Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», 2025, т. 14, № 5, с. 414–423

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

https://doi.org/10.26583/vestnik.2025.5.4

Оригинальная статья / *Original paper*

УДК 517.95

Обратная задача определения функции источника в вырождающемся параболическом уравнении с дивергентной главной частью на плоскости

В. Л. Камынин, О. В. Нагорнов

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

Изучается линейная обратная задача определения неизвестной, зависящей от t, правой части (функции источника) в одномерном по пространственной переменной параболическом уравнении со слабо вырождающейся главной частью, заданной в дивергентной форме. Дополнительное условие наблюдения задается в интегральной форме. Установлены достаточные условия, при которых решение рассматриваемой обратной задачи существует и единственно. При этом не накладывается никаких ограничений на величину T и размер области, т.е. доказанные теоремы носят глобальный характер. Решение понимается в обобщенном смысле по Соболеву, в частности, неизвестная функция источника ищется в пространстве $L_2(0, T)$. Коэффициенты уравнения могут зависеть как от временной, так и от пространственной переменных. Вырождение уравнения также допускается как по временной, так и по пространственной переменным. Доказательства теорем существования и единственности решения обратной задачи основаны на исследовании однозначной разрешимости соответствующей прямой задачи, которое также является новым и представляет самостоятельный интерес. При исследовании однозначной разрешимости обратной задачи она сводится к изучению разрешимости некоторого операторного уравнения, где применяются общие теоремы функционального анализа.

Ключевые слова: обратные задачи определения функции источника, вырождающиеся параболические уравнения, интегральное наблюдение

Введение

В прямоугольнике $Q \equiv [0, T] \times [0, l]$ рассматривается обратная задача определения пары функций $\{u(t, x), p(t)\}$, удовлетворяющих параболическому уравнению

$$u_t - (a(t,x)u_x)_x + b(t,x)u_x + c(t,x)u + \gamma(t)u = p(t)g(t,x) + r(t,x), \quad (t,x) \in Q, \tag{1}$$

начальному условию

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in [0,l], \tag{2}$$

граничным условиям

$$u(t,0) = u(t,l) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

и дополнительному условию

$$\int_0^l u(t,x)\omega(x)dx = \varphi(t), \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

✉ О.В. Нагорнов: nagornov@yandex.ru
В.Л. Камынин: vlkamynin2008@yandex.ru

Поступила в редакцию: 03.09.2025
После доработки: 22.09.2025
Принята к публикации: 23.09.2025

EDN LMVJHR

В задаче (1)–(4) функции $a(t, x)$, $b(t, x)$, $c(t, x)$, $\gamma(t)$, $u_0(x)$, $\omega(x)$, $\varphi(t)$ предполагаются известными. Уравнение (1) допускает вырождение главной части, а именно, предполагается, что

$$a(t,x) \geq \Lambda_0(x) \geq 0, \quad \frac{1}{\Lambda_0(x)} \in L_q(0,l), \quad q > 1. \tag{5}$$

Однозначная разрешимость обратной задачи (1)–(4) изучается в классе обобщенных решений.

Для случая равномерно параболических уравнений аналогичная обратная задача ранее исследовалась в работах [1]–[3] и др. Случай вырождающихся параболических уравнений с условием типа (5) рассматривался в [4]–[6] для уравнений с недивергентной главной частью. При этом рассматривались решения с $u(t,x) \in W_s^{1,2}(Q)(s>1)$, удовлетворяющие уравнению п.в. в Q.

В дальнейшем будем использовать обозначения:

$$Q_\tau = [0,\tau]\times[0,l], \quad 0 < \tau \leq T, \quad Q_T \equiv Q, \quad \|z\|_{L\ (0,l)} \equiv \|z\|_2, \quad z(x) \in L_2(0,l).$$

Нам понадобится известное арифметическое неравенство Коши

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2, \quad \varepsilon > 0. \tag{6}$$

Всюду ниже будем предполагать, что рассматриваемые функции, как минимум, измеримы, все равенства и неравенства выполняются почти всюду, производные понимаются в обобщенном смысле по Соболеву. Используемые в работе пространства Лебега и Соболева с соответствующими нормами будем понимать в общепринятом смысле (см, например, [7]).

