

УДК 532.59:534.1

Аналитические свойства функции Грина уравнения линейных внутренних гравитационных волн в стратифицированных средах с модельными распределениями частоты плавучести

© 2025 г. В. В. Булатов

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия

В работе теоретически изучены аналитические свойства функции Грина уравнения внутренних гравитационных волн для двух модельных распределений плотности стратифицированной невязкой среды. В линейной постановке с помощью преобразования Фурье получены интегральные представления решений. Обсуждены вопросы выбора однозначной формы полученных аналитических решений. Построенные аналитические конструкции позволяют, используя операцию интегральной свертки, исследовать волновые поля, возбуждаемые произвольными нелокальными и нестационарными источниками возмущений в реальных природных стратифицированных средах. Полученные асимптотические результаты позволяют исследовать волновые возмущения, которые могут быть зарегистрированы с помощью радиолокационных и оптических систем, и несут информацию не только об источниках генерации, но и о характеристиках морской среды, что важно, в том числе для изучения реакции морской среды на различные гидродинамические возмущения и совершенствования методов дистанционного зондирования морской поверхности. Начальные и граничные условия для конкретных источников возмущений должны определяться из результатов прямого численного моделирования полной системы уравнений гидродинамики или из сугубо оценочных полуэмпирических соображений, позволяющих адекватно аппроксимировать реальные нелокальные источники возмущений некоторой системой модельных источников. Полученные аналитические решения дают возможность рассчитывать основные амплитудно-фазовые характеристики возбуждаемых дальних полей внутренних гравитационных волн при определенных режимах генерации, и, кроме того, качественно анализировать полученные решения, что важно для правильной постановки более сложных математических моделей волновой динамики реальных природных стратифицированных сред. Модельные решения позволяют в дальнейшем получить представления волновых полей с учетом реальной изменчивости и нестационарности таких сред.

Ключевые слова: линейные внутренние гравитационные волны, стратифицированная среда, функция Грина, интегральная свертка, метод Фурье.

Введение

Важным механизмом возбуждения полей внутренних гравитационных волн (ВГВ) в природных (океан, атмосфера Земли) и искусственных стратифицированных средах является их генерация источниками возмущений различной физической природы: природного (движущийся тайфун, ветровое волнение, обтекание неровностей рельефа океана, изменения полей плотности и течений, подветренные горы) и антропогенного (морские технологические конструкции, схлопывание области турбулентного перемешивания, подводные взрывы) характеров. Система уравнений гидродинамики, описывающая волновые возмущения стратифицированных сред в общем виде представляет достаточно сложную

✉ В.В. Булатов: internalwave@mail.ru

Поступила в редакцию: 21.09.2025

После доработки: 20.10.2025

Принята к публикации: 21.10.2025

EDN BHVPLV

математическую задачу как в плане доказательств теорем существования и единственности решений в соответствующих функциональных классах, так и с вычислительной точки зрения. Основные результаты решений задач о генерации ВГВ представляются в самой общей интегральной форме, и в этом случае полученные интегральные решения требуют разработки аналитических, численных и асимптотических методов их исследования, допускающих не только их качественный анализ, но и проведение экспресс-оценок получаемых решений [1–4].

Например, движущиеся атмосферные циклоны, оказывающие значительное влияние на общую циркуляцию Мирового океана и локальную температуру морской поверхности, являются источниками генерации интенсивных внутренних гравитационных волн. Волновые поля, возбуждаемые с помощью этого механизма, могут играть значительную роль в различных механизмах переноса энергии в толще океана, а также вертикальных и горизонтальных обменах импульсов и массы. Касательное напряжение ветра, создаваемое движущимися атмосферными возмущениями, формирует в Мировом океане структуры волновых шлейфов (следов): экспериментальное обнаружение таких устойчивых волновых образований является одним из впечатляющих достижений современной океанологии [5–8].

Взрывные извержения подводных вулканов также могут быть источниками интенсивных внутренних гравитационных волн в Мировом океане. Физика вулканического извержения достаточно сложна, однако можно выделить несколько механизмов интенсивной волновой генерации: землетрясения, инициированные вулканическим извержением; пирокластические потоки со склонов вулкана; обрушение кальдеры; подводные взрывы. Последние два механизма в определенной степени идентичны и проявляются в извержении конечной массы вещества и появлении большого газового пузыря, что приводит к искривлению водной поверхности и дает начало генерации ВГВ большой амплитуды. При этом из-за сжимаемости морской воды возникают сильные ударные волны, частично отражающиеся от водной поверхности, также ее деформируя. В настоящее время не существует общепринятой теоретической модели генерации ВГВ при извержении подводных вулканов, аналогичной достаточно развитой для волн цунами. Однако существуют различные параметрические и полуэмпирические модели волновой генерации. В рамках таких моделей определяющими параметрами являются масса извергнутого материала, высота подводного вулкана, а также время извержения. Наличие нескольких параметров позволяет лучше приблизить результаты расчетов данным наблюдений, при этом математические модели должны использоваться для описания дальнего поля, когда оно становится линейным, и не претендовать на описания волнового поля вблизи самого вулкана. Классические постановки линейных задач о генерации волн источником (как правило, точечным) массы, расположенным на определенной глубине, позволяют моделировать генерацию волн взрывным извержением вулкана. Механизмы генерации ВГВ при извержении подводных вулканов могут быть различны. Первый из них аналогичен генерации поверхностных волн цунами при взрыве и связан с искривлением поверхности раздела слоев разной плотности (изопикн). Второй механизм может быть обусловлен горячими гравитационными пирокластическими потоками со склона вулкана, играющими роль поршня в искривлении изопикн – именно этот механизм (правда, без подтверждения) обычно предлагается для интерпретации спутниковых наблюдений ВГВ во время извержения вулкана. Возможен и другой механизм генерации внутренних гравитационных волн при трансформации длинных поверхностных волн цунами на континентальном склоне, он аналогичен генерации ВГВ на шельфовом склоне при трансформации баротропного прилива взрывным извержением вулкана в рамках первого механизма, когда в результате коллапса кальдеры происходит искривление границы раздела слоев разной плотности [5–7, 9, 10].

