

УДК 51-32

Автомодельное решение задачи о растворении льда гидрофильной жидкостью

© 2025 г. О. В. Нагорнов, Т. И. Бухарова

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

Рассматривается решение одномерной задачи о взаимодействии льда и гидрофильной жидкости. В отличие от хорошо известной задачи Стефана о промерзании чистой воды при контакте со льдом, температура фазового перехода не постоянна и зависит от концентрации гидрофильной жидкости, описываемой уравнением диффузии. В работе используется линейное уравнение, связывающее равновесные температуру и концентрацию на границе контакта. Температура во льду и в жидкости описывается уравнениями теплопроводности. На фазовой границе происходит тепло-массообмен: вода из гидрофильной жидкости намерзает на поверхность льда, ее концентрация увеличивается, или наоборот, происходит растворение льда на границе и понижается концентрация гидрофильной жидкости. Это определяется входными параметрами задачи. С помощью введения автомодельной переменной уравнения в частных производных сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Получены аналитические решения для температуры во льду и жидкости и концентрации гидрофильной жидкости. Для автомодельного параметра получено трансцендентное уравнение, которое решается численно.

Ключевые слова: автомодельное решение, фазовый переход, задача Стефана, гидрофильная жидкость.

Введение

Рассмотрим контакт двух полупространств, содержащих гидрофильную жидкость (НЛ) при $x < 0$ и лед при $x > 0$, соответственно. Реальными примерами таких взаимодействий являются морская вода и лед, а также используемые при термобурении ледников гидрофильные жидкости (типа этанола) и лед [1–3]. В одномерном случае используем уравнения теплопроводности для льда, НЛ и уравнение диффузии в растворе с соответствующими начальными и граничными условиями [4]:

$$T_{f,t} = a_f^2 T_{f,xx}, \quad -\infty < x < 0, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$C_t = a_c^2 C_{xx}, \quad -\infty < x < 0, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$T_{i,t} = a_i^2 T_{i,xx}, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \quad (3)$$

где T_f и T_i – температура НЛ и льда, соответственно; C – концентрация НЛ; x – координата, t – время; нижние индексы t и x в уравнениях обозначают соответствующие частные производные, a_f^2, a_i^2, a_c^2 – температуропроводности НЛ, льда и коэффициент диффузии НЛ, соответственно. Температуры

✉ О.В. Нагорнов: ovnagornov@mephi.ru

Поступила в редакцию: 01.08.2025

После доработки: 10.08.2025

Принята к публикации: 12.08.2025

и концентрация зависят от двух переменных (x, t) . Для простоты конвективные движения не учитываются. Начальные условия задачи имеют вид:

$$C(x, 0) = C_0, \quad T_f(x, 0) = T_1, \quad -\infty < x < 0, \quad (4)$$

$$T_i(x, 0) = T_0, \quad 0 < x < +\infty, \quad (5)$$

где C_0, T_1, T_0 – постоянные.

Граничные условия на фазовой границе $x = \xi(t)$:

$$k_f T_{f,x} - k_i T_{i,x} = L \rho \xi'(t), \quad x = \xi(t), \quad t > 0, \quad (6)$$

$$T_f(\xi, t) = T_i(\xi, t) = T_{eq}, \quad t > 0, \quad (7)$$

где k_f и k_i – коэффициенты теплопроводности НЛ и льда, соответственно; L – теплота плавления; ρ – плотность льда, равновесная температура и концентрация связаны соотношением:

$$C_{eq} = AT_{eq}, \quad x = \xi(t), \quad t > 0, \quad (8)$$

где A – постоянная [3]. Для широкого диапазона температур существуют и другие аппроксимации равновесных значений температуры и концентрации [5]. Кроме того, вследствие замерзания льда или его растворения на фазовой границе, и учитывая баланс массы растворителя получаем следующее уравнение:

$$-a_c^2 C_x = C \xi'(t), \quad x = \xi(t), \quad t > 0, \quad (9)$$

Здесь левая часть уравнения (9) определяет поток массы растворителя, а правая часть скорость изменения его массы у фазовой границы [6]. Система уравнений (1)–(9) допускает автомодельное решение так, что все неизвестные оказываются функциями комбинации переменных $x / \sqrt{t}$ [7].

Автомодельное решение

Переходя к автомодельной переменной, уравнения в частных производных (1) – (3) преобразуются в обыкновенные дифференциальные уравнения. Температуры и концентрация тогда могут быть найдены в следующем виде:

$$\begin{aligned} T_f(x, t) &= B_1 + D_1 \Phi\left(\frac{x}{2a_f \sqrt{t}}\right), \quad T_i(x, t) = B_2 + D_2 \Phi\left(\frac{x}{2a_i \sqrt{t}}\right), \\ C(x, t) &= B_3 + D_3 \Phi\left(\frac{x}{2a_c \sqrt{t}}\right), \end{aligned} \quad (10)$$

где B и D с индексами обозначают неизвестные постоянные; $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$ – функция ошибок.