Относительно входных данных задачи (1)–(4) будем предполагать выполненными следующие условия:

существует функция $\Lambda_0(x)$ такая, что $0 \leq \Lambda_0(x) \leq a_0$, $x\in[0, l]$, $\frac{1}{\Lambda_0(x)} \in L_q(0,l)$,

$$\|1/\Lambda_0\|_{L_q(0,l)} \leq a_1,\ q > 1 \text{ и при этом } \Lambda_0(x) \leq a(t, x) \leq a_2\Lambda_0(x),\ (t, x) \in Q; \tag{A}$$

$$\frac{b^2(t,x)}{\Lambda_0(x)} \in L_\infty(Q), \frac{b^2(t,x)}{\Lambda_0(x)} \leq K_{b,a}, (t,x) \in Q; \tag{B}$$

$$c(t,x) \in L_\infty(Q), |c(t,x)| \leq K_c, (t,x) \in Q, \gamma(t) \in L_2(0,T), \|\gamma\|_{L_2(0,T)} \leq K_\gamma; \tag{C}$$

$$g(t,x) \in L_\infty(0,T;L_2(0,l)), r(t,x) \in L_2(Q), \sup_{0\leq t\leq T} \|g(t,\cdot)\|_2 \leq K_g, \|r\|_{L_2(Q)} \leq K_r; \tag{D}$$

$$u_0(x) \in L_2(0,l), \|u_0\|_2 \leq M_0; \tag{E}$$

$$\omega(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(0,l), \|\omega\|_2 \leq K_\omega, \|\omega_x\|_2 \leq K_\omega^*; \tag{F}$$

$$\varphi(t) \in W_2^1(0,T), \ \left|\int_0^l g(t,x)\omega(x)dx\right| \geq g_0 > 0, \ \varphi(0) = \int_0^l u_0(x)\omega(x)dx. \tag{G}$$

В условиях (A) – (G) a_0, a_1, a_2, g_0, K_ω, $K_\omega^* = \text{const} > 0$, $K_{b,a}$, K_c, K_γ, K_r, $M_0 = \text{const} \geq 0$.

Определение 1. Обобщенным решением обратной задачи (1) – (4) будем называть пару функций $\{u(t, x), p(t)\}$ таких, что $u(t,x) \in C(0,T;L_2(0,l)) \bigcap \overset{0}{W}{}_s^1(Q)$, $s > 1$, $\sqrt{\Lambda_0(x)}u_x \in L_2(Q)$, $p(t) \in L_2(0,t)$, для любой пробной функции $\Phi(t,x) \in C(0,T;L_2(0,l)) \bigcap \overset{0}{W}{}_s^1(Q)$, $\Phi_t \in L_2(Q)$, $\sqrt{\Lambda_0(x)}\Phi_x \in L_2(Q)$ и для любого $\tau \in (0, T]$ выполняется интегральное тождество

$$\int_0^l u(\tau,x)\Phi(\tau,x)dx - \int_0^l u_0(x)\Phi(0,x)dx - \int_{Q_\tau} u(t,x)\Phi_t(t,x)dxdt + \int_{Q_\tau} a(t,x)u_x(t,x)\Phi_x(t,x)dxdt$$
$$+ \int_{Q_\tau} [b(t,x)u_x(t,x) + c(t,x)u(t,x) + \gamma(t)u(t,x)]\Phi(t,x)dxdt = \int_{Q_\tau} (p(t)g(t,x) + r(t,x))\Phi(t,x)dxdt, \tag{7}$$

а также выполняется условие (4) для всех $t \in [0, T]$.

Исследование прямой задачи (1) – (3)

Рассмотрим прямую задачу (1) – (3), где функция $p(t) \in L_2(0,t)$ известна. Положим $f(t, x) = p(t)g(t, x) + r(t, x)$. В силу условия (D) имеем $f(t, x) \in L_2(Q)$. В этом разделе будем предполагать, что

$$\|f\|_{L_2(Q)} \leq K_f, \quad K_f = \text{const} > 0. \tag{8}$$

Решение $u(t, x)$ прямой задачи (1) – (3) будем понимать в смысле определения 1. В частности, функция $u(t, x)$ удовлетворяет интегральному тождеству (7) с $p(t)g(t, x) + r(t, x) = f(t, x)$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (A) – (C), (D) *и* (8). *Тогда не существует двух различных обобщенных решений задачи* (1) – (3).