Для детального описания широкого круга физических явлений, связанных с динамикой волновых возмущений неоднородных и нестационарных природных стратифицированных сред, необходимо исходить из достаточно развитых математических моделей. Трехмерность структуры природных стратифицированных сред также играет существенную роль, и в настоящее время нет возможности проведения масштабных вычислительных экспериментов по моделированию трехмерных океанических течений на больших временах с достаточной точностью. Однако в ряде случаев первоначальное качественное представление об изучаемом круге волновых явлений можно получить на основе более простых аналитических моделей. В этой связи необходимо отметить классические задачи гидродинамики о построении асимптотических решений, описывающих эволюцию волновых возмущений, возбуждаемых источниками различной природы в тяжелой жидкости. Модельные решения позволяют

в дальнейшем получить представления волновых полей с учетом изменчивости и нестационарности реальных природных стратифицированных сред (океан, атмосфера Земли). Также ряд результатов анализа модельных линейных задач, описывающих различные режимы возбуждения и распространения волновых возмущений, лежат в основе активно развивающейся в настоящее время нелинейной теории генерации волн экстремально большой амплитуды – волн-убийц [7, 11].

Внутренние гравитационные волны, существующие в океане вследствие стратификации его вод, являются принципиально двумерными, а во многих случаях и трехмерными, поэтому в вычислительном плане анализ двумерных и трехмерных нестационарных волновых движений является весьма сложной задачей. Разработан и получил широкое применение численный код MIT, решающий полные уравнения гидродинамики с учетом реального рельефа дна, вращения Земли и турбулентных процессов, разработанная в Массачусетсском технологическом институте (США) вместе со специалистами по численному моделированию океана остального мирового сообщества. Данная модель требует больших компьютерных ресурсов, оправданных только для решения ряда отдельных практических задач океанологии. Тем не менее, даже такие полные модели пока еще не учитывают, например, стабильной фоновой горизонтально-неоднородной стратификации морской воды. Для учета этого гидрофизического эффекта необходимо вводить внешние силы, эту неоднородность стратификации удерживающие, параметризация которых численно затруднительна [1–4, 12].

Существующие в настоящее время методы численного моделирования, в том числе с использованием суперкомпьютеров не всегда позволяют эффективно рассчитывать конкретные физические задачи волновой динамики океана и атмосферы с учетом их реальной изменчивости, так как ориентированы на решение достаточно общих задач, требуют большой вычислительной мощности, не всегда учитывают физическую специфику решаемых задач, что существенно ограничивает их практическую применимость, особенно при расчетах волновых полей в реальных природных средах. Кроме того, использование мощных численных алгоритмов требует верификации и сравнения с аналитическими решениями модельных задач [13–18].

Распространение диспергирующих ВГВ в стратифицированных средах имеет особенности, связанные с зависимостью скорости распространения от длины волны. Если в такой среде перемещается некоторый источник возмущения, то он создает вокруг себя волновую картину, основными особенностями которой являются линии постоянной фазы, поэтому структура волновых картин на больших расстояниях от движущегося источника (много больших его размеров) практически не зависит от его формы и определяется в основном законом дисперсии и скоростью источника [1, 19–21].

Общие решения системы уравнений гидродинамики, описывающих генерацию ВГВ, можно получить только в самой общей интегральной форме или численно. При численных расчетах океан, как правило, представляют упрощенной гидродинамической системой с модельным распределением плотности. Интегральные представления решений требуют разработки асимптотических методов их исследования, допускающих качественный анализ и проведение экспресс-оценок получаемых решений при натурных измерениях внутренних волн в океане. Современные подходы к описанию линейных ВГВ основаны на представлении волновых полей интегралами Фурье и на анализе их асимптотик, а также на геометрическом построении в рамках кинематической теории диспергирующих волн [1–4, 15, 19]. На основе кинематической теории удастся сформулировать аналитические представления только для фазовых поверхностей волновых полей ВГВ. Поэтому в современных научных исследованиях при анализе волновых явлений в реальных стратифицированных средах (океан, атмосфера Земли) широко применяются упрощенные асимптотические и аналитические модели [9, 10, 18, 20, 21]. Целью настоящей работы является исследование аналитических свойств функции Грина уравнения линейных внутренних гравитационных волн для двух модельных распределений плотности среды.

