Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», 2025, т. 14, № 4, с. 298 – 317

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

https://doi.org/10.26583/vestnik.2025.4.3

Оригинальная статья / *Original paper*

УДК 517.9

Уравнение Кортевега – де Вриза – Бюргерса с нелинейным источником: редукция, тест Пенлеве, первые интегралы и аналитические решения

Н. А. Кудряшов

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

Изучается уравнение Кортевега – де Вриза – Бюргерса с нелинейным источником. Задача Коши для этого уравнения в общем случае не решается методом обратного преобразования рассеяния. Однако уравнение допускает группу преобразований сдвига по независмым переменным и поэтому рассматривается с учетом переменных бегущей волны. Для исследования аналитических свойств нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения применяются три шага теста Пенлеве. Показано, что в общем случае уравнение не проходит тест Пенлеве. Из анализа существования ряда Лорана для общего решения дифференциального уравнения получены условия на параметры математической модели, при которых уравнение проходит тест Пенлеве, и, следовательно, выполняются необходимые условия существования общего решения для четырех случаев нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения. Принимая во внимание значения индексов Фукса, найден первый интеграл соответствующего нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения. Показано, что общие решения одного из нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений выражаются через эллиптическую функцию Вейерштрасса, а решения другого уравнения имеют решения, представимые через трансценденты первого уравнения Пенлеве при определенных ограничениях на параметры уравнения. Обсуждается взаимосвязь между тестом Пенлеве и специальными методами нахождения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений. Специальные методы используются для построения аналитических решений с одной и двумя произвольными постоянными. Получены точные решения с двумя произвольными постоянными, выраженными через эллиптическую функцию Вейерштрасса. С помощью метода логистических функций найдены точные решения уравнения Кортевега – де Вриза – Бюргерса с нелинейным источником с одной произвольной постоянной. Показано, что семейство уравнений, для которых найдены точные решения, значительно расширяется в случае использования специальных методов.

Ключевые слова: уравнение Кортевега – де Вриза – Бюргерса с нелинейным источником, переменные бегущей волны, общее решение, эллиптическая функция Вейерштрасса, первое уравнение Пенлеве, метод простейших уравнений, точные решения.

Введение

В работе рассматривается обобщенное уравнение Кортевега – де Вриза – Бюргерса с нелинейным источником в виде

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = \mu u_{xx} + \alpha u + \beta u^2, \tag{1}$$

где $u = u(x, t)$ – функция, описывающая распространение возмущения в нелинейной среде, зависящая от независимых переменных x и t.

✉ Н.А. Кудряшов: nakudr@gmail.com

Поступила в редакцию: 01.07.2025
После доработки: 14.07.2025
Принята к публикации: 22.07.2025

EDN FTZRKZ

В случае $\mu = \alpha = \beta = 0$ уравнение (1) является знаменитым уравнением Кортевега – де Вриза, полученным в статье [1], для того чтобы объяснить уединенные волны на воде, наблюдаемые впервые английским кораблестроителем Джоном Скотт Расселом в 1834 г. [2]. Открытие солитона в 1965 году [3], описываемое уравнением Кортевега – де Вриза, привлекло огромное внимание к исследованию свойств этого уравнения, что привело два года спустя к открытию нового метода решения задачи Коши для нелинейных уравнений в частных производных, который в настоящее время известен во всем мире как метод обратной задачи рассеяния [4].

Полагая $\mu \neq 0$ и $\alpha = \beta = 0$, получаем уравнение Кортевега – де Вриза – Бюргерса, которое описывает более широкий класс волновых физических процессов, но с математической точки зрения является менее интересным, чем уравнение Кортевега – де Вриза. В течение долгого времени исследователи полагали, что это уравнение не имеет вообще никаких аналитических решений кроме тривиальных. Однако это мнение оказалось неверным, аналтитические решения этого уравнения в переменных бегущей волны были получены в работе 1988 г. [5]. Позже эти решения уравнения Кортевега – де Вриза – Бюргерса были получены во многих других работах (см., например, статьи [6–17]).

Если пренебречь производной третьего порядка u_{xxx} и конвективным выражением uu_x в уравнении (1), то уравнение становится знаменитым уравнением Фишера [18], которое широко используется при описании процессов в популяционной генетике и в ряде других научных дисциплин (см., например, работы [19–27]).

В данной работе мы рассматриваем уравнение (1), как обобщение уравнения Фишера с учетом влияния процессов дисперсии и конвекциии. Мы покажем, что это уравнение (1) в переменных бегущей волны имеет четыре набора параметров, при которых оно может иметь общее решение с тремя линейно незавиисимыми произвольными постоянными.

Очевидно, что уравнение (1) допускает группу преобразований сдвига по независимым переменным x и t, и поэтому решение этого уравнения можно искать, используя переменные бегущей волны.

Цель данной статьи состоит в нахождении общего решения уравнения (1) в переменных бегущей волны с тремя произвольными постоянными.

Для того чтобы найти аналитические решения нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения, полученного из уравнения (1), мы применим исследование аналитических свойств с помощью теста Пенлеве, которое может позволить найти необходимые условия интегрируемости обыкновенного дифференциального уравнения. Используя этот тест, мы определим значения параметров, при которых исходное уравнение (1) в переменных бегущей волны имеет общее решение. Далее, используя результаты теста Пенлеве, мы получим при дополнительных ограничениях на параметры уравнения первый интеграл уравнения (1) в переменных бегущей волны. Используя первые интегралы, мы найдем общие решения дифференциальных уравнений. Используя метод простейших уравнений, получим также аналитические решения дифференциального уравнения с одной и двумя произвольными постоянными.

Статья состоит из следующих разделов. В разд. 1 для изучения интегрируемости нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения применяется тест Пенлеве. В разд. 2 на основе информации об индексах Фукса, полученных из теста Пенлеве, мы находим первый интеграл дифференциального уравнения. В разд. 3 мы получаем общее решение обыкновенного дифференциального уроавнения (1) при ограничениях на параметры уравнения. Разд. 4 содержит точные решения дифференциального решения с двумя произвольными постоянными, полученными из первого интеграла. В разд. 5 и 6, используя метод простейших уравнений, получаем точные решения дифференциального уравнения Кортевега – де Вриза – Бюргерса с нелинейным источником с одной и двумя произвольными постоянными.

1. Применение теста Пенлеве для уравнения Кортевега – де Вриза – Бюргерса с нелинейным источником

Будем искать решение уравнения (1) используя переменные бегущей волны

$$u(x,t) = y(z), \quad z = x - C_0 t. \tag{2}$$

Подставляя (2) в уравнение (1), получаем нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y_{zzz} + 6yy_z - \mu y_{zz} - C_0 y_z - \alpha y - \beta y^2 = 0. \tag{3}$$

В этой статье мы применяем вариант С.В. Ковалевской [28, 29] теста Пенлеве для того, чтобы проверить интегрируемость уравнения (3) с помощью трех шагов [30–34]. Метод Ковалевской является простейшим вариантом теста Пенлеве, позволяющим определить, что общее решение дифференциального уравнения не имеет критических подвижных особых точек. Он состоит в виде локального разложения общего решения в ряд Лорана вблизи подвижной особой точки

$$y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-p}, \tag{4}$$

где z_0 соответствует значению подвижного полюса; p – порядку полюса; a_k – являются коэффициентами разложения общего решения в ряд Лорана (4).

Локальное разложение общего решения (4) уравнения (3) является гипотезой. Однако даже если эта гипотеза выполняется, то представление общего решения в виде (4) не доказывает существования локального разложения общего решения. Чтобы локальное разложение общего решения имело место, ряд Лорана (4) для уравнения (1) должен иметь необходимое число линейно независимых произвольных постоянных. Поскольку уравнение (3) имеет третий порядок, его разложение общего решения в ряд Лорана должно иметь три независимые произвольные постоянные. Одной из произвольных постоянных является z_0, а две другие произвольные постоянные могут содержаться среди коэффициентов a_k ряда Лорана (4).

На первом шаге алгоритма Ковалевской ищется первый член разложения решения в ряд Лорана (4). Принимая во внимание, что уравнение допускает группу преобразований сдвига $z \to z' - z_0$ по независимой переменной z и, следовательно, поскольку уравнение (3) является автономным, на первом шаге мы делаем подстановку

$$y(z) = \frac{a_0}{z^p} \tag{5}$$

в уравнение с ведущими членами, полученное из исходного уравнения, а именно

$$y_{zzz} + 6yy_z = 0. \tag{6}$$

На первом шаге применения теста Пенлеве к уравнению (6) мы находим ведущий член общего решения, имеющий значения

$$(a_0, p) = (-2, 2). \tag{7}$$

Из выражения (7) следует, что критических подвижных особых точек нет, и мы можем продолжить изучение аналитических свойств.

На втором шаге теста Пенлеве находятся индексы Фукса, соответствующие произвольным постоянным в разложении общего решения в ряд Лорана (4). Один из этих индексов равен $j_1 = -1$. Это значение соответствует произвольному выбору полюса z_0. Подставляя

$$y(z) = -\frac{2}{z^2} + a_j z^{j-2} \tag{8}$$

в уравнение (6) и приравнивая выражение линейное относительно коэффициента a_j нулю, мы приходим к алгебраическому уравнению

$$(j-4)(j-6)(j+1)z^{j-6}=0. \tag{9}$$

Решив алгебраическое уравнение (9), находим следующие индексы Фукса

$$j_1=-1, \quad j_2=4, \quad j_3=6. \tag{10}$$

На третьем шаге теста Пенлеве проверяются произвольные постоянные в разложении решения. С этой целью мы подставляем усеченное разложение решения уравнения в ряд Лорана

$$y=-\frac{2}{z^2}+\frac{a_1}{z}+a_2+a_3z+a_4z^2+a_5z^3+a_6z^4+\ldots \tag{11}$$

в уравнение (3). Поскольку уравнение (3) является автономным при проведении вычислений, мы снова опускаем в разложении решения значение постоянной z_0. На этом шаге теста Пенлеве мы хотим убедиться, что коэффициенты разложения a_4 и a_6 будут произвольными постоянными для общего решения уравнения (3).