Доказательство. Повторяя рассуждения, проведенные в [7] на стр. 166 – 169, получаем, что для обобщенного решения $u(t, x)$ задачи (1)–(3) справедливо равенство

$$\frac{1}{2}\int_0^l u^2(\tau,x)dx - \frac{1}{2}\int_0^l u_0^2(x)dx + \int_{Q_\tau} a(t,x)u_x^2 dxdt + \int_{Q_\tau} b(t,x)u_x u dxdt + \int_{Q_\tau} (c(t,x) + \gamma(t))u^2 dxdt =$$
$$= \int_{Q_\tau} f(t,x)u dxdt, \quad \tau \in (0,T]. \tag{9}$$

При выводе выражения (9) следует представить слагаемые

$$\int_{Q_\tau} a(t,x)u_x\Phi_x(t,x)dxdt \ \text{ и } \int_{Q_\tau} b(t,x)u_x\Phi(t,x)dxdt$$

в интегральном тождестве (7) в виде

$$\int_{Q_\tau} \frac{a(t,x)}{\Lambda_0(x)}\left(\sqrt{\Lambda_0(x)}u_x\right)\left(\sqrt{\Lambda_0(x)}\Phi_x(t,x)\right)dxdt \ \text{ и } \int_{Q_\tau} \frac{b(t,x)}{\sqrt{\Lambda_0(x)}}\left(\sqrt{\Lambda_0(x)}u_x\right)\Phi(t,x)dxdt,$$

соответственно, и учесть, что поскольку функция $\Lambda_0(x)$ не зависит от t, то $\sqrt{\Lambda_0(x)} \cdot \Phi_h(t,x) = \left(\sqrt{\Lambda_0(x)} \cdot \Phi(t,x)\right)_h$, где $\Phi_h(t, x)$ – усреднение по Стеклову функции $\Phi(t, x)$ по переменной t: $\Phi_h(t,x) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \Phi(\tau,x)d\tau$.

Пусть существуют два обобщенных решения $u^{(1)}(t, x)$ и $u^{(2)}(t, x)$ задачи (1)–(3). Положим $v(t, x) = u^{(1)}(t, x) - u^{(2)}(t, x)$. Тогда в силу равенства (9), выписанного для $v(t, x)$, имеем

$$\frac{1}{2}\| v(\tau,\cdot)\|_2^2 + \int\limits_{Q_\tau} a(t,x)v_x^2\,dxdt + \int\limits_{Q_\tau} b(t,x)v_x v\,dxdt + \int\limits_{Q_\tau} c(t,x)v^2\,dxdt + \int\limits_{Q_\tau} \gamma(t)v^2\,dxdt = 0.$$

В силу условий (A)–(C) и неравенства (6) получаем отсюда неравенство

$$\frac{1}{2}\|v(\tau,\cdot)\|_2^2 + \int\limits_{Q_\tau} \Lambda_0(x)|v_x|^2\,dxdt \le \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{Q_\tau} \Lambda_0(x)|v_x|^2\,dxdt + \frac{K_{b,a}}{2\varepsilon}\int\limits_{Q_\tau} v^2 dxdt + K_c\int\limits_{Q_\tau} v^2 dxdt + \sqrt{\tau}K_\gamma \sup_{0\le t\le\tau}\|v(t,\cdot)\|_2^2.$$

Положим $\varepsilon = 1$. Тогда приходим к неравенству

$$\frac{1}{2}\sup_{0\le t\le\tau}\|v(t,\cdot)\|_2^2 + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} \Lambda_0(x)|v_x|^2\,dxdt \le \left(\frac{K_{b,a}}{2}\tau + K_c\tau + K_\gamma\sqrt{\tau}\right)\sup_{0\le t\le\tau}\|v(\tau,\cdot)\|_2^2. \tag{10}$$

Выбираем и фиксируем $\tau \equiv \tau_0$ такое, что

$$\frac{K_{b,a}}{2}\tau_0 + K_c\tau_0 + K_\gamma\sqrt{\tau_0} < \frac{1}{2}.$$

Тогда из выражения (10) следует, что $v(t, x) \equiv 0$ в Q_{τ_0}.