Функция Грина для экспоненциально стратифицированной среды

Малые возмущения гидростатического равновесного основного состояния несжимаемой идеальной стратифицированной среды с экспоненциальным распределением невозмущенной

плотности по глубине $\rho_0(z) = \exp\left(\frac{N^2 z}{g}\right)$ (N – частота плавучести, или частота Брента – Вэй-

ся, g – ускорение свободного падения), вызванные источниками массы $m(x, y, t)\rho_0(z)$, $q(x, y, z, t)$ и силы $f(x, y, z, t) = (f_h(x, y, z, t), f_z(x, y, z, t))$, в приближении Буссинеска определяются из соотношений [1, 20, 21]

$$\begin{aligned} L \frac{\partial \rho_0 \mathbf{v}_h}{\partial t} &= \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} \left(\frac{\partial \mathbf{F}_h}{\partial z} - g \nabla q \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + N^2 \right) \left(\nabla \frac{\partial m \rho_0}{\partial t} \right) - [\nabla [\nabla \mathbf{f}_h]]; \\ L \rho_0 w &= -\nabla \frac{\partial \mathbf{F}_h}{\partial t} + g \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^3 m \rho_0}{\partial z \partial t^2}; \\ L \rho &= \frac{N^2}{g} \nabla \mathbf{F}_h + \frac{\partial}{\partial t} \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) q - \frac{N^2}{g} \frac{\partial m \rho_0}{\partial z} \right); \\ L p &= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + N^2 \right) \left(\nabla \mathbf{f}_h - \frac{\partial m \rho_0}{\partial t} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} \left(\frac{\partial f_z}{\partial z} + g q \right); \\ L &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + N^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right), \quad \mathbf{F}_h = \frac{\partial \mathbf{f}_h}{\partial z} - \nabla f_z, \quad \mathbf{v}_h = (v_x, v_y), \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где ρ и p – малые возмущения плотности и давления соответственно, $\mathbf{U} = (v_x, v_y, w)$ – компоненты малых возмущений скорости поля внутренних гравитационных волн. Для определения особенностей волновых возмущений, связанных с конкретным видом источников удобно использовать представления решений системы (1) с помощью математического аппарата функции Грина [1, 22]. Действительно, каждое из возмущений в системе уравнений (1) можно представить в виде интегральной свертки правой части соответствующего уравнения со скалярной функцией Грина G , определяемой из соотношения:

$$LG(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r})\delta(t), \quad G(\mathbf{r}, t) \equiv 0, \quad t < 0.$$

Для представления решения задачи о генерации полей внутренних гравитационных волн некоторыми заданными распределениями источников $Q(\mathbf{r}, t)$: $L\Psi(\mathbf{r}, t) = Q(\mathbf{r}, t)$ должны быть выполнены определенные условия излучения, описывающие только физически реализуемые режимы волновой генерации. В терминах представления Фурье можно получить следующее представление решений

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = G(\mathbf{r}, t) * Q(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int \frac{Q_0(\mathbf{k}, \omega)}{D(\mathbf{k}, \omega + i\varepsilon)} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t) d^n \mathbf{k} d\omega,$$

где дисперсионное уравнение основной вертикальной спектральной задачи внутренних гравитационных волн $D(\mathbf{k}, \omega) = 0$ имеет простые вещественные корни $\omega = \omega_j(\mathbf{k})$, $Q_0(\mathbf{k}, \omega)$ – фурье образ заданного распределения источников возмущений $Q(\mathbf{r}, t)$, $n = 3$ в трехмерном случае, $n = 2$ в плоском случае, $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ – волновой вектор. Тогда свойство причинности (однозначности выбора решения) для определения физически реализуемого режима возбуждения волнового поля находит свое отражение в сдвиге особых точек $\omega = \omega_j(\mathbf{k})$, связанных с решениями дисперсионного уравнения $D(\mathbf{k}, \omega) = 0$ [1, 20, 21]. В этом случае необходимо при интегрировании по переменной ω сдвинуть контур интегрирования на малую положительную величину $\varepsilon > 0$. Из разложений

$$\begin{aligned} D(\mathbf{k}, \omega + i\varepsilon) &\approx D(\mathbf{k}, \omega) + i\varepsilon \frac{\partial D(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega}, \\ D(\mathbf{k} + i\gamma \mathbf{l}, \omega) &\approx D(\mathbf{k}, \omega) + i\gamma \mathbf{l} \nabla_{\mathbf{k}} D(\mathbf{k}, \omega), \quad |\mathbf{l}| = 1, \quad \nabla_{\mathbf{k}} = \left(\frac{\partial}{\partial k_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial k_n} \right) \end{aligned}$$

