pp. 144–147 (in Russian).
19. *Kivshar Yu.S., Syrkin E.S.* Sdvigovye solitony v uprugoj plastine [Shear solitons in an elastic plate]. *Akusticheskij zhurnal*, 1991. Vol. 37(1), Pp. 104–109 (in Russian).
20. *Erofeev V.I., Sheshenima O.A.* Nelinejnye prodol'nye i sdvigovye stacionarnye volny deformacii v gradientno-uprugoj srede [Nonlinear longitudinal and shear stationary deformation waves in a gradient-elastic medium]. *Matematicheskoe modelirovanie sistem i protsessov*, 2007. No. 15. Pp. 15–27 (in Russian).
21. *Erofeev V.I., Kolesov D.A., Sandalov V.M.* Demodulyaciya sdvigovoy volny v nelinejnoj plastine, lezhashchej na uprugom osnovanii, parametry kotorogo izmenyayutsya po zakonu begushchej volny [Demodulation of a shear wave in a nonlinear plate lying on an elastic base, the parameters of which vary according to the law of traveling waves]. *Problemy prochnosti i plastichnosti*, 2013. Vol. 75(4). Pp. 268–272 (in Russian).
22. *Bogdanov A.N., Skvortsov A.T.* Nelinejnye sdvigovye volny v zernistoj srede [Nonlinear shear waves in granular medium]. *Akusticheskij zhurnal*, 1992. Vol. 38. No. 3. Pp. 408–412 (in Russian).
23. *Bykov V.G.* Uedinennye sdvigovye volny v zernistoj srede [Solitary shear waves in a granular medium]. *Akusticheskij zhurnal*, 1999. Vol. 45. No. 2. Pp. 169–173 (in Russian).
24. *Erofeev V.I., Sharabanova A.V.* Sdvigovye volny Rimana v materiale, svoystva kotorogo zavisyat ot vida napryazhennoego sostoyaniya [Riemann shear waves in a material whose properties depend on the type of stress state]. *Problemy mashinostroeniya i nadejnosti mashin*. 2004. No. 1. Pp. 20–23 (in Russian).
25. *Erofeev V.I., Kajaev V.V., Semerikova N.P.* Volny v sterzhnyah. Dispersiya. Dissipaciya. Nelinejnost'. [Waves in rods. Dispersion. Dissipation. Nonlinearity]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2002. 208 p.
26. *Kaplanov J.D., Kossovich L. Yu., Nolde E.V.* Dynamics of thin walled elastic bodies. San Diego, Academic Press, 1998. 226 p.
27. *Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V., Mogilevich L.I., Andrianov I.V.* The generalized Schamel equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells. *Nonlinear Dynamics*, 2019. Vol. 98. No. 1. Pp. 185–194.
28. *Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V., Andrianov I.V., Erofeev V.I.* The Schamel-Ostrovsky equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells. *Journal of Sound and Vibration*, 2021. Vol. 491. Art. 115752. DOI: 10.1016/J.JSV.2020.115752.



29. *Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V., Artamonov N.A.* Physically admissible and inadmissible exact localized solutions in problems of nonlinear wave dynamics of cylindrical shells. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2024. Vol. 20. No. 2. Pp. 219–229.
30. *Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V.* Osesimmetrichnye nelinejnye modulirovannye volny v cilindricheskoj obolochke [Axisymmetric nonlinear modulated waves in a cylindrical shell]. *Akusticheskij zhurnal*, 2018. Vol. 64(4). Pp. 417–423 (in Russian).
31. *Yamaki N.* Elastic stability of circular cylindrical shells. North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics. Vol. 27. Amsterdam, North-Holland, 1984.
32. *Amabili M.* A comparison of shell theories for large-amplitude vibrations of circular cylindrical shells: Lagrangian approach. *Journal of Sound and Vibration*, 2003. Vol. 264. No. 5. Pp. 1091–1125.
33. *Lukash P.A.* Osnovy nelinejnoj stroitel'noj mekhaniki [Fundamentals of nonlinear structural mechanics]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1978. 204 p. (in Russian).
34. *Volmir A.* Nelinejnaya dinamika plastinok i obolochek [The nonlinear dynamics of plates and shells]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 432 p.
35. *Moskvitin V.V.* Soprotivlenie vyazko – uprugih materialov [Resistance of viscoelastic materials]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 328 p. (in Russian).
36. *Potapov A.I.* Nelinejnye volny deformacii v sterzhnyah i plastinah [Nonlinear strain waves in rods and plates]. Gorkiy, Publ. of Gorkiy State Univ., 1985. 108 p. (in Russian).
37. *Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V., Artamonov N.A.* Sdvigovye volny v nelinejno-uprugoj cilindricheskoj obolochke. [Shear waves in a nonlinear elastic cylindrical shell]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2024. Vol. 24(4). Pp. 578–586 (in Russian).
38. *Rudenko O.V.* K 40-letiyu uravneniya Hohlova–Zabolotskoj [The 40th anniversary of the Khokhlov-Zabolotskaya equation]. *Akusticheskij zhurnal*, 2010. Vol. 56. Pp. 457–466 (in Russian).
39. *Rudenko O.V., Sukhorukov A.A.* Difragiruyushchie puchki v kubichno – nelinejnyh sredah bez dispersii [Diffracting beams in nondispersive media with cubic profile]. *Akusticheskij zhurnal*, 1995. Vol. 41(5). Pp. 725–730 (in Russian).
40. *Porubov A.V., Velarde M.G.* Exact periodic solutions of the complex Ginzburg–Landau equation. *Journal of Mathematical Physics*, 1999. Vol. 40. Pp. 884–896.