Фазовая граница подчиняется уравнению $\xi(t) = \alpha \sqrt{t}$, где α – постоянная (автомодельный параметр), подлежащая определению. Чтобы определить семь неизвестных $B_1, B_2, B_3, D_1, D_2, D_3, \alpha$ подставляем уравнения (10) в систему (1)–(9). Тогда получаем следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
 B_1 - D_1 &= T_0, \\
 B_2 + D_2 &= T_1, \\
 B_3 - D_3 &= C_0, \\
 B_1 + D_1 \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_f}\right) &= B_2 + D_2 \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_i}\right), \\
 -\frac{2D_3}{\sqrt{\pi}} a_c e^{-\frac{\alpha^2}{4a_c^2}} &= \alpha \left(B_3 + D_3 \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_c}\right) \right), \\
 B_3 + D_3 \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_c}\right) &= A \left(B_1 + D_1 \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_f}\right) \right), \\
 \frac{2D_1 k_f}{\sqrt{\pi} a_f} e^{-\frac{\alpha^2}{4a_f^2}} - \frac{2D_2 k_i}{\sqrt{\pi} a_i} e^{-\frac{\alpha^2}{4a_i^2}} &= \alpha L \rho,
 \end{aligned} \tag{11}$$

Эта система может быть сведена к трансцендентному уравнению с одной неизвестной α :

$$C_0 - \frac{C_0 \alpha (1 + \Phi_c)}{\alpha + \alpha \Phi_c + \frac{2}{\sqrt{\pi}} a_c E_c} - T_1 + \frac{(1 - \Phi_i) \left(T_1 - T_0 - \frac{\sqrt{\pi}}{2k_f} \alpha L \rho a_f E_f (1 + \Phi_f) \right)}{1 - \Phi_i + \frac{a_f k_i E_f}{a_i k_f E_i} (1 + \Phi_f)} = 0, \tag{12}$$

где введены следующие обозначения: $\Phi_f = \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_f}\right)$, $\Phi_i = \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_i}\right)$, $\Phi_c = \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_c}\right)$, $E_c = e^{-\frac{\alpha^2}{4a_c^2}}$, $E_f = e^{-\frac{\alpha^2}{4a_f^2}}$, $E_i = e^{-\frac{\alpha^2}{4a_i^2}}$.

Вычисление скорости фазовой границы, температур и концентрации НЛ

Уравнение (12) определяет параметр α при различных свойствах НЛ и льда, начальных температурах и концентрациях. Поэтому распределения температур и концентрации вдоль оси x может быть найдено из уравнений (11). Температурный скачок $T_0 - T_1$ влияет на скорость движения фазовой границы (рис. 1). Здесь вычисления проведены при $T_1 = 5^\circ\text{C}$. Другие параметры задачи приведены в таблице 1.

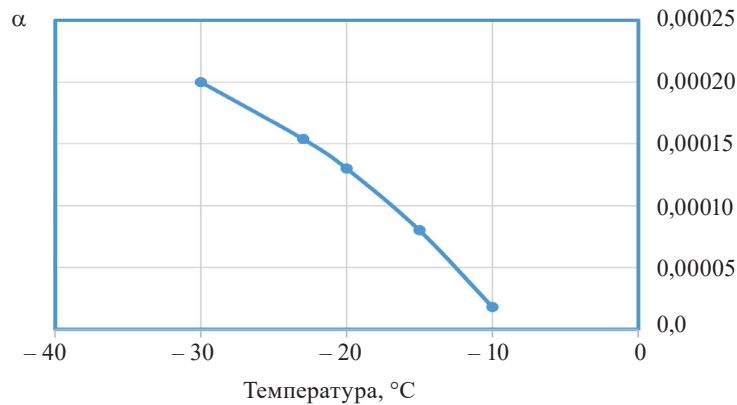


Рис. 1. Влияние начальной температуры льда на скорость фазовой границы

Таблица 1. Параметры задачи

a_i^2	a_f^2	a_e^2	k_i	k_f	k
$1,33 \cdot 10^{-6}$	$1,5 \cdot 10^{-7}$	$1,5 \cdot 10^{-8}$	2,22	0,53	2,0

В таблице размерности температуропроводностей указаны в м²/с, коэффициенты теплопроводностей в Вт/(м·°К), плотность льда 917 кг/м³, теплота плавления льда $3,3 \cdot 10^5$ Дж/кг. Небольшие температурные скачки замедляют скорость движения фазовой границы (рис. 1).