Последовательно приравнивая выражения при различных степенях z, находим следующие коэффициенты разложения решения в ряд Лорана

$$a_1=\frac{2\beta}{15}-\frac{2\mu}{5}, \tag{12}$$

$$a_2=\frac{\mu^2}{150}+\frac{C_0}{6}-\frac{4\beta^2}{225}+\frac{23}{450}\mu\beta, \tag{13}$$

$$a_3=\frac{\mu^2\beta}{750}-\frac{\alpha}{6}-\frac{\mu^3}{750}-\frac{\beta C_0}{18}-\frac{64}{3375}\mu\beta^2+\frac{7}{1125}\beta^3. \tag{14}$$

Также получаем, что коэффициент a_4, соответствующий индексу Фукса $j_2=4$, в общем случае не является произвольным. Произвольным он становится только в случае выполнения равенства

$$K_4=\frac{2}{135}(\mu-2\beta)\left(27\alpha+9\beta C_0+3\mu\beta^2-\beta^3\right)=0. \tag{15}$$

Из равенства (15) следует, что коэффициент a_4 будет произвольным если выполняются следующие ограничения на параметры уравнения

$$\mu=2\beta, \tag{16}$$

или

$$C_0=\frac{\beta^2}{9}-\frac{\mu\beta}{3}-\frac{3\alpha}{9}. \tag{17}$$

Коэффициент a_5 в результате вычислений получается следующим:

$$\begin{aligned} a_5={}&\frac{\beta^2\alpha}{75}-\frac{11a_4\mu}{15}-\frac{334\beta^5}{759375}-\frac{\mu^5}{112500}-\frac{\mu^2\alpha}{450}-\frac{1}{36}\alpha C_0+\frac{799\beta^4\mu}{303750}-\frac{4781\beta^3\mu^2}{1215000}+\frac{\beta^3C_0}{225}+\\ &+\frac{\beta^2\mu^3}{11250}-\frac{11\beta\mu^4}{45000}-\frac{\beta C_0^{\,2}}{216}+\frac{4}{5}\beta a_4-\frac{53\beta^2\mu C_0}{4050}-\frac{53\beta\alpha\mu}{1350}-\frac{\beta\mu^2C_0}{1350}. \end{aligned} \tag{18}$$

Однако для того чтобы коэффициент a_6 разложения решения в ряд Лорана был произвольным, должно выполняться следующее равенство:

$$K_6 = \left(4\beta^2 + 8\mu^2 - \frac{34\beta\mu}{3}\right)a_4 + \frac{\mu^6}{9375} + \frac{97\beta\mu^5}{37500} - \frac{32\beta^2\mu^4}{16875} + \\ + \left(\frac{8639\beta^3}{202500} + \frac{7\alpha}{250} + \frac{7\beta C_0}{750}\right)\mu^3 + \left(-\frac{14059\beta^4}{303750} + \frac{461\beta\alpha}{1125} + \frac{461\beta^2 C_0}{3375}\right)\mu^2 + \\ + \left(\frac{4241\beta^5}{253125} - \frac{1957\beta^3 C_0}{20250} - \frac{1957\beta^2\alpha}{6750} + \frac{3\alpha C_0}{10} + \frac{\beta C_0{}^2}{20}\right)\mu - \frac{1526\beta^6}{759375} + \\ + \frac{169\beta^4 C_0}{10125} + \frac{169\beta^3\alpha}{3375} + \frac{\beta^2 C_0{}^2}{90} + \frac{\alpha^2}{3} + \frac{\beta\alpha C_0}{15} = 0. \tag{19}$$

Для того чтобы уравнение (3) проходило тест Пенлеве, коэффициенты a_4 и a_6 в разложении решения в ряд Лорана должны быть произвольными постоянными. Однако в результате исследований мы получили, что выражения K_4 и K_6 в общем случае не равны нулю, поэтому уравнение (3) в общем случае не проходит тест Пенлеве.

Предполагая, что коэффициент a_4 – призвольный, получаем, что для параметров уравнения (19) должно выполняться следующее ограничение:

$$4\beta^2 + 8\mu^2 - \frac{34\beta\mu}{3} = 0. \tag{20}$$

Решив уравнение (20), находим

$$\mu_1 = \frac{3\beta}{4}, \quad \mu_2 = \frac{2\beta}{3}. \tag{21}$$

Легко заметить, что оба условия (21) противоречат ограничению (16) на параметры μ и β. Таким образом, при дальнейшем анализе учитываем только условия (17) и (21).

Подставляя $\mu = \mu_1$ в уравнение (19), получаем

$$\alpha_{1,2} = \pm\frac{\beta^3}{72}. \tag{22}$$

В этом случае параметр C_0 определяется в соответствии с формулами

$$C_0^{(1)} = -\frac{13\beta^2}{72}, \quad C_0^{(2)} = -\frac{7\beta^2}{72}. \tag{23}$$

Учитывая полученные значения параметров в уравнении (3), имеем два нелинейных дифференциальных уравнения третьего порядка, которые проходят тест Пенлеве:

$$y_{zzz} + 6yy_z - \frac{3\beta}{4}y_{zz} + \frac{13\beta^2}{72}y_z - \frac{\beta^3}{72}y - \beta y^2 = 0, \tag{24}$$

$$y_{zzz} + 6yy_z - \frac{3\beta}{4}y_{zz} + \frac{7\beta^2}{72}y_z + \frac{\beta^3}{72}y - \beta y^2 = 0. \tag{25}$$

В случае $\mu = \mu_2$ получаем следующие значения для параметра α:

$$\alpha_{3,4} = \pm\frac{2\beta^3}{225} \tag{26}$$

и два значения параметра C_0 в виде

$$C_0^{(3)} = -\frac{31\beta^2}{225}, \quad C_0^{(4)} = -\frac{19\beta^2}{225}. \tag{27}$$

При этом мы получаем еще два дополнительных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка, которые проходят тест Пенлеве:

$$y_{zzz} + 6yy_z - \frac{2\beta}{3}y_{zz} + \frac{31\beta^2}{225}y_z - \frac{2\beta^3}{225}y - \beta y^2 = 0 \tag{28}$$

и

$$y_{zzz} + 6yy_z - \frac{2\beta}{3}y_{zz} + \frac{19\beta^2}{225}y_z + \frac{2\beta^3}{225}y - \beta y^2 = 0. \tag{29}$$

Таким образом, нашли, что уравнения (24), (25), (28) и (29) проходят тест Пенлеве, и можем надеяться, что они имеют общие решения.

2. Первые интегралы нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения, соответствующие уравнению Кортевега – де Вриза – Бюргерса с нелинейным источником

Для того чтобы найти общее решение уравнений (24), (25), (28) и (29), найдем первый интеграл уравнения (3). Поскольку разложения общих решений в ряд Лорана имеют произвольные постоянные a_4 и a_6, которым можно поставить в соответствие порядки полюсов 4 и 6, первые интегралы уравнения (3) должны иметь те же порядки 4 и 6.

Поэтому будем искать первый интеграл уравнения (3) принимая во внимание следующее выражение с неопределенными коэффициентами:

$$P = B_0 y_{zz} + (B_1 y + B_2)y_z + B_3 y^2 + B_4 y + B_5. \tag{30}$$

Подставляя (30) в уравнение (3), получаем, что все коэффициенты $B_k = 0$ ($k = 0, 1, \ldots, 5$). Это показывает, что первого интеграла вида (30) нет.

Однако если мы воспользуемся уравнением

$$P_z - mP = 0, \tag{31}$$

в котором учтем уравнение (3), то после вычислений получим выражения:

$$B_1 = 0, \quad B_2 = \left(\frac{\beta}{3} - \mu\right)B_0, \quad B_3 = 3B_0, \quad B_4 = \frac{3\alpha}{\beta}B_0, \quad B_5 = 0, \quad m = \frac{\beta}{3}. \tag{32}$$

Однако при этом возникает ограничение на параметры C_0, α и β, которое определяется формулой

$$C_0 = \frac{\beta^2}{9} - \frac{\beta\mu}{3} - \frac{3\alpha}{\beta}. \tag{33}$$

Уравнение (31) имеет решение:

$$P(z) = C_1 \exp(mz), \quad m = \frac{\beta}{3}. \tag{34}$$

Это первый интеграл уравнения (3) с произвольной постоянной C_1.