следует, что такой результат можно также получить сдвигом волнового вектора $\mathbf{k}$ на малый вектор $i\gamma\mathbf{l}$, если выполнены условия: $\varepsilon = \gamma\mathbf{l}\mathbf{c}$, $\mathbf{c} = \nabla_{\mathbf{k}}\omega = -\nabla_{\mathbf{k}}D(\mathbf{k}, \omega)\left(\frac{\partial D(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega}\right)^{-1}$, где $\mathbf{c}$ – вектор групповой скорости распространения внутренних гравитационных волн. Таким образом, выбрав некоторое направление $\mathbf{l}$ в координатном пространстве $\mathbf{r} = r_l\mathbf{l} + \mathbf{r}_p$, $\mathbf{k} = k_l\mathbf{l} + \mathbf{k}_p$, выражение можно представить в виде

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int \exp(i\mathbf{k}_p \mathbf{r}_p) d^{n-1} \mathbf{k} d\omega \int \frac{Q_0(\mathbf{k}, \omega)}{D\left(\mathbf{k}_p, k_l - i\frac{\varepsilon}{\mathbf{l}\mathbf{c}}, \omega\right)} \exp(ik_l r_l - i\omega t) dk_l.$$

Интеграл по переменной k_l при условии $(\mathbf{l}\mathbf{r})(\mathbf{l}\mathbf{c}) > 0$ сводится к сумме вычетов, определяемых нулями функции $D(\mathbf{k}, \omega)$, при этом функция $Q_0(\mathbf{k}, \omega)$ предполагается аналитической [1, 20, 21]. При $(\mathbf{l}\mathbf{r})(\mathbf{l}\mathbf{c}) < 0$ интеграл по переменной k_l равен нулю, что показывается соответствующей деформацией контура интегрирования в полуокружность большого диаметра. Таким образом, решение разлагается по плоским и затухающим в направлении $\mathbf{l}$ волновым пакетам. Для частного случая $\mathbf{l} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ можно получить

неравенство $(\mathbf{l}\mathbf{r})(\mathbf{l}\mathbf{c}) = \mathbf{r}\mathbf{c} > 0$, которое означает, что полученное решение является разложением по плоским волнам с положительной проекцией групповой скорости на направление наблюдения. Принимая во внимание параллельность векторов групповой скорости и потока энергии, можно заключить, что при использовании функции Грина для решения задач излучения волн всегда будет выполняться принцип отвода энергии от источника возмущений (принцип Мандельштама) [1, 22]. В случае внутренних гравитационных волн в экспоненциально стратифицированной среде проекции фазовой и групповой скорости на вертикальное направление имеют противоположные знаки, а на горизонтальные направления – одинаковые.

Каждое из возмущений в системе (1) можно представить в виде интегральной свертки правой части соответствующего уравнения с одной и той же скалярной функцией $G(\mathbf{r}, t)$ [1, 20, 21]. Ограничиваясь равномерно движущимися источниками массы $m(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{V}t)$ единичной интенсивности для возмущения давления p плотности ρ скорости, можно получить

$$p(\mathbf{R}) = -\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + N^2\right) \frac{\partial G^*(\mathbf{R})}{\partial t}, \quad \rho(\mathbf{R}) = -\frac{N^2}{g} \frac{\partial^2 G^*(\mathbf{R})}{\partial t \partial z},$$

$$U = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla_3 + N^2 \nabla\right) G^*(\mathbf{R}), \quad G^*(\mathbf{R}) = \int G(\mathbf{R} - \mathbf{V}\tau, -\tau) d\tau,$$

$$\nabla_3 = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{V}t,$$

где функция $G^*(\mathbf{R})$ удовлетворяет уравнению: $LG^*(\mathbf{R}) = \delta(\mathbf{R})$.

В средах без дисперсии $\left(L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2}\right)$ эта функция известна как потенциал Лиенара – Вихтера [1, 22].

В линейном приближении возмущения, которые вызываются иными источниками массы $M(\mathbf{R})$, можно найти, используя интегральную свертку с возмущениями точечного источника: $p(\mathbf{R}) * M(\mathbf{R})$, $\rho(\mathbf{R}) * M(\mathbf{R})$, $U(\mathbf{R}) * M(\mathbf{R})$. Очевидно, что в системе координат, движущейся вместе с источником возмущений, волновая картина является стационарной. Знание поля давления позволяет рассчитать полную энергию излучения внутренних гравитационных волн. В частности, для равномерно движущегося источника в

жидкости без диссипации поток энергии волн, излучаемых в окружающую источник среду, совпадает с полными потерями энергии [1–4].

Используя преобразования Фурье, можно получить следующие представления

$$G^*(\mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \exp(i\mathbf{k}\mathbf{R}) G(\mathbf{k}, \omega) \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{V}) d^n \mathbf{k} d\omega = \frac{1}{2\pi|\mathbf{V}|} \int G\left(\frac{\omega}{|\mathbf{V}|}, \mathbf{r}_2, \omega\right) \exp\left(i\frac{\omega \mathbf{r}_1}{|\mathbf{V}|}\right) d\omega,$$

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\mathbf{R}\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{\mathbf{V}\mathbf{r}_1}{|\mathbf{V}|}.$$