Повторяя проведенные рассуждения в прямоугольниках $[\tau_0, 2\tau_0]\times[0, l]$,$[2\tau_0, 3\tau_0]\times[0, l]$ и т.д., получаем, что $v(t, x) \equiv 0$ в Q, т.е. $u^{(1)}(t, x) = u^{(2)}(t, x)$ в Q. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (A)–(C), (D) *и* (8). *Положим*

$$q^* = \frac{2q}{q+1}. \tag{11}$$

Тогда существует обобщенное решение задачи (1)–(3) (в смысле определения 1) с $s = q^*$. Более того, $\Lambda_0|u_x|^2 \in L_1(Q)$, справедлива оценка

$$\frac{1}{4}\sup_{0\le t\le\tau_0}\|u(t,\cdot)\|_2^2 + \left\|\sqrt{\Lambda_0}u_x\right\|_{L_2(Q_{\tau_0})}^2 \le \|u_0\|_2^2 + 2\tau_0\|f\|_{L_2(Q_{\tau_0})}^2, \tag{12}$$

где τ_0 удовлетворяет условию

$$\left(\frac{1}{2}K_{b,a} + K_c\right) + K_\gamma\tau_0^{1/2} \le \frac{1}{8}, \tag{13}$$

и оценка

$$\sup_{0\le t\le T}\|u(t,\cdot)\|_2^2 + \left\|\sqrt{\Lambda_0}u_x\right\|_{L_2(Q)}^2 + \|u_x\|_{L_{q^*}(Q)}^2 \le C\left(\|u_0\|_2^2 + \|f\|_{L_2(Q)}^2\right), \tag{14}$$

где $C = \text{const} > 0$ зависит от констант из условий (A)–(D), T и l.

Доказательство. При доказательстве теоремы использованы некоторые идеи из [8].

Положим $a^m(t,x) = a(t,x) + \dfrac{1}{m}$. Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения

$$u_t^m - \left(a^m(t,x)u_x^m\right)_x + b(t,x)u_x^m + c(t,x)u^m + \gamma(t)u^m = f(t,x) \tag{15}$$

с краевыми условиями (2), (3). В силу [7, с. 189] такая задача имеет единственное обобщенное решение $u^m(t,x)$ в смысле определения 1, причем $u^m \in C(0,T;L_2(0,l)) \bigcap \overset{0}{W}{}_2^1(Q)$, и для него справедливо равенство (2.13) из [7, с. 168], которое в нашем случае имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\|u^m(\tau,\cdot)\|_2^2 + \int_{Q_\tau} a^m(t,x)|u_x^m|^2\,dxdt = \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 - \int_{Q_\tau} b(t,x)u_x^m u^m\,dxdt - \\ - \int_{Q_\tau} c(t,x)|u^m|^2\,dxdt - \int_{Q_\tau}\gamma(t)|u^m|^2\,dxdt + \int_{Q_\tau} f(t,x)u^m\,dxdt.\end{gathered} \tag{16}$$

Оценим второе слагаемое в правой части уравнения (16) следующим образом:

$$\begin{gathered}-\int_{Q_\tau} b(t,x)u_x^m u^m\,dxdt = -\int_{Q_\tau}\frac{b(t,x)}{\sqrt{\Lambda_0(x)}}\left(\sqrt{\Lambda_0(x)}u_x^m\right)u^m\,dxdt \le \frac{1}{2}\int_{Q_\tau}\Lambda_0(x)|u_x^m|^2\,dxdt + \\ + \frac{1}{2}K_{b,a}\int_{Q_\tau}|u^m|^2\,dxdt \le \frac{1}{2}\int_{Q_\tau}\Lambda_0(x)|u_x^m|^2\,dxdt + \frac{1}{2}K_{b,a}\tau\sup_{0\le t\le\tau}\|u^m(t,\cdot)\|_2^2.\end{gathered}$$

Оценивая остальные члены равенства (16) с использованием условий (A), (C) и неравенства (6), получаем

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\|u^m(\tau,\cdot)\|_2^2 + \frac{1}{2}\int_{Q_\tau}\Lambda_0(x)|u_x^m|^2\,dxdt \le \\ \le \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \left(\frac{1}{2}K_{b,a}\tau + K_c\tau + K_\gamma\tau^{1/2}\right)\sup_{0\le t\le\tau}\|u^m(t,\cdot)\|_2^2 + \frac{\varepsilon}{2}\sup_{0\le t\le\tau}\|u^m(t,\cdot)\|_2^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\tau\|f\|_{L_2(Q_\tau)}^2.\end{gathered}$$