При условии (33) мы имеем уравнение (3):

$$y_{zzz} + 6yy_z - \mu y_{zz} - \left(\frac{\beta^2}{9} - \frac{\beta\mu}{3} - \frac{3\alpha}{\beta}\right)y_z - \alpha y - \beta y^2 = 0. \tag{35}$$

Учитывая коэффициенты (32), получаем первый интеграл уравнения (35) в виде

$$y_{zz} + \left(\frac{\beta}{3} - \mu\right)y_z + 3y^2 + \frac{3\alpha}{\beta}y = C_1 \exp\left(\frac{\beta}{3}z\right). \tag{36}$$

Далее используем первый интеграл (36) для построения аналитических решений уравнения (3). Еще один первый интеграл может быть найден, используя значение индекса Фукса $j_3 = 6$, соответствующий произвольной постоянной a_6. Из локального разложения решения (11) можно заметить, что постоянной a_6 можно поставить в соответствие порядок полюса 6. Используя это наблюдение, первый интеграл уравнения (3) можно искать в виде

$$Q_z - \lambda Q = 0, \tag{37}$$

где $Q(z)$ – полином с неизвестными коэффициентами

$$Q = E_0 y_z^2 + (E_1 y + E_2) y_{zz} + (E_3 y + E_4) y_z + E_5 y^3 + E_6 y^2 + E_7 y. \tag{38}$$

Поставляя выражение (38) в уравнение (37) и используя (3), после сравнения находим следующие ограничения на коэффициенты полинома (38)

$$E_1 = -2E_0, \quad E_3 = 2(\mu - \lambda)E_0, \quad E_4 = (\lambda - \mu)E_2, \quad E_5 = -4E_0, \tag{39}$$

$$\begin{gathered} E_6 = \frac{2\mu^2}{9}E_0 + C_0E_0 + 3E_2, \quad E_7 = -\left(\frac{2\mu^2}{9} + C_0\right)E_2, \\ \mu = \frac{3\beta}{4}, \quad \lambda = \frac{\beta}{2}, \quad E_2 = -\frac{\beta^2}{8}E_0 - C_0E_0 - \frac{4\alpha}{\beta}E_0. \end{gathered} \tag{40}$$

Кроме того находим два условия для постоянной C_0 в виде

$$C_0^{(1,2)} = -\frac{\beta^2}{8} - \frac{3\alpha}{\beta} \mp \frac{\alpha}{\beta_0}. \tag{41}$$

При $C_0 = C_0^{(1)}$ получаем следующий первый интеграл:

$$y_z^2 - 2yy_{zz} + \frac{\beta}{2}yy_z - 4y^3 - \frac{4\alpha}{\beta}y^2 - C_4 \exp\left\{\frac{\beta}{2}z\right\} = 0 \tag{42}$$

для уравнения (3) в виде

$$y_{zzz} - \frac{3\beta}{4} y_{zz} + 6yy_z + \left(\frac{\beta^2}{8} + \frac{4\alpha}{\beta}\right) y_z - \beta y^2 - \alpha y = 0. \tag{43}$$

В случае $C_0 = C_0^{(2)}$ получаем первый интеграл в виде:

$$y_z^2 - 2y_{zz}\left(y + \frac{\alpha}{\beta}\right) + \frac{\beta}{2} y_z \left(y + \frac{\alpha}{\beta}\right) - 4y^3 - \frac{4\alpha}{\beta}\left(2y + \frac{\alpha}{\beta}\right) y - C_4 \exp\left\{\frac{\beta}{2} z\right\} = 0 \tag{44}$$

для уравнения (3)

$$y_{zzz} - \frac{3\beta}{4} y_{zz} + \left(\frac{\beta^2}{8} + \frac{2\alpha}{\beta}\right) y_z + 6yy_z - \alpha y - \beta y^2 = 0. \tag{45}$$

Можно заметить, что первые интегралы (42) и (44) для уравнения (3) существуют при $\mu = \mu_1 = \dfrac{3\beta}{4}$, однако не существуют при $\mu_2 = \dfrac{2\beta}{3}$. В следующем разделе найдем, что общее решение уравнения (3) находится при $\mu = \mu_1$ через эллиптическую функцию Вейерштрасса, но при $\mu = \mu_2 = \dfrac{2\beta}{3}$ решение уравнения определяется через трансценденты первого уравнения Пенлеве, для которого нет первого интеграла в полиномиальном виде.

3. Общее решение нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения, соответствующего уравнению Кортевега – де Вриза – Бюргерса с нелинейным источником

Общее решение уравнения (3) будем искать в виде

$$y(z) = \psi(z) W(\xi), \quad \xi = f(z). \tag{46}$$

Используя (46), имеем

$$y_z = \psi_z W + \psi W_\xi f_z, \tag{47}$$

$$y_{zz} = \psi_{zz} W + 2\psi_z W_\xi f_z + \psi W_{\xi\xi} f_z^2 + \psi W_\xi f_{zz}. \tag{48}$$

Подставляя выражения (46) – (48) в уравнение (35), и предполагая, что выполняются соотношения

$$\psi(z) = f_z^2, \quad \xi = f(z) = C_2 + \frac{15}{3\mu - \beta} \exp\left(\frac{3\mu - \beta}{15} z\right), \tag{49}$$

где C_2 – произвольная постоянная, получаем, что при условии

$$\alpha = \frac{2\beta^3}{225} - \frac{4\mu\beta^2}{75} + \frac{2\mu^2\beta}{25}$$

имеем следующее уравнение

$$W_{\xi\xi} + 3W^2 - C_1 \exp\left(\frac{3\beta - 4\mu}{15} z\right) = 0. \tag{50}$$

Последнее уравнение можно записать в виде

$$W_{\xi\xi} + 3W^2 - C_1 \left[\frac{(\xi - C_2)(3\mu - \beta)}{15}\right]^N = 0, \quad N = \frac{3(3\beta - 4\mu)}{3\mu - \beta}. \tag{51}$$

В случае

$$\mu = \mu_1 = \frac{3\beta}{4}$$

имеем $N = 0$, и уравнение (51) принимает вид

$$W_\xi^2 + 2W^3 - 2C_1 W + 4C_3 = 0. \tag{52}$$

Общее решение уравнения (52) выражается через эллиптическую функцию Вейерштрасса:

$$W(\xi) = -2\wp(\xi; C_1, C_3), \quad \xi = C_2 + \frac{12}{\beta}\exp\left(\frac{\beta}{12} z\right), \tag{53}$$

где функция $\wp(\xi; C_1, C_3)$ является обозначением функции Вейерштрасса.

Используя (47) и (53), получаем общее решение следующего уравнения

$$y_{zzz} + 6y y_z - \frac{3\beta}{4} y_{zz} + \frac{13\beta^2}{72} y_z - \frac{b^3}{72} y - \beta y^2 = 0 \tag{54}$$

в виде

$$y(z) = -2\exp\left(\frac{\beta}{6} z\right)\wp\left\{C_2 + \exp\left(\frac{\beta}{12} z\right); C_1, C_3\right\}. \tag{55}$$

В случае

$$\mu = \mu_2 = \frac{2}{3}\beta$$

получаем $N = 1$, и уравнение (51) становится хорошо известным первым уравнением Пенлеве в виде

$$W_{\xi\xi} + 3W^2 - \frac{\beta C_1}{15}(\xi - C_2) = 0. \tag{56}$$

Мы нашли, что общее решение $y(z)$ уравнения

$$y_{zzz}+6yy_z-\frac{2\beta}{3}y_{zz}+\frac{31\beta^2}{225}y_z-\frac{2b^3}{225}y-\beta y^2=0 \tag{57}$$

с тремя произвольными постоянными определяется через трансценденты первого уравнения Пенлеве в виде

$$y(z)=-\left(\frac{-15}{\beta C_1}\right)^{-2/5}\exp\left(\frac{2\beta}{15}z\right)V\left\{\left(\frac{-15}{\beta C_1}\right)^{-1/5}\exp\left(\frac{\beta}{15}z\right)\right\}, \tag{58}$$

где зависимость $V(\theta)$ обозначает трансценденты первого уравнения Пенлеве

$$V_{\theta\theta}=3V^2+\theta. \tag{59}$$

В табл. 1 представлены значения параметров исходного уравнения, при которых уравнение (3) имеет общие решения, которые выражаются через переменные бегущей волны с тремя произвольными постоянными. Первый случай соответствует хорошо известному решению уравнения Кортевега – де Вриза, другие случаи – общим решениям уравнения третьего порядка (3).

Таблица 1. Значения параметров уравнения (3) с общим решением

n	μ	α	C_0	β
1	0	0	C_0	0
2	$\frac{3\beta}{4}$	$\frac{\beta^3}{72}$	$-\frac{13\beta^2}{72}$	β
3	$\frac{3\beta}{4}$	$-\frac{\beta^3}{72}$	$-\frac{7\beta^2}{72}$	β
4	$\frac{2\beta}{3}$	$\frac{2\beta^3}{225}$	$-\frac{31\beta^2}{225}$	β
5	$\frac{2\beta}{3}$	$-\frac{2\beta^3}{225}$	$-\frac{19\beta^2}{225}$	β

Таким образом, в данном разделе показано, что уравнение (1) имеет общие решения, выраженные через эллиптические функции Вейерштрасса и через неклассические функции трансценденты первого уравнения Пенлеве при $N=0$ и при $N=1$, когда $\mu=\frac{3}{4}\beta$ и $\mu=\frac{2}{3}\beta.$ Для других значений параметров общего решения уравнения (51) нет.