Для горизонтально движущегося вдоль оси Ox локализованного источника можно получить [1, 20, 21]

$$\frac{\partial}{\partial t} G^*(\mathbf{R}) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{V}|} \operatorname{Re} \int_0^\infty \exp(i\omega\xi) \frac{H_0^{(2)}\left(-i\frac{N|\mathbf{r}_2|}{|\mathbf{V}|} \sqrt{\omega^2 - z^2|\mathbf{r}_2|^{-2}}\right)}{\sqrt{\omega^2 - 1}} d\omega, \quad (2)$$

где $\xi = \frac{Nx}{|\mathbf{V}|} - Nt$, $H_0^{(2)}$ – функция Ханкеля [23, 24]. Выражение (2) можно представить в виде

$$2\pi^2|\mathbf{V}| \frac{\partial}{\partial t} G^*(\mathbf{R}) = \int_1^\infty \frac{\sin(i\omega\xi)}{\sqrt{\omega^2 - 1}} K_0\left(\frac{N|\mathbf{r}_2|}{|\mathbf{V}|} \sqrt{\omega^2 - z^2|\mathbf{r}_2|^{-2}}\right) d\omega - \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{z}{|\mathbf{r}_2|}} \frac{\sin(i\omega\xi)}{\sqrt{\omega^2 - 1}} J_0\left(\frac{N|\mathbf{r}_2|}{|\mathbf{V}|} \sqrt{\omega^2 - z^2|\mathbf{r}_2|^{-2}}\right) d\omega +$$

$$+ \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{z}{|\mathbf{r}_2|}} \frac{\cos(i\omega\xi)}{\sqrt{\omega^2 - 1}} N_0\left(\frac{N|\mathbf{r}_2|}{|\mathbf{V}|} \sqrt{\omega^2 - z^2|\mathbf{r}_2|^{-2}}\right) d\omega - \int_{\frac{z}{|\mathbf{r}_2|}}^1 \frac{\cos(i\omega\xi)}{\sqrt{\omega^2 - 1}} K_0\left(\frac{N|\mathbf{r}_2|}{|\mathbf{V}|} \sqrt{\omega^2 - z^2|\mathbf{r}_2|^{-2}}\right) d\omega, \quad (3)$$

где первые два слагаемых отвечают вкладу мнимой части функции Грина, остальные слагаемые отвечают вещественной части функции Грина, J_0 , K_0 , N_0 – функции Бесселя, МакДональда и Неймана соответственно [23, 24].

Для горизонтальной и вертикальной плоскостей, проходящих через ось движущегося источника возмущений, интегральные представления (3) можно представить в виде

$$-2\pi^2|\mathbf{V}| \frac{\partial}{\partial t} G^*(\mathbf{R}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} K_0(|y|\cos\tau) \cos(\xi\cos\tau) d\tau - \int_0^\infty K_0(|y|\operatorname{ch}\tau) \sin(\xi\operatorname{ch}\tau) d\tau, \quad \text{при } z = 0$$

$$-4\pi|\mathbf{V}| \frac{\partial}{\partial t} G^*(\mathbf{R}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0(|z|\sin\tau) \cos(\xi\cos\tau) d\tau - \int_0^{\frac{\pi}{2}} N_0(|z|\sin\tau) \cos(\xi\cos\tau) d\tau -$$

$$- \frac{2}{\pi} \int_0^\infty K_0(|z|\operatorname{sh}\tau) \sin(\xi\operatorname{ch}\tau) d\tau, \quad \text{при } y = 0.$$

Функция Грина для двухслойной среды

Если идеальные жидкости с различными плотностями $\rho = \rho_{1,2}$ разделены горизонтальной плоскостью $z = 0$, тогда функция Грина определяется из соотношений [1, 20, 21]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) G(x, y, z, z_0, t) = \delta(t) \delta(x) \delta(y) \delta(z - z_0),$$

$$G(x, y, z, z_0, t) = 0, \text{ при } t < 0,$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} G(x, y, z, z_0, t) \right] = 0, \text{ при } z = 0,$$

$$\left[\rho \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - g \frac{\partial}{\partial z} \right) G(x, y, z, z_0, t) \right] = 0, \text{ при } z = 0,$$

$$|\nabla_3 G(x, y, z, z_0, t)| \rightarrow 0, \text{ при } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty,$$

$$[f] = f_+ - f_-, \quad f_{\pm} = f(x, y, \pm 0, t),$$

где z_0 – глубина погружения точечного источника возмущений. Применив преобразование Фурье по горизонтальным координатам x, y и времени, можно получить для нахождения Фурье-образа функции Грина $G^*(\mathbf{k}, z, z_0, \omega)$ следующие уравнения

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - |\mathbf{k}|^2 \right) G^*(\mathbf{k}, z, z_0, \omega) &= \delta(z - z_0), \\ \left[\frac{\partial}{\partial z} G^*(\mathbf{k}, z, z_0, \omega) \right] &= 0, \quad \text{при } z = 0, \\ \left[\rho \frac{\omega^2}{g} G^*(\mathbf{k}, z, z_0, \omega) + \rho \frac{\partial}{\partial z} G^*(\mathbf{k}, z, z_0, \omega) \right] &= 0, \quad \text{при } z = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Решение выражения (4) с учетом ограниченности при $z \rightarrow \pm\infty$ имеет вид

$$\begin{aligned} G^*(\mathbf{k}, z, z_0, \omega) &= \frac{\gamma \text{sign } z}{2|\mathbf{k}|} \exp(-|\mathbf{k}|(|z| + |z_0|)) - \frac{1}{2|\mathbf{k}|} \exp(-|\mathbf{k}||z - z_0|) + \\ &+ \frac{\text{sign}(\gamma + \text{sign } z_0)}{2} \frac{\exp(-|\mathbf{k}|(|z| + |z_0|))}{\frac{\omega^2}{\gamma g} - |\mathbf{k}|}, \end{aligned}$$