Выводы

Найдено автомодельное решение задачи о взаимодействии льда с гидрофильной жидкостью. Фазовая граница движется согласно соотношению $x = \xi(t) = \alpha \sqrt{t}$ подобно хорошо известному решению задачи Стефана. Для параметра α , определяющего решение задачи, получено трансцендентное уравнение и определено численное решение при различных входных параметрах. Температура и концентрация гидрофильной жидкости, а также температура льда найдены в явной форме, удобной для дальнейшего анализа.

Финансирование

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации и выполнена по теме государственного задания FSWU-2023-0031.

Конфликт интересов

Конфликт интересов отсутствует.

Вклад авторов

О.В. Нагорнов – постановка задачи, выбор метода решения, анализ результатов.

Т.И. Бухарова – участие в проведении исследования, анализ и обсуждение результатов.

Список литературы

1. Nagornov O.V., Sergienko O.V. Temperature field of an ice shelf in the vicinity of a hot water-drilled well // Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 1998. V. 71. № 1. P. 154–160.
2. Zagorodnov V. S., Nagornov O. V., Kelley J. J., Stanford K. L. Causes of the appearance of stresses in an ice core // PICO. University of Alaska Fairbanks. Technical Report, 1992. V. 92–4. 28 p
3. Nagornov, O.V., Zagorodnov V.S., Kelley J.J. Interaction of hydrophilic liquid with ice // Proceedings of Fourth International Symposium on Thermal Engineering and Science for Cold Regions, September 28 – October 1, 1993.
4. Carslaw H.S., Jager J. C. Conduction of heat in solids. Oxford. Clarendon Press, 1986. 510 p.
5. Talalay P.G., Fan X. Alternative clean approaches to accessing subglacial Lake Vostok // Проблемы Арктики и Антарктики, 2024. Т.70(4). С.499–513.
6. Zagorodnov V.S., Morev V.A., Nagornov O.V., Kelley J.J., Gosink T.A., Koci B.R. Hydrophilic liquid in glacier boreholes // Cold Region Science and Technology, 1994.V. 24, P. 243–251.
7. Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: ИД Интеллект, 2010. 368 с.

Self-similar solution of the problem on dissolution of ice by hydrophilic liquid

O. V. Nagornov , **T. I. Bukharova**

National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409, Russia
 ovnagornov@mephi.ru

Received August 1, 2025; revised August 10, 2025; accepted August 12, 2025

The solution of the one-dimensional problem on interaction of ice and hydrophilic liquid is studied. Unlike the well-known Stefan problem of freezing of pure water upon contact with ice, the phase transition temperature is not constant and depends on the concentration of hydrophilic liquid. The concentration obeys the diffusion equation. We use a linear equation for the equilibrium temperature and concentration at the contact boundary. The temperature in ice and liquid is described by the heat conduction equations. Heat and mass transfer occurs at the phase boundary and water from the hydrophilic liquid freezes onto the surface of the ice, its concentration increases, or, conversely, ice dissolves at the boundary and the concentration of the hydrophilic liquid decreases. It is determined by the input parameters of the problem. By introducing a self-similar variable, partial differential equations are reduced to ordinary differential equations. Analytical solutions for the temperature in ice and liquid, and the concentration of the hydrophilic liquid are obtained. A transcendental equation determines the self-similar parameter, and is solved numerically.

Keywords: self-similar solution, phase transition, the Stefan problem, hydrophilic liquid.

References

1. Nagornov O.V., Sergienko O.V. Temperature field of an ice shelf in the vicinity of a hot water-drilled well. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 1998. Vol. 71. No.1. Pp. 154–160.
2. Zagorodnov V. S., Nagornov O. V., Kelley J. J., Stanford K. L. Causes of the appearance of stresses in an ice core. PICO. University of Alaska Fairbanks. Technical Report, 1992. Vol. 92–4. 28 p
3. Nagornov, O.V., Zagorodnov V.S., Kelley J.J. Interaction of hydrophilic liquid with ice. *Proceedings of Fourth International Symposium on Thermal Engineering and Science for Cold Regions*, September 28 – October 1, 1993.
4. Carslaw H.S., Jager J. C. *Conduction of heat in solids*. Oxford. Clarendon Press, 1986. 510 p.
5. Talalay P.G., Fan X. Alternative clean approaches to accessing subglacial Lake Vostok. *Problems of the Arctic and Antarctic*, 2024. Vol. 70(4). Pp.499–513.
6. Zagorodnov V.S., Morev V.A., Nagornov O.V., Kelley J.J., Gosink T.A., Koci B.R. Hydrophilic liquid in glacier boreholes. *Cold Region Science and Technology*, 1994. Vol. 24. Pp. 243–251.
7. Kudryashov N.A. *Metody nelinejnoj matematicheskoj fiziki [Methods of nonlinear mathematical physics]*. Dolgoprudnyj, ID Intellekt Publ., 2010. 368 p.