4. Точные решения уравнения (3) с двумя произвольными постоянными

Полагая $C_1=0$ в уравнении (36), получаем нелинейное обыкновенное дифференциальное второго порядка в виде

$$y_{zz}+\frac{\beta}{3}y_z+3y^2+\frac{3\alpha}{\beta}y=0. \tag{60}$$

Подставляя выражения (46)–(48) в уравнение (60) и предполагая следующие зависимости при $\alpha=-\dfrac{2\beta^3}{75}$

$$\psi(z)=f_z^2,\quad \xi=f(z)=C_4-\frac{15}{\beta}\exp\left(-\frac{\beta}{15}z\right), \tag{61}$$

получаем уравнение

$$W_{\xi\xi}+\frac{1}{3}W^2=0. \tag{62}$$

Первый интеграл уравнения (62) имеет вид

$$W_\xi^2+\frac{2}{9}W^3=C_5. \tag{63}$$

Решение уравнения (63) и, следовательно, решение уравнения (3) может быть представлено через эллиптическую функцию Вейерштрасса:

$$y(z)=\exp\left(-\frac{2\beta}{15}z\right)\wp\left\{C_4-\frac{15}{\beta}\exp\left(-\frac{\beta}{15}z\right);\,0,-\frac{C_5}{1296}\right\}. \tag{64}$$

Решение (64) уравнения (3) имеет две произвольные постоянные в отличие от решения, полученного в предыдущем разделе.

5. Применение метода простейших уравнений для нахождения решений уравнения (1) с эллиптической функцией Вейерштрасса

Используя произвольные постоянные для значений коэффициентов a_4 и a_6 в разложении общего решения в ряд Лорана, мы нашли четыре нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнения с общими решениями. В случае $K_4\neq 0$ или $K_6\neq 0$, уравнение (1) допускает только тривиальные решения, поскольку в этих случаях отсутствуют локальные разложения общего решения уравнения (3) в ряд Лорана.

Однако если уравнение (3) не проходит тест Пенлеве, но разложения общего решения в ряды Лорана существуют, аналитические решения уравнения могут быть найдены с меньшим числом независимых произвольных постоянных. В частности, для уравнения (3) аналитические решения могут быть получены при одной или двух произвольных постоянных для фиксированного значения коэффицента a_4.

В последние несколько десятилетий в научной литературе для поиска таких аналитических решений было предложено несколько методов. Один из популярных и эффективных методов для поиска точных решений предложен в статьях [38, 39] и назван методом простейших уравнений. Идея этого метода, называемого часто в зарубежной литературе «методом Кудряшова», достаточна проста и состоит в том, что если мы не можем найти общего решения исходного уравнения, то можно воспользоваться известным аналитическим решением более простого уравнения меньшего порядка.

В качестве примера применения этого метода найдем аналитические решения уравнения (3), используя формулы, представленные в работах [40–51]:

$$y(z)=M_0+M_1R(z), \tag{65}$$

где $R(z)$ является решением уравнения для эллиптической функции Вейерштрасса

$$R_z^2 = 4R^3 + 2cR - g_3. \tag{66}$$

Можно заметить, что решения уравнения (57) удовлетворяют также следующим уравнениям:

$$R_{zz} = 6R^2 + c \tag{67}$$

и

$$R_{zzz} = 12RR_z, \tag{68}$$

которые получены в результате дифференцирования уравнения (66).

Подставляя (65) в уравнение (3) и используя уравнения (66), (67) и (68), получаем выражения:

$$M_1 = -2, \quad M_0 = -\frac{\alpha}{2\beta}, \quad \mu = \frac{\beta}{3}, \quad c = -\frac{3\alpha^2}{8\beta^2}. \tag{69}$$

Учитывая выражения (65) и (69), имеем точные решения уравнения (3) в виде

$$y(z) = -\frac{\alpha}{2\beta} - 2\wp\left\{z - z_0; \frac{3\alpha^2}{4\beta^2}, g_3\right\}. \tag{70}$$

Решения (70) уравнения (3) имеют две произвольных постоянных z_0 и g_3.

6. Применение метода простейших уравнений для нахождения решений уравнения (1) с помощью уравнения Риккати

Рассмотрим применение метода простейших уравнений для поиска аналитических решений уравнения (3), используя уравнение Риккати в качестве простейшего уравнения. В этом случае решение уравнения ищется в виде [52–63]:

$$y(z) = S_0 + S_1 Q + S_2 Q^2, \tag{71}$$

где $Q(z)$ является решением уравнения Риккати в виде

$$Q_z = k(Q^2 - Q). \tag{72}$$

Общее решение уравнения (72) выражается формулой:

$$Q(z) = \left[1 + \exp\{k(z - z_0)\}\right]^{-1}. \tag{73}$$

Заметим, что решение (73) удовлетворяет также уравнениям

$$Q_{zz} = 2k^2Q^3 - 3k^2Q^2 + k^2Q \tag{74}$$

и

$$Q_{zzz} = 6k^3Q^4 - 12k^3Q^3 + 7k^3Q^2 - k^2Q. \tag{75}$$

Подставляя (71) в уравнение (3) и учитывая уравнения (72), (74) и (75), приходим к уравнению в виде

$$\begin{gathered}24S_2k\left(k^2+\frac{S_2}{2}\right)Q^6+\left(24\left(\frac{S_1}{4}-\frac{9}{4}S_2\right)k^3-6S_2k^2\mu+18\left(S_1-\frac{2}{3}S_2\right)S_2k-S_2{}^2\beta\right)Q^5+\\+\left(24\left(-\frac{S_1}{2}+\frac{19S_2}{12}\right)k^3-2\mu(S_1-5S_2)k^2+24\left(\frac{1}{4}S_1^2-\frac{3}{4}S_1S_2-\frac{1}{12}S_2(C_0-6S_0)\right)k-2S_1S_2\beta\right)Q^4+\\+\left(24\left(\frac{7S_1}{24}-\frac{S_2}{3}\right)k^3+3\mu\left(S_1-\frac{4}{3}S_2\right)k^2+24\left(-\frac{1}{4}S_1^2+\left(-\frac{C_0}{24}+\frac{S_0}{4}\right)S_1+\frac{1}{12}S_2(C_0-6S_0)\right)k-S_1^2\beta-\right.\\\left.-2\left(S_0\beta+\frac{\alpha}{2}\right)S_2\right)Q^3-S_1\left(k^3+k^2\mu+(-C_0+6S_0)k+2S_0\beta+\alpha\right)Q^2-S_0(S_0\beta+\alpha)Q=0.\end{gathered}\tag{76}$$

Коэффициенты этого уравнения должны быть равны нулю, и, решая алгебраические уравнения, находим следующие значения:

$$\begin{gathered}S_2=-2k^2,\quad S_1=-\frac{2k}{15}(\beta-15k-3\mu),\\S_0=\frac{C_0}{6}-\frac{4\beta^2}{225}+\frac{k\beta}{15}+\frac{23\beta\mu}{450}-\frac{k^2}{6}-\frac{k\mu}{5}+\frac{\mu^2}{150}.\end{gathered}\tag{77}$$

Также получаем следующие ограничения для параметров уравнения (3):

$$C_0=\frac{14\beta^2}{125}-\frac{128\beta\mu}{375}-\frac{k^2}{5}+\frac{3\mu^2}{125}+\frac{3k^2\mu}{5\beta}-\frac{3\mu^3}{125\beta}-\frac{3\alpha}{\beta}\tag{78}$$

и значения

$$\mu_1=2\beta,\quad \mu_2=\frac{\beta}{3},\quad \mu_3=\frac{\beta}{3}-5k,\quad \mu_4=\frac{\beta}{3}+5k.\tag{79}$$

В случае $\mu_1=2\beta$ имеем следующие значения:

$$k_{(1,2)}=\pm\frac{3\alpha}{2\beta^2},\quad C_0^{(1.2)}=\frac{9\alpha^2}{4\beta^4}-\frac{2\beta^2}{3}-\frac{3\alpha}{\beta}.\tag{80}$$

При $\mu_2=\dfrac{\beta}{3}$ получаем:

$$k_{(1,2)}=\pm\frac{\sqrt{-3\alpha\beta}}{\beta},\quad k_{(3,4)}=\pm\frac{\sqrt{3\alpha\beta}}{\beta},\quad C_0^{(1,2,3,4)}=-\frac{3\alpha}{\beta}.\tag{81}$$

В случае $\mu_3=\dfrac{\beta}{3}-5k$ и $\mu_4=\dfrac{\beta}{3}+5k$ находим:

$$k_{(1,2)}=\pm\frac{\sqrt{2\alpha\beta}}{2\beta},\quad k_{(3,4)}=\pm\frac{\sqrt{-2\alpha\beta}}{2\beta}\tag{82}$$

и

$$C_0^{(1,2)} = \mp\frac{5\sqrt{2\alpha\beta}}{2\beta} - \frac{3\alpha}{\beta}, \quad C_0^{(3,4)} = \mp\frac{5\sqrt{-2\alpha\beta}}{2\beta} - \frac{3\alpha}{\beta}. \tag{83}$$

В табл. 2 даны значения для μ и C_0 уравнения (3), при которых точные решения уравнения Кортевега – де Вриза – Бюргерса с нелинейнымм источником выражаются через решения уравнения Риккати (72). В этом случае решение уравнения (3) находится по формуле:

$$y(z) = \frac{C}{6} - \frac{4\beta^2}{225} + \frac{k\beta}{15} + \frac{23\beta\mu}{450} - \frac{k^2}{6} - \frac{k\mu}{5} + \frac{\mu^2}{150} - \frac{2k}{15}(\beta - 15k - 3\mu)Q(z) - 2k^2Q^2, \tag{84}$$

где $Q(z)$ – логистическая функция (73), параметры μ, k и C_0 определяются формулами (78)–(83).

Точные решения уравнения (1) являются кинками разного вида и уединенными волнами с одной произвольной постоянной. Заметим, что эти решения зависят также от двух произвольных значений параметров α и β. Следовательно, уравнение (1) имеет уединенные волны при более широком классе значений параметров уравнения.