где $z > 0$ и $\rho = \rho_2$ соответствует нижнему полупространству, $\gamma = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$. Можно отметить, что $G^*(\mathbf{k}, z, z_0, \omega) = G^*(\mathbf{k}, z_0, z, \omega)$, если $zz_0 > 0$. Тогда, выполнив обратное преобразование Фурье, можно получить

$$G(x, y, z, z_0, t) = \delta(t) \left(-\frac{1}{4\pi R_-} + \frac{\gamma \operatorname{sign} z}{4\pi R_+} \right) + \Theta(t) D(x, y, z, z_0, t) D(x, y, z, z_0, t) =$$

$$= -\frac{\operatorname{sign} z}{2\pi \gamma g} (\gamma + \operatorname{sign} z_0) \int_0^\infty \omega^2 \sin(\omega t) \exp\left(-\frac{\omega^2}{\gamma g} (|z| + |z_0|)\right) J_0\left(\frac{\omega^2 \sqrt{x^2 + y^2}}{\gamma g}\right) d\omega,$$

где $\Theta(t) = 0, t < 0, \Theta(t) = 1, t \geq 0, R_\pm = \sqrt{x^2 + y^2 + (z \pm z_0)^2}$.

Заключение

Таким образом, в настоящей работе показано, что аналитические представления функции Грина уравнения линейных внутренних гравитационных волн для модельных распределений плотности описываются сравнительно простыми аналитическими выражениями. В дальнейшем для решения ряда важных практических задач и приложений, используя операцию свертки, можно рассчитать волновые возмущения, возбуждаемые распределенными в пространстве нелокальными и нестационарными источниками возмущений. Полученные асимптотические результаты позволяют исследовать волновые возмущения, которые могут быть зарегистрированы с помощью радиолокационных и оптических систем, и несут информацию не только об источниках генерации, но и о характеристиках морской среды, что важно, в том числе для изучения реакции морской среды на различные гидродинамические возмущения и совершенствования методов дистанционного зондирования морской поверхности.

Начальные и граничные условия для конкретных источников возмущений должны определяться из результатов прямого численного моделирования полной системы уравнений гидродинамики или из сугубо оценочных полуэмпирических соображений, позволяющих адекватно аппроксимировать реальные нелокальные источники возмущений некоторой системой модельных источников. Полученные аналитические решения дают возможность рассчитывать основные амплитудно-фазовые характеристики возбуждаемых дальних полей ВГВ при определенных режимах генерации, и, кроме того, качественно анализировать полученные решения, что важно для правильной постановки более сложных математических моделей волновой динамики реальных природных стратифицированных сред (океан, атмосфера Земли). Модельные решения позволяют в дальнейшем получить представления волновых полей с учетом реальной изменчивости и нестационарности этих сред.

Как правило, физика гидродинамических явлений, описывающих генерацию ВГВ в реальных стратифицированных средах, достаточно сложна, и волновое поле вблизи источников не может быть описано в рамках линейной теории. Однако возможно сформулировать определенные начальные и граничные условия для решения гидродинамических задач в линейном приближении, и исследовать волновое поле в дальней зоне, при этом такие условия могут определяться из результатов прямого численного моделирования ближнего поля с учетом нелинейных уравнений гидродинамики, или из сугубо оценочных (полуэмпирических) соображений. Для проведения оценочных расчетов необходимо подбирать параметры использованной модели источника так, чтобы приблизить смоделированные волновые системы к реально наблюдаемым волновым картинам. Таким образом, математические модели волновой генерации могут быть не только верифицированы, но и использованы для проведения прогнозных оценок, так как в этих заданных априори модельных условиях заложено много реальной информации, на основе которой линейная теория вдали от нелокальных источников возмущений может давать удовлетворительные результаты. Поэтому, используя модельные представления для описания нелокальных источников различной физической природы, дальние поля внутренних гравитационных волн можно описать сравнительно простыми аналитическими формулами.

Финансирование

Работа выполнена в рамках государственного задания № FFGN-2024-0005.

Конфликт интересов

Конфликт интересов отсутствует.