Полагая здесь $\varepsilon = 1/2$, приходим к неравенству

$$\frac{1}{4}\sup_{0\le t\le\tau}\|u^m(t,\cdot)\|_2^2 + \frac{1}{2}\int_{Q_\tau}\Lambda_0(x)|u_x^m|^2\,dxdt \le \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 + \left(\frac{1}{2}K_{b,a}\tau + K_c\tau + K_\gamma\tau^{1/2}\right)\sup_{0\le t\le\tau}\|u^m(t,\cdot)\|_2^2 + \tau\|f\|_{L_2(Q_\tau)}^2. \tag{17}$$

Пусть $\tau = \tau_0$ удовлетворяет условию (13). Фиксируем такое τ_0, тогда из равенства (17) следует оценка

$$\frac{1}{4}\sup_{0\le t\le\tau_0}\|u^m(t,\cdot)\|_2^2 + \left\|\sqrt{\Lambda_0}u_x^m\right\|_{L_2(Q_{\tau_0})}^2 \le \|u_0\|_2^2 + 2\tau_0\|f\|_{L_2(Q_{\tau_0})}^2. \tag{18}$$

Повторяя предыдущие рассуждения в прямоугольниках $[\tau_0, 2\tau_0]\times[0, l]$, $[2\tau_0, 3\tau_0]\times[0, l]$ и т.д., приходим к равномерной по m оценке

$$\sup_{0\le t\le T}\|u^m(t,\cdot)\|_2^2 + \left\|\sqrt{\Lambda_0}u_x^m\right\|_{L_2(Q)}^2 \le C_1\left(\|u_0\|_2^2 + \|f\|_{L_2(Q)}^2\right). \tag{19}$$

В силу неравенства Гельдера и определения q^* в выражении (11) получаем также равномерную по m оценку

$$\| u_x^m \|^2_{L_{q^*}(Q)} \le C_2 \left(\|u_0\|_2^2 + \|f\|^2_{L_2(Q)} \right). \tag{20}$$

Константы C_1 и C_2 в (19) и (20) зависят от констант из условий (A)–(E), T, l, но не зависят от m.

В силу оценок (19) и (20) существуют функция $u(t,x) \in C(0,T;L_2(0,l)) \bigcap \overset{0}{W}{}^1_{q^*}(Q)$, $\sqrt{\Lambda_0(x)}u_x \in L_2(Q)$ и подпоследовательность $m_k \to \infty$ такие, что при $k \to \infty$

$$u^{m_k}(t,x) \rightharpoonup u(t,x) * -\text{слабо в } L_\infty(0,\, T;\, L_2(0,\, l)), \tag{21}$$

$$u_x^{m_k}(t,x) \rightharpoonup u_x(t,x) \ \text{слабо в } L_{q^*}(Q), \tag{22}$$

$$\sqrt{a^{m_k}(t,x)}u_x^{m_k}(t,x) \rightharpoonup \sqrt{a(t,x)}u_x^{m_k}(t,x) \ \text{слабо в } L_2(Q). \tag{23}$$

На основании выражений (21)–(23) можно сделать предельный переход при $k \to \infty$ в интегральном тождестве вида (7), записанном для функций $u^{m_k}(t,x)$ и с коэффициентом $a^{m_k}(t,x)$. В результате получим, что функция $u(t, x)$ удовлетворяет интегральному тождеству (7).

Для того, чтобы функция $u(t, x)$ была обобщенным решением задачи (1)–(3) осталось доказать, что $u(t, x) \in C(0, T; L_2(0, l))$. Этот факт доказывается повторением доказательства из [7, с. 185–189] с учетом того, что функция $\Lambda_0(x)$ не зависит от t, а следовательно, $\sqrt{\Lambda_0(x)} \cdot (u_x)_h = \left(\sqrt{\Lambda_0(x)} \cdot u_x\right)_h$, где, как и выше, $\Phi_h(t, x)$ – усреднение по Стеклову функции $\Phi(t, x)$ по переменной t.

Таким образом, установлено, что $u(t, x)$ – обобщенное решение задачи (1)–(3) в смысле определения 1 при $s = q^*$. Оценки (12) и (14) следуют из оценок (18)–(20) и предельных соотношений (21)–(23).

Теорема 2 доказана.

Исследование обратной задачи (1) – (4)

Будем использовать обозначения

$$G(t) = \int_0^l g(t,x)\omega(x)dx, R(t) = \int_0^l r(t,x)\omega(x)dx.$$

Тогда в силу условий (D) и (F) имеем $G(t) \in L_\infty(0, T)$, $R(t) \in L_2(0, T)$, $|G(t)| \ge g_0 > 0$.