Таблица 2. Параметры уравнения (3), при которых точные решения выражаются через решения уравнения Риккати

n	μ	α	C_0	β	k
1	2β	α	$\frac{9\alpha^2}{4\beta^4} - \frac{2\beta^2}{3} - \frac{3\alpha}{\beta}$	β	$\frac{3\alpha}{2\beta^2}$
2	2β	α	$\frac{9\alpha^2}{4\beta^4} - \frac{2\beta^2}{3} - \frac{3\alpha}{\beta}$	β	$-\frac{3\alpha}{2\beta^2}$
3	$\frac{\beta}{3}$	α	$-\frac{3\alpha}{\beta}$	β	$\frac{\sqrt{3\alpha\beta}}{\beta}$
4	$\frac{\beta}{3}$	α	$-\frac{3\alpha}{\beta}$	β	$-\frac{\sqrt{3\alpha\beta}}{\beta}$
5	$\frac{\beta}{3}$	α	$-\frac{3\alpha}{\beta}$	β	$\frac{\sqrt{-3\alpha\beta}}{\beta}$
6	$\frac{\beta}{3}$	α	$-\frac{3\alpha}{\beta}$	β	$-\frac{\sqrt{-3\alpha\beta}}{\beta}$
7	$\frac{\beta}{3} \pm \frac{5\sqrt{2\alpha\beta}}{2\beta}$	α	$\frac{5\sqrt{2\alpha\beta}}{2\beta} - \frac{3\alpha}{\beta}$	β	$\frac{\sqrt{2\alpha\beta}}{2\beta}$
8	$\frac{\beta}{3} \pm \frac{5\sqrt{2\alpha\beta}}{2\beta}$	α	$-\frac{5\sqrt{2\alpha\beta}}{2\beta} - \frac{3\alpha}{\beta}$	β	$-\frac{\sqrt{2\alpha\beta}}{2\beta}$
9	$\frac{\beta}{3} \pm \frac{5\sqrt{-2\alpha\beta}}{2\beta}$	α	$\frac{5\sqrt{-2\alpha\beta}}{2\beta} - \frac{3\alpha}{\beta}$	β	$\frac{\sqrt{-2\alpha\beta}}{2\beta}$
10	$\frac{\beta}{3} \pm \frac{5\sqrt{-2\alpha\beta}}{2\beta}$	α	$-\frac{5\sqrt{-2\alpha\beta}}{2\beta} - \frac{3\alpha}{\beta}$	β	$-\frac{\sqrt{-2\alpha\beta}}{2\beta}$

Краткие выводы

В данной статье мы изучили уравнение Кортевега – де Вриза – Бюргерса с нелинейным источником. В общем случае задача Коши для этого уравнения не решается методом обратной задачи рассеяния. Однако, используя переменные бегущей волны, уравнение (1) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению. Мы применили тест Пенлеве, чтобы найти ограничения на параметры нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения, при которых уравнение проходит тест Пенлеве. Используя результаты теста Пенлеве, в статье получены два первых интеграла нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения. Используя один из первых интегралов, получено общее решение четырех уравнений в переменных бегущей волны. Эти решения выражаются через эллиптические функции Вейерштрасса, и трансценденты первого уравнения Пенлеве. Мы также использовали специальные методы для нахождения аналитических решений с одной и двумя произвольными постоянными. Мы представили точные решения с двумя произвольными постоянными, выраженными через логистическую функцию, являющуюся решением уравнения Риккати. Полученные результаты с помощью метода простейших уравнений демонстрируют, что исходное уравнение имеет решения в виде уединенных волн и кинков для более широких значений параметров, чем в случае существования общих решений.

Финансирование

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации и выполнена по теме государственного задания FSWU-2023-0031.

Конфликт интересов

Конфликт интересов отсутствует.

Список литературы

1. *Korteweg D.J., de Vries G.* On the Change of Form of Long Waves advancing in a Rectangular Canal and on a New Type of Long Stationary Wave // Philosophical Magazine Series 5, 1895. V. 39 (240). P. 422 – 443. DOI: 10.1080/14786449508620739.

2. *Russel J. S.* Report on Waves // Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science, York, September 1844 (London 1845). P. 311 – 390.

3. *Zabusky N.J., Kruskal M.D.* Interaction of «Solitons» in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Physical Review Letters, 1965. V. 15. Iss. 6. P. 240 – 243. DOI: 10.1103/PhysRevLett.15.240.

4. *Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M.* Method for solving the Korteweg-deVries equation // Physical Review Letters, 1967. V. 19. P. 1095–1097. DOI: 10.1103/PhysRevLett.19.1095.

5. *Kudryashov N.A.* Exact soliton solutions of the generalized evolution equation of wave dynamics // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1988. V. 52. Iss. 3. P. 361 – 365. DOI: 10.1016/0021-8928(88)90090-1.

6. *Kudryashov N.A.* On «new travelling wave solutions» of the KdV and the KdV-Burgers equations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2009. V. 14. Iss. 5. P. 1891 – 1900. DOI: 10.1016/j.cnsns.2008.09.020.

7. *Feng Zh., Wang X.* The first integral method to the two-dimensional Burgers-Korteweg-de Vries equation // Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics, 2003. V. 308. Iss. 2 – 3. P. 173 – 178. DOI: 10.1016/S0375-9601(03)00016-1.

8. *Feng Zh.* The first-integral method to study the Burgers – Korteweg – de Vries equation // Journal of Physics A: Mathematical and General, 2002. V. 35. Iss. 2. P. 343 – 349. DOI: 10.1088/0305-4470/35/2/312.

9. *Bona J.L.* Travelling-wave solutions to the Korteweg – de Vries – Burgers equation // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics, 1985. V. 101. Iss. 3 – 4. P. 207 – 226. DOI: 10.1017/S0308210500020783.

10. *Parkes E.J., Duffy B.R.* Travelling solitary wave solutions to a compound KdV – Burgers equation // Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics, 1997. V. 229. Iss. 4. P. 217 – 220. DOI: 10.1016/S0375-9601(97)00193-X.

11. *El-Ajou A., Arqub O. Abu, Momani Sh.* Approximate analytical solution of the nonlinear fractional KdV – Burgers equation: A new iterative algorithm // Journal of Computational Physics, 2015. V. 293. P. 81 – 95. DOI: 10.1016/j.jcp.2014.08.004.

12. *Parkes E.J.* Exact solutions to the two-dimensional Korteweg-de Vries-Burgers equation // Journal of Physics A: Mathematical and General, 1994. V. 27. Iss. 13. P. L497 – L501. DOI: 10.1088/0305-4470/27/13/006.

13. *Soliman A.A.* A numerical simulation and explicit solutions of KdV – Burgers' and Lax's seventh-order KdV equations // Chaos, Solitons and Fractals, 2006. V. 29. Iss. 2. P. 294 – 302. DOI: 10.1016/j.chaos.2005.08.054.

14. *Feng Zh.* On explicit exact solutions to the compound Burgers – KdV equation // Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics, 2002. V. 293. Iss. 1–2. P. 57–66. DOI: 10.1016/S0375-9601(01)00825-8.

15. *Kudryashov N.A.* On types of nonlinear nonintegrable equations with exact solution // Physics Letters A, 1991. V. 155. Iss. 4–5. P. 269–275. DOI: 10.1016/0375-9601(91)90481-M.

16. *Kudryashov N.A.* Logistic function as solution of many nonlinear differential equations // Applied Mathematical Modelling, 2015. V. 39. Iss. 18. P. 5733 – 5742. DOI: 10.1016/j.apm.2015.01.048.

17. *Kudryashov N.A.* Painleve analysis and exact solutions of the Korteweg-de Vries equation with a source // Applied Mathematics Letters, 2015. V. 41. P. 41 – 45. DOI: 10.1016/j.aml.2014.10.015.

18. *Fisher R.A.* The wave of adance of advantageous genes // Annals of *eugenics*, 1937. V. 7. P. 335 – 369.

19. *McCue S.W., El-Hachem M., Simpson M. J.* Exact sharp-fronted travelling wave solutions of the Fisher-KPP equation // Applied Mathematics Letters, 2021. V. 114. Article number: 106918. DOI: 10.1016/j.aml.2020.106918.

20. *Lu B.Q., Xiu B.Z., Pang Z.L., Jiang X.F.* Exact traveling wave solution of one class of nonlinear diffusion equations // Physics Letters A, 1993. V. 175(2). P. 113 – 115. DOI: 10.1016/0375-9601(93)90131-I.

21. *Kudryashov N.A.* Exact solutions of a family of Fisher equations. Theoretical and Mathematical Physics, 1993. V. 94. Iss. 2. P. 211 – 218. DOI: 10.1007/BF01019332.

22. *Aggarwal S.K.* Some numerical experiments on fisher equation // International Communications in Heat and Mass Transfer, 1985. V. 12. Iss. 4. P. 417 – 430. DOI: 10.1016/0735-1933(85)90036-3.

23. *Broadbridge P., Bradshaw-Hajek B.H.* Exact solutions for logistic reaction – diffusion equations in biology // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik, 2016. V. 67. № 4. P. 1–13. DOI: 10.1007/s00033-016-0686-3.

24. *Kudryashov N.A.* Exact solitary waves of the Fisher equation // Physics Letters, Section A: General Atomic and Solid State Physics, 2005. V. 342. № 1–2. P.99–106. DOI: 10.1016/j.physleta.2005.05.025.