Список литературы

1. Булатов В.В., Владимиров И.Ю. Динамика поверхностных и внутренних гравитационных волн в гидрофизических средах. М.: Физматлит, 2025. 320 с.
2. Ozsoy E. Geophysical fluid dynamics II. Stratified rotating fluid dynamics of the atmosphere-ocean. Springer Textbook in Earth Sciences. Geography and Environment. Switzerland AG Cham: Springer Nature, 2021. 323 p.
3. Pedlosky J. Waves in the ocean and atmosphere: introduction to wave dynamics. Berlin-Heidelberg: Springer, 2010. 260 p.
4. Sutherland B.R. Internal gravity waves. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 394 p.
5. Morozov E.G. Oceanic internal tides. Observations, analysis and modeling. Berlin: Springer, 2018. 317 p.
6. Morozov E.G., Tarakanov R.Yu., Frey D.I. Bottom gravity currents and overflow in deep channels of the Atlantic ocean. Springer Nature Switzerland AG, 2021. 483 p.
7. Velarde M. G., Tarakanov R.Yu., Marchenko A.V. (Eds.). The ocean in motion. Springer Oceanography. Springer International Publishing AG, 2018. 625 p.
8. Voelker G.S., Myers P.G., Walter M., Sutherland B.R. Generation of oceanic internal gravity waves by a cyclonic surface stress disturbance // Dynamics of Atmospheres and Oceans, 2019. V. 86. P. 116–133
9. Talipova T., Pelinovsky E., Didenkulova E. Internal tsunami waves in a stratified ocean induced by explosive volcano eruption: a parametric source // Physics Fluids, 2024. V. 36. P.042110.
10. Talipova T., Pelinovsky E., Didenkulova E. Internal waves generated by explosive eruptions of underwater volcanoes and their effect on the sea surface // Natural Hazards, 2025. V. 121. P. 661–675.
11. Kharif C., Pelinovsky E., Shunyaev A. Rogue waves in the ocean. Berlin: Springer, 2009. 260 p.
12. Adcroft A., Campin J.-M. MITgsm user manual. Cambridge: MIT, 2011. 455 p.
13. Chai J., Wang Z., Yang Z., Wang Z. Investigation of internal wave wakes generated by a submerged body in a stratified flow // Ocean Engineering, 2022. V. 266. P. 112840.
14. Wang J., Wang, S., Chen X., Wang W., Xu Y. Three-dimensional evolution of internal waves rejected from a submarine seamount // Physics Fluids, 2017. V. 29. P. 106601.
15. Gnevyshev V., Badulin S. Wave patterns of gravity-capillary waves from moving localized sources // Fluids, 2020. V. 5. P. 219.
16. Gervais A.D., Swaters G.E., Sutherland B.R. Transmission and reflection of three-dimensional Boussinesq internal gravity wave packets in nonuniform retrograde shear flow // Physical Review Fluids, 2022. V. 7. P. 114802.
17. Meunier P., Dizus S., Redekopp L., Spedding G. Internal waves generated by a stratified wake: experiment and theory // Journal of Fluid Mechanics, 2018. V. 846. P. 752–788
18. Broutman D., Brandt L., Rottman J., Taylor C. A WKB derivation for internal waves generated by a horizontally moving body in a thermocline // Wave Motion, 2021. V. 105. P. 102759.
19. Булатов В.В., Владимиров И.Ю. Аналитические свойства дисперсионных соотношений уравнения внутренних гравитационных волн с модельными и произвольными распределениями частоты плавучести // Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», 2023. Т. 12. № 1. С. 3–8.
20. Bulatov V.V. Internal gravity waves excited by motionless perturbation sources // Fluid Dynamics, 2023. V. 58. Suppl. 2. P. S240–S252.
21. Bulatov V.V. Asymptotics of far fields of internal gravity waves caused by localized sources in an infinite deep stratified medium // Fluid Dynamics, 2023. V. 58. Suppl. 2. P. S263–273.
22. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Том 7. Теория поля. М.: Наука, 1988. 512 с.
23. Абрамович М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 832 с.
24. Никифоров А.Ф., Уваров В.В. Специальные функции математической физики. М.: ИД Интеллект, 2008. 344 с.

Analytical properties of the Green's function of the equation of linear internal gravity waves in stratified media with model distributions of buoyancy frequency

V. V. Bulatov 

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, 119526, Russia

 internalwave@mail.ru

Received September 21, 2025; revised October 20, 2025; accepted October 21, 2025

This paper presents a theoretical study of the analytical properties of the Green's function for the internal gravity wave equation for two model density distributions of a stratified, inviscid medium. Integral representations of the solutions are obtained in a linear formulation using the Fourier transform. The selection of a single-valued form for the resulting analytical solutions is discussed. The resulting analytical constructs, using integral convolution, enable the study of wave fields generated by arbitrary nonlocal and nonstationary disturbance sources in real natural stratified media. The obtained asymptotic results enable the investigation of wave disturbances that can be recorded using radar and optical systems. They provide information not only about the sources of generation but also about the characteristics of the marine environment. This is important, among other things, for studying the response of the marine environment to various hydrodynamic disturbances and improving methods for remote sensing of the sea surface. Initial and boundary conditions for specific disturbance sources should be determined from the results of direct numerical modeling of the complete system of hydrodynamic equations or from purely evaluative semi-empirical considerations, allowing for the adequate approximation of real non-local disturbance sources by a certain system of model sources. The resulting analytical solutions enable the calculation of the fundamental amplitude-phase characteristics of the excited far fields of internal gravity waves under certain generation conditions, and, furthermore, the qualitative analysis of the resulting solutions, which is important for the correct formulation of more complex mathematical models of the wave dynamics of real natural stratified media. These model solutions subsequently enable the derivation of representations of wave fields taking into account the actual variability and non-stationarity of such media.