Выведем операторное уравнение для нахождения неизвестной функции $p(t)$. Для этого в интегральном тождестве (7) положим $\Phi(t, x) = \chi(t)\omega(x)$, где $\chi(t) \in \overset{0}{W}{}^1_2(0,T)$. Тогда имеем

$$-\int_0^T \left(\int_0^l u(t,x)\omega(x)dx \right)\chi_t dt + \int_0^T \left(\int_0^l a(t,x)u_x\omega_x(x)dx \right)\chi(t)dt + \int_0^T \left[\int_0^l (b(t,x)u_x + c(t,x)u)\omega(x)dx \right]\chi(t)dt +$$
$$+\int_0^T \gamma(t) \left(\int_0^l u(t,x)\omega(x)dx \right)\chi(t)dt = \int_0^T p(t)G(t)\chi(t)dt + \int_0^T R(t)\chi(t)dt,$$

откуда с учетом условия (4) и в силу произвольности $\chi(t) \in \overset{0}{W}{}^1_2(0,T)$ имеем:

$$\varphi'(t) + \gamma(t)\varphi(t) + \int_0^l a(t,x)u_x\omega_x(x)dx + \int_0^l (b(t,x)u_x + c(t,x)u)\omega(x)dx = p(t)G(t) + R(t). \tag{24}$$

Из выражения (24) с учетом условия (G) получаем равенство

$$p(t)=\frac{1}{G(t)}\left[\varphi'(t)+\gamma(t)\varphi(t)-R(t)+\int_0^l a(t,x)u_x\omega_x(x)dx+\int_0^l (b(t,x)u_x+c(t,x)u)\omega(x)dx\right]. \qquad (25)$$

Введем оператор $\mathcal{A}(p):L_2(0,T)\to L_2(0,T)$ по формуле

$$\mathcal{A}(p)(t)=\frac{1}{G(t)}\left[\varphi'(t)+\gamma(t)\varphi(t)-R(t)+\int_0^l a(t,x)u_x\omega_x(x)dx+\int_0^l (b(t,x)u_x+c(t,x)u)\omega(x)dx\right]. \qquad (26)$$

Тогда соотношение (25) перепишется в виде

$$p=\mathcal{A}(p). \qquad (27)$$

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (A)$-$(G). *Тогда операторное уравнение (27) эквивалентно обратной задаче* (1)–(4) *в следующем смысле. Если пара* $\{u(x,t),p(t)\}$ *является решением обратной задачи, то функция* $p(t)$ *– решение уравнения (27). Обратно, если* $\hat{p}(t)\in L_2(0,T)$ *является решением уравнения* (27), *а* $\hat{u}(t,x)$ *– решение прямой задачи* (1)$-$(3) *с выбранной функцией* $\hat{p}(t)$ *в правой части уравнения* (1), *то пара* $\{\hat{u}(t,x),\hat{p}(t)\}$ *является обобщенным решением задачи обратной задачи* (1)$-$(4).

Доказательство. Первое утверждение леммы доказано выше при выводе соотношения (27).

Докажем второе утверждение. Пусть $\hat{p}(t)\in L_2(0,T)$ является решением уравнения (27), а $\hat{u}(t,x)$ – обобщенное решение прямой задачи (1)$-$(3) с данной функцией $\hat{p}(t)$ в правой части уравнения (1). Существование и единственность такого решения доказаны в теоремах 1 и 2.

Положим

$$\hat{\varphi}(t)=\int_0^l \hat{u}(t,x)\omega(x)dx, \qquad (28)$$

тогда $\hat{\varphi}(t)\in W^1_{q^*}(0,T)$, где q^* определена в (11).

Повторяя рассуждения, проведенные при выводе соотношения (25), приходим к равенству

$$\hat{p}(t)G(t)=\hat{\varphi}'(t)+\gamma(t)\hat{\varphi}(t)-R(t)+\int_0^l a(t,x)\hat{u}_x\omega_x(x)dx+\int_0^l (b(t,x)\hat{u}_x+c(t,x)\hat{u})\omega(x)dx. \qquad (29)$$

Из условий (A)$-$(D), (F), (G) получаем, что $\hat{\varphi}(t)\in W^1_2(0,T)$.

С другой стороны, поскольку