25. *Ebadi Gh., Biswas A.* Application of the G′/G-expansion method for nonlinear diffusion equations with nonlinear source // Journal of the Franklin Institute, 2010. V. 347. № 7. P. 1391 – 1398. DOI: 10.1016/j.jfranklin.2010.05.013.

26. *Hayek M.* Exact and traveling-wave solutions for convection-diffusion-reaction equation with power-law nonlinearity // Applied Mathematics and Computation, 2011. V. 218. Iss. 6. P. 2407 – 2420. DOI: 10.1016/j.amc.2011.07.034.

27. *Petrovskii S., Shigesada N.* Some exact solutions of a generalized Fisher equation related to the problem of biological invasion // Mathematical Biosciences, 2001. V. 172. № 2. P. 73 – 94. DOI: 10.1016/S0025-5564(01)00068-2.

28. *Kowalevski S.* Sur le probleme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe //Acta Mathematica, 1889. V. 12. № 1. P. 177–232. DOI: 10.1007/BF02592182.

29. *Kowalevski S.* Sur une propriété du systém d' q′ uations différentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe // Acta Mathematica, 1890. V. 14. № 1. P. 81 – 93. DOI:10.1007/BF02413316.

30. *Ablowitz M.J., Ramani A., Segur H. A.* Connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. I // Journal of Mathematical Physics, 1979. V. 21. Iss. 4. P. 715 – 721. DOI: 10.1063/1.524491.

31. *Ablowitz M.J., Ramani A., Segur H.* Nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of painleve type // Lettere al Nuovo Cimento, 1978. V. 23. Iss. 9. P. 333–338. DOI: 10.1007/BF02824479.

32. *Ablowitz M.J., Ramani A.,Segur H.* A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. II // Journal of Mathematical Physics, 1979. V. 21. Iss. 5. P. 1006 – 1015. DOI: 10.1063/1.524548.

33. *Kudryashov N.A.* Painleve analysis of the Sasa–Satsuma equation // Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics, 2024. V. 525. DOI: 10.1016/j.physleta.2024.129900.

34. *Kudryashov N.A.* Painleve analysis of the resonant third-order nonlinear Schrödinger equation // Applied Mathematics Letters, 2024. V. 158. DOI: 10.1016/j.aml.2024.109232.

35. *Drazin P.G., Johnson R.S.* Solitons: An Introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 1989. 226 p.

36. *Ablowitz M.J., Clarkson P.A.* Solitons Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. Cambridge: Cambridge University Press, 1991. 516 p.

37. *Kudryashov N. A.* Mathematical model of propagation pulse in optical fiber with power nonlinearities // Optik, 2020. V. 212(4). DOI: 10.1016/j.ijleo.2020.164750.

38. *Kudryashov N. A.* Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations // Chaos, Solitons and Fractals, 2005. V. 24. № 5. P. 1217 – 1231. DOI: 10.1016/j.chaos.2004.09.109.

39. *Kudryashov N.A.* One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2012. V. 17. № 6. P. 2248 – 2253. DOI: 10.1016/j.cnsns.2011.10.016.

40. *Vitanov N.K., Dimitrova Z.I., Kantz H.* Modified method of simplest equation and its application to nonlinear PDEs // Applied Mathematics and Computation, 2010. V. 216. № 9. P. 2587 – 2595. DOI: 10.1016/j.amc.2010.03.102.

41. *Ahmed H.M., El-Sheikh M.M.A.,Arnous Ah. H., Rabie W.B.* Construction of the Soliton Solutions for the Manakov System by Extended Simplest Equation Method // International Journal of Applied and Computational Mathematics, 2021. V. 7(6). DOI: 10.1007/s40819-021-01183-3.

42. *Zayed E.M.E., Shohib R..M.A., Al-Nowehy A.-G.* On solving the (3+1)-dimensional NLEQZK equation and the (3+1)-dimensional NLmZK equation using the extended simplest equation method // Computers and Mathematics with Applications, 2019. V. 78. № 10. P. 3390 – 3407. DOI: 10.1016/j.camwa.2019.05.007.

43. *Vitanov N.K.* Modified method of simplest equation for obtaining exact solutions of nonlinear partial differential equations: History, recent developments of the methodology and studied classes of equations // Journal of Theoretical and Applied Mechanics (Bulgaria), 2019. V. 49. Iss. 2. P. 107–122.

44. *Vitanov N.K., Dimitrova Z.I.* Modified method of simplest equation applied to the nonlinear Schrodinger equation // Journal of Theoretical and Applied Mechanics (Bulgaria), 2018. V. 48. Iss. 1. P. 59–68. DOI: 10.2478/jtam-2018-0005.

45. *Zayed E.M.E., Shohib R.M.A.* Optical solitons and other solutions to Biswas–Arshed equation using the extended simplest equation method // Optik, 2019. V. 185. P. 626–635. DOI: 10.1016/j.ijleo.2019.03.112.

46. *Chen Ch., Jiang Y.-Lin.* Simplest equation method for some time-fractional partial differential equations with conformable derivative // Computers and Mathematics with Applications, 2018. V. 75. № 8. P. 2978–2988. DOI: 10.1016/j.camwa.2018.01.025.

47. *Biswas A., Mirzazadeh M.,Savescu M., Milovic D., Khan K. R., Mahmood M.F., Belic M.* Singular solitons in optical metamaterials by ansatz method and simplest equation approach // Journal of Modern Optics, 2014. V. 61. Iss. 19. P. 1550–1555. DOI: 10.1080/09500340.2014.944357.

48. *Vitanov N. K.* On modified method of simplest equation for obtaining exact and approximate solutions of nonlinear PDEs: The role of the simplest equation // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2011. V. 16. Iss. 11. P. 4215–4231. DOI: 10.1016/j.cnsns.2011.03.035.

49. *Antonova A.O., Kudryashov N.A.* Generalization of the simplest equation method for nonlinear non-autonomous differential equations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014. V. 19. Iss. 11. P. 4037–4041. DOI: 10.1016/j.cnsns.2014.03.035.

50. *Zayed E.M.E., Shohib R.M.A., Al-Nowehy A.l-Gh.* Solitons and other solutions for higher-order NLS equation and quantum ZK equation using the extended simplest equation method // Computers and Mathematics with Applications, 2018. V. 76. № 9. P. 2286–2303. DOI: 10.1016/j.camwa.2018.08.027.

51. *Khalique Ch. M.* Solutions of a generalized complexly coupled Korteweg-de Vries system using simplest equation method // Proceedings – 2014 International Conference on Computational Science and Computational Intelligence, CSCI 2014. P. 223–225. DOI: 10.1109/CSCI.2014.123.

52. *Kudryashov N.A., Loguinova N.B.* Extended simplest equation method for nonlinear differential equations // Applied Mathematics and Computation, 2008. V. 205. № 1. P. 396–402. DOI: 10.1016/j.amc.2008.08.019.

53. *Seadawy Aly R.,Yasmeen A., Raza N., Althobaiti S.* Novel solitary waves for fractional (2+1)-dimensional Heisenberg ferromagnetic model via new extendedgeneralized Kudryashov method // Physica Scripta, 2021. V. 96(12). DOI: 10.1088/1402-4896/ac30a4.

54. *Zayed E.M.E., El-Shater M., Arnous Ah.H., Yildirim Y., Hussein L., Jawad A.J.M., Veni S.S., Biswas A.* Quiescent optical solitons with Kudryashov's generalized quintuple-power law and nonlocal nonlinearity having nonlinear chromatic dispersion with generalized temporal evolution by enhanced direct algebraic method and sub-ODE approach // European Physical Journal Plus, 2024. V. 139 (10). DOI: 10.1140/epjp/s13360-024-05636-8.

55. *Zhou J., Ju L., Zhao Sh., Zhang Y.* Exact Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations Using the Extended Kudryashov Method and Some Properties // Symmetry, 2023. V. 15. Iss.12. DOI: 10.3390/sym15122122.

56. *Ekici M.* Exact Solutions to Some Nonlinear Time-Fractional Evolution Equations Using the Generalized Kudryashov Method in Mathematical Physics // Symmetry, 2023. V. 15. Iss. 10. Article id.1961. DOI: 10.3390/sym15101961.

57. *Arnous Ah., Biswas A.,Yildirim Y., Zhou Q., Liu W., Alshomrani A. S., Alshehri H.M.* Cubic–quartic optical soliton perturbation with complex Ginzburg – Landau equation by the enhanced Kudryashov's method // Chaos, Solitons and Fractals, 2022. V. 155. DOI: 10.1016/j.chaos.2021.111748.

58. *Rabie W. B., Ahmed H.M., Hashemi M. S., Mirzazadeh M., Bayram M.* Generating optical solitons in the extended (3 + 1)-dimensional nonlinear Kudryashov's equation using the extended F-expansion method // Optical and Quantum Electronics, 2024. V. 56 (5). DOI: 10.1007/s11082-024-06787-9.

59. *Cinar M.,Secer A., Ozisik M., Bayram M.* Optical soliton solutions of (1 + 1)-and (2 + 1)-dimensional generalized Sasa-Satsuma equations using new Kudryashov method // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 2023. V. 20(2). DOI: 10.1142/S0219887823500342.

60. *Ali Kh.K., Mehanna M.S., Abdel-Aty A.-H., Wazwaz A.-M.* New soliton solutions of Dual mode Sawada Kotera equation using a new form of modified Kudryashov method and the finite difference method, // Journal of Ocean Engineering and Science, 2024. V. 9. Iss. 3. P. 207–215. DOI: 10.1016/j.joes.2022.04.033.