Key words: linear internal gravity waves, stratified medium, Green's function, integral convolution, Fourier method.

References

1. *Bulatov V.V., Vladimirov I.Yu.* Dinamika poverhnostnih i vnutrennih gravitacionnih voln v gidrofizicheskikh sredah [Dynamics of surface and internal gravity waves in hydrophysical media]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2025. 320 p. (in Russian).
2. *Morozov E.G.* Oceanic internal tides. Observations, analysis and modeling. Berlin, Springer, 2018. 317 p.
3. *Morozov E.G., Tarakanov R.Yu., Frey D.I.* Bottom gravity currents and overflow in deep channels of the Atlantic ocean. Springer Nature Switzerland AG, 2021. 483 p.
4. *Ozsoy E.* Geophysical fluid dynamics II. Stratified rotating fluid dynamics of the atmosphere-ocean. Springer Textbook in Earth Sciences. Geography and Environment. Switzerland AG Cham, Springer Nature, 2021. 323 p.
5. *Pedlosky J.* Waves in the ocean and atmosphere: introduction to wave dynamics. Berlin-Heidelberg, Springer, 2010. 260 p.
6. *Sutherland B.R.* Internal gravity waves. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 394 p.
7. *Velarde M.G., Tarakanov R.Yu., Marchenko A.V. (Eds.)*. The ocean in motion. Springer Oceanography. Springer International Publishing AG, 2018. 625 p.

8. Voelker G.S., Myers P.G., Walter M., Sutherland B.R. Generation of oceanic internal gravity waves by a cyclonic surface stress disturbance. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, 2019. Vol. 86. Pp. 116–133.
9. Talipova T., Pelinovsky E., Didenkulova E. Internal tsunami waves in a stratified ocean induced by explosive volcano eruption: a parametric source. *Physics Fluids*, 2024. Vol. 36. P. 042110.
10. Talipova T., Pelinovsky E., Didenkulova E. Internal waves generated by explosive eruptions of underwater volcanoes and their effect on the sea surface. *Natural Hazards*, 2025. Vol. 121. Pp. 661–675.
11. Kharif C., Pelinovsky E., Shun'yaev A. *Rogue waves in the ocean*. Berlin, Springer, 2009. 260 p.
12. Adcroft A., Campin J.-M. *MITgcm user manual*. Cambridge, MIT, 2011. 455 p.
13. Chai J., Wang Z., Yang Z., Wang Z. Investigation of internal wave wakes generated by a submerged body in a stratified flow. *Ocean Engineering*, 2022. Vol. 266. P. 112840.
14. Wang J., Wang, S., Chen X., Wang W., Xu Y. Three-dimensional evolution of internal waves rejected from a submarine seamount. *Physics Fluids*, 2017. Vol. 29. P. 106601.
15. Gnevyshev V., Badulin S. Wave patterns of gravity–capillary waves from moving localized sources. *Fluids*, 2020. Vol. 5. Pp. 219.
16. Gervais A.D., Swaters G.E., Sutherland B.R. Transmission and reflection of three-dimensional Boussinesq internal gravity wave packets in nonuniform retrograde shear flow. *Physical Review Fluids*, 2022. Vol. 7. P. 114802.
17. Meunier P., Dizus S., Redekopp L., Spedding G. Internal waves generated by a stratified wake: experiment and theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 2018. Vol. 846. Pp. 752–788.
18. Broutman D., Brandt L., Rottman J., Taylor C. A WKB derivation for internal waves generated by a horizontally moving body in a thermocline. *Wave Motion*, 2021. Vol. 105. P. 102759.
19. Bulatov V.V., Vladimirov I.Yu. Analiticheskie svoystva dispersionnih sootnoshenij uravneniya vnutrennih gravitacionnih voln s modelnimi i proizvolnimi raspredelenijami chastoti plavuchesti [Analytical properties of dispersion relations of the internal gravity wave equation with model and arbitrary buoyancy frequency distributions]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2023. Vol. 12(1). Pp. 3–8 (in Russian).
20. Bulatov V.V. Internal gravity waves excited by motionless perturbation sources. *Fluid Dynamics*, 2023. Vol. 58. Suppl. 2. Pp. S240–S252.
21. Bulatov V.V. Asymptotics of far fields of internal gravity waves caused by localized sources in an infinite deep stratified medium. *Fluid Dynamics*, 2023. Vol. 58. Suppl. 2. Pp. S263–273.
22. Landau L.D., Livshitz E.M. *Teoreticheskaja fizika. Tom 7. Teorija polja* [Theoretical physics. Vol.7. Field theory]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 512 p. (in Russian).
23. Abramowitz M., Stegun I. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. USA Department of Commerce: National Bureau of Standards. Applied Mathematics Series 55. Tenth Printing. 1972. 1064 p.
24. Nikiforov A.F., Uvarov V.V. *Specialnije funktsii matematicheskoy fiziki* [Special functions of mathematical physics]. Moscow, Intellect Publ., 2008. 344 p.