61. *Ozisik M., Secer A., Bayram M.* On the investigation of chiral solitons via modified new Kudryashov method // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 2023. V. 20 (7). DOI: 10.1142/S0219887823501177.

62. *Zayed E.M.E., Gepreel Kh.A., Alngar M.E.M.* Addendum to Kudryashov's method for finding solitons in magneto-optics waveguides to cubic-quartic NLSE with Kudryashov's sextic power law of refractive index // Optik, 2021. V. 230. DOI: 10.1016/j.ijleo.2021.166311.

63. *Rabie W.B., Ahmed H.M.* Construction cubic-quartic solitons in optical metamaterials for the perturbed twin-core couplers with Kudryashov's sextic power law using extended F-expansion method // Chaos, Solitons and Fractals, 2022. V. 160. DOI: 10.1016/j.chaos.2022.112289.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2025, vol. 14, no. 4, pp. 298 – 317

The Korteweg – de Vries – Burgers equation: with nonlinear source, reduction, the Painlevé test, first integrals and analytical solutions

N. A. Kudryashov ✉

National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia
✉ NAKudryashov@mephi.ru

Received July 1, 2025; revised July 14, 2025; accepted July 22, 2025

The Korteweg – de Vries – Burgers equation with a nonlinear source is studied. The Cauchy problem for this equation cannot be solved by the inverse scattering transform in the general case. Therefore, the equation is considered taking into account the traveling wave variables. The Painlevé test is applied to the resulting nonlinear ordinary differential equation to investigate its integrability. It is shown that general solutions of the nonlinear ordinary differential equation are expressed via the Weierstrass elliptic function and the first Painlevé transcendents under certain parameter constraints. The relationship between the Painlevé test and special methods for finding exact solutions of nonlinear differential equations is discussed. Special methods are used to construct analytical solutions with one and two arbitrary constants. Exact solutions with two arbitrary constants expressed in terms of the Weierstrass elliptic function are obtained. Exact solutions with one arbitrary constant of the Korteweg-de Vries-Burgers equation with a nonlinear source are found using the logistic function method. It is demonstrated that the family of equations for which exact solutions are found is significantly expanded by the use of special methods.

Keywords: Korteweg – de Vries – Burgers equation with nonlinear source, Traveling wave solution, Weierstrass elliptic function, Riccati equation, Painlevé transcendent, Simplest equation method.

References

1. *Korteweg D.J., de Vries G.* On the Change of Form of Long Waves advancing in a Rectangular Canal and on a New Type of Long Stationary Wave. Philosophical Magazine Series 5, 1895. Vol. 39(240). Pp. 422 – 443, DOI: 10.1080/14786449508620739.

2. *Russel J.S.* Report on Waves. Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science, York, September 1844 (London 1845). Pp. 311 – 390.

3. *Zabusky N.J., Kruskal M.D.* Interaction of «Solitons» in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. Physical Review Letters, 1965. Vol. 15. Iss. 6. Pp. 240 – 243. DOI: 10.1103/PhysRevLett.15.240.

4. *Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M.* Method for solving the Korteweg – deVries equation. Physical Review Letters, 1967. Vol. 19. Pp. 1095 – 1097. DOI: 10.1103/PhysRevLett.19.1095.

5. *Kudryashov N.A*. Exact soliton solutions of the generalized evolution equation of wave dynamics. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1988. vol. 52. Iss. 3. Pp. 361 – 365. DOI: 10.1016/0021-8928(88)90090-1.

6. *Kudryashov N.A.* On «new travelling wave solutions» of the KdV and the KdV – Burgers equations. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2009. Vol. 14. Iss. 5. Pp. 1891–1900. DOI: 10.1016/j.cnsns.2008.09.020.

7. *Feng Zh., Wang X.* The first integral method to the two-dimensional Burgers – Korteweg – de Vries equation. Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics, 2003. Vol. 308, Iss. 2–3, Pp. 173 – 178. DOI: 10.1016/S0375-9601(03)00016-1.

8. *Feng Zh.* The first-integral method to study the Burgers – Korteweg – de Vries equation. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2002. Vol.35. Iss.2. Pp. 343 – 349. DOI: 10.1088/0305-4470/35/2/312.

9. *Bona J.L.* Travelling-wave solutions to the Korteweg – de Vries – Burgers equation. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics, 1985. Vol. 101. Iss. 3 – 4. Pp. 207 – 226. DOI: 10.1017/S0308210500020783.

10. *Parkes E.J., Duffy B.R.* Travelling solitary wave solutions to a compound KdV – Burgers equation. Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics, 1997. Vol. 229. Iss. 4. Pp. 217 – 220. DOI: 10.1016/S0375-9601(97)00193-X.

11. *El-Ajou A., Arqub O. Abu, Momani Sh.* Approximate analytical solution of the nonlinear fractional KdV – Burgers equation: A new iterative algorithm. Journal of Computational Physics, 2015. Vol. 293. Pp. 81 – 95. DOI: 10.1016/j.jcp.2014.08.004.

12. *Parkes E.J.* Exact solutions to the two-dimensional Korteweg – de Vries – Burgers equation. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1994. Vol. 27. Iss.13. Pp. L497 – L501. DOI: 10.1088/0305-4470/27/13/006.

13. *Soliman A.A.* A numerical simulation and explicit solutions of KdV – Burgers' and Lax's seventh-order KdV equations. Chaos, Solitons and Fractals, 2006. Vol.29. Iss. 2. Pp. 294 – 302, DOI: 10.1016/j.chaos.2005.08.054.

14. *Feng Zh.* On explicit exact solutions to the compound Burgers – KdV equation. Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics, 2002. Vol. 293. Iss. 1 – 2. Pp. 57 – 66. DOI: 10.1016/S0375-9601(01)00825-8.

15. *Kudryashov N.A.* On types of nonlinear nonintegrable equations with exact solution. Physics Letters A, 1991. Vol. 155. Iss. 4 – 5. Pp. 269 – 275. DOI:10.1016/0375-9601(91)90481-M.

16. *Kudryashov N.A.* Logistic function as solution of many nonlinear differential equations. Applied Mathematical Modelling, 2015. Vol. 39. Iss. 18. Pp. 5733 – 5742. DOI: 10.1016/j.apm.2015.01.048.

17. *Kudryashov N.A.* Painleve analysis and exact solutions of the Korteweg – de Vries equation with a source. Applied Mathematics Letters, 2015. Vol. 41. Pp. 41 – 45. DOI: 10.1016/j.aml.2014.10.015.

18. *Fisher R.A.* The wave of adance of advantageous genes. Annals of *eugenics*, 1937. Vol. 7. Pp. 335–369.

19. *McCue S.W., El-Hachem M., Simpson M. J.* Exact sharp-fronted travelling wave solutions of the Fisher-KPP equation. Applied Mathematics Letters, 2021. Vol. 114. Article number: 106918. DOI: 10.1016/j.aml.2020.106918.

20. *Lu B.Q., Xiu B.Z., Pang Z.L., Jiang X.F.* Exact traveling wave solution of one class of nonlinear diffusion equations. Physics Letters A, 1993. Vol.175(2). Pp. 113 – 115. DOI: 10.1016/0375-9601(93)90131-I.

21. *Kudryashov N.A.* Exact solutions of a family of Fisher equations. Theoretical and Mathematical Physics, 1993. Vol. 94. Iss. 2. Pp. 211 – 218. DOI: 10.1007/BF01019332.

22. *Aggarwal S.K.* Some numerical experiments on fisher equation. International Communications in Heat and Mass Transfer, 1985. Vol. 12. Iss. 4. Pp. 417 – 430. DOI: 10.1016/0735-1933(85)90036-3.

23. *Broadbridge P., Bradshaw-Hajek B.H.* Exact solutions for logistic reaction–diffusion equations in biology. Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik, 2016. Vol. 67. No. 4. Pp. 1 – 13. DOI: 10.1007/s00033-016-0686-3.

24. *Kudryashov N.A.* Exact solitary waves of the Fisher equation. Physics Letters, Section A: General Atomic and Solid State Physics, 2005. Vol. 342. No. 1–2. Pp. 99 – 106. DOI: 10.1016/j.physleta.2005.05.025.

25. *Ebadi Gh., Biswas A.* Application of the G′/G-expansion method for nonlinear diffusion equations with nonlinear source. Journal of the Franklin Institute, 2010. Vol. 347. No. 7. Pp. 1391 – 1398. DOI: 10.1016/j.jfranklin.2010.05.013.

26. *Hayek M.* Exact and traveling-wave solutions for convection-diffusion-reaction equation with power-law nonlinearity. Applied Mathematics and Computation, 2011. Vol. 218. Iss.6. Pp. 2407 – 2420. DOI: 10.1016/j.amc.2011.07.034.

27. *Petrovskii S., Shigesada N.* Some exact solutions of a generalized Fisher equation related to the problem of biological invasion. Mathematical Biosciences, 2001. Vol. 172. No. 2. Pp. 73 – 94. DOI: 10.1016/S0025-5564(01)00068-2.

28. *Kowalevski S.* Sur le probleme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. Acta Mathematica, 1889. Vol. 12. No. 1. Pp. 177–232. DOI: 10.1007/BF02592182.

29. *Kowalevski S.* Sur une propriété du systém d' q′ uations différentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. Acta Mathematica, 1890. Vol. 14. No. 1. Pp. 81 – 93. DOI: 10.1007/BF02413316.

30. *Ablowitz M.J., Ramani A., Segur H. A.* Connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. I. Journal of Mathematical Physics, 1979. Vol. 21. Iss. 4. Pp. 715 – 721. DOI: 10.1063/1.524491.

31. *Ablowitz M.J., Ramani A., Segur H.* Nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of painleve type. Lettere al Nuovo Cimento, 1978. Vol. 23. Iss. 9. Pp. 333 – 338. DOI: 10.1007/BF02824479.

32. *Ablowitz M.J., Ramani A.,Segur H.* A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. II. Journal of Mathematical Physics, 1979. Vol. 21. Iss. 5. Pp. 1006 – 1015. DOI: 10.1063/1.524548.

33. *Kudryashov N.A.* Painleve analysis of the Sasa–Satsuma equation. Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics, 2024. Vol. 525. DOI: 10.1016/j.physleta.2024.129900.

34. *Kudryashov N.A.* Painleve analysis of the resonant third-order nonlinear Schrödinger equation. Applied Mathematics Letters, 2024. Vol. 158. DOI: 10.1016/j.aml.2024.109232.

35. *Drazin P.G., Johnson R.S.* Solitons: An Introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 1989. 226 p.

36. *Ablowitz M.J., Clarkson P.A.* Solitons Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. Cambridge: Cambridge University Press, 1991. 516 p.

37. *Kudryashov N. A.* Mathematical model of propagation pulse in optical fiber with power nonlinearities. Optik, 2020. Vol. 212(4). DOI: 10.1016/j.ijleo.2020.164750.

38. *Kudryashov N. A.* Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations. Chaos, Solitons and Fractals, 2005. Vol. 24. No. 5. Pp. 1217 – 1231. DOI: 10.1016/j.chaos.2004.09.109.

39. *Kudryashov N.A.* One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2012. Vol. 17. No. 6. Pp. 2248 – 2253. DOI: 10.1016/j.cnsns.2011.10.016.

40. *Vitanov N.K., Dimitrova Z. I., Kantz H.* Modified method of simplest equation and its application to nonlinear PDEs. Applied Mathematics and Computation, 2010. Vol.216. No. 9. Pp. 2587 – 2595. DOI: 10.1016/j.amc.2010.03.102.

41. *Ahmed H.M., El-Sheikh M.M.A.,Arnous Ah. H., Rabie W.B.* Construction of the Soliton Solutions for the Manakov System by Extended Simplest Equation Method. International Journal of Applied and Computational Mathematics, 2021. Vol. 7(6). DOI: 10.1007/s40819-021-01183-3.

42. *Zayed E.M.E., Shohib R..M.A., Al-Nowehy A.-G.* On solving the (3+1)-dimensional NLEQZK equation and the (3+1)-dimensional NLmZK equation using the extended simplest equation method. Computers and Mathematics with Applications, 2019. Vol. 78. No. 10. Pp. 3390–3407. DOI: 10.1016/j.camwa.2019.05.007.

43. *Vitanov N.K.* Modified method of simplest equation for obtaining exact solutions of nonlinear partial differential equations: History, recent developments of the methodology and studied classes of equations. Journal of Theoretical and Applied Mechanics (Bulgaria), 2019. Vol. 49. Iss. 2. Pp. 107–122.

44. *Vitanov N.K., Dimitrova Z.I.* Modified method of simplest equation applied to the nonlinear Schrodinger equation. Journal of Theoretical and Applied Mechanics (Bulgaria), 2018. Vol. 48, Iss. 1. Pp. 59–68. DOI: 10.2478/jtam-2018-0005.

45. *Zayed E.M.E., Shohib R.M.A.* Optical solitons and other solutions to Biswas–Arshed equation using the extended simplest equation method. Optik, 2019. Vol. 185. Pp. 626–635. DOI: 10.1016/j.ijleo.2019.03.112.

46. *Chen Ch., Jiang Y.-Lin.* Simplest equation method for some time-fractional partial differential equations with conformable derivative. Computers and Mathematics with Applications, 2018. Vol. 75. No. 8. Pp. 2978–2988. DOI: 10.1016/j.camwa.2018.01.025.

47. *Biswas A., Mirzazadeh M.,Savescu M., Milovic D., Khan K. R., Mahmood M.F.,Belic M.* Singular solitons in optical metamaterials by ansatz method and simplest equation approach. Journal of Modern Optics, 2014. Vol. 61. Iss.19. Pp. 1550–1555. DOI: 10.1080/09500340.2014.944357.

48. *Vitanov N.K.* On modified method of simplest equation for obtaining exact and approximate solutions of nonlinear PDEs: The role of the simplest equation. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2011. Vol.16. Iss.11. Pp. 4215–4231. DOI: 10.1016/j.cnsns.2011.03.035.

49. *Antonova A.O., Kudryashov N. A.* Generalization of the simplest equation method for nonlinear non-autonomous differential equations. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014. Vol. 19. Iss. 11. Pp. 4037–4041. DOI: 10.1016/j.cnsns.2014.03.035.

50. *Zayed E.M.E., Shohib R.M.A., Al-Nowehy A.l-Gh.* Solitons and other solutions for higher-order NLS equation and quantum ZK equation using the extended simplest equation method. Computers and Mathematics with Applications, 2018. Vol. 76. No. 9. Pp. 2286–2303. DOI: 10.1016/j.camwa.2018.08.027.

51. *Khalique Ch.M.* Solutions of a generalized complexly coupled Korteweg-de Vries system using simplest equation method. Proceedings – 2014 International Conference on Computational Science and Computational Intelligence, CSCI 2014. Pp. 223–225. DOI: 10.1109/CSCI.2014.123.

52. *Kudryashov N.A., Loguinova N.B.* Extended simplest equation method for nonlinear differential equations. Applied Mathematics and Computation, 2008. Vol.205. No. 1. Pp. 396–402. DOI: 10.1016/j.amc.2008.08.019.

53. *Seadawy Aly R., Yasmeen A., Raza N., Althobaiti S.* Novel solitary waves for fractional (2+1)-dimensional Heisenberg ferromagnetic model via new extendedgeneralized Kudryashov method. Physica Scripta, 2021. Vol. 96(12). DOI: 10.1088/1402-4896/ac30a4.

54. *Zayed E.M.E., El-Shater M., Arnous Ah.H., Yildirim Y.,Hussein L., Jawad A.J.M., Veni S.S., Biswas A.* Quiescent optical solitons with Kudryashov's generalized quintuple-power law and nonlocal nonlinearity having nonlinear chromatic dispersion with generalized temporal evolution by enhanced direct algebraic method and sub-ODE approach. European Physical Journal Plus, 2024. Vol. 139 (10). DOI: 10.1140/epjp/s13360-024-05636-8.

55. *Zhou J., Ju L., Zhao Sh., Zhang Y.* Exact Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations Using the Extended Kudryashov Method and Some Properties. Symmetry, 2023. Vol. 15. Iss. 12. DOI: 10.3390/sym15122122.

56. *Ekici M.* Exact Solutions to Some Nonlinear Time-Fractional Evolution Equations Using the Generalized Kudryashov Method in Mathematical Physics. Symmetry, 2023. Vol. 15. Iss. 10. Article id. 1961. DOI: 10.3390/sym15101961.

57. *Arnous Ah., Biswas A.,Yildirim Y., Zhou Q., Liu W., Alshomrani A. S., Alshehri H.M.* Cubic–quartic optical soliton perturbation with complex Ginzburg – Landau equation by the enhanced Kudryashov's method. Chaos, Solitons and Fractals, 2022. Vol. 155. DOI: 10.1016/j.chaos.2021.111748.

58. *Rabie W.B., Ahmed H.M., Hashemi M.S., Mirzazadeh M., Bayram M.* Generating optical solitons in the extended (3 + 1)-dimensional nonlinear Kudryashov's equation using the extended F-expansion method. Optical and Quantum Electronics, 2024. Vol. 56 (5). DOI: 10.1007/s11082-024-06787-9.

59. *Cinar M.,Secer A., Ozisik M., Bayram M.* Optical soliton solutions of (1 + 1)-and (2 + 1)-dimensional generalized Sasa-Satsuma equations using new Kudryashov method. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 2023. Vol. 20(2). DOI: 10.1142/S0219887823500342.

60. *Ali Kh.K., Mehanna M.S., Abdel-Aty A.-H., Wazwaz A.-M.* New soliton solutions of Dual mode Sawada Kotera equation using a new form of modified Kudryashov method and the finite difference method. Journal of Ocean Engineering and Science, 2024. Vol. 9. Iss. 3. Pp. 207–215. DOI:10.1016/j.joes.2022.04.033.

61. *Ozisik, M., Secer A.,Bayram M.* On the investigation of chiral solitons via modified new Kudryashov method. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 2023. Vol. 20 (7). DOI: 10.1142/S0219887823501177.

62. *Zayed E.M.E., Gepreel Kh.A., Alngar M.E.M.* Addendum to Kudryashov's method for finding solitons in magneto-optics waveguides to cubic-quartic NLSE with Kudryashov's sextic power law of refractive index. Optik, 2021. Vol. 230. DOI: 10.1016/j.ijleo.2021.166311.

63. *Rabie W.B., Ahmed H.M.* Construction cubic-quartic solitons in optical metamaterials for the perturbed twin-core couplers with Kudryashov's sextic power law using extended F-expansion method. Chaos, Solitons and Fractals, 2022. Vol. 160. DOI: 10.1016/j.chaos.2022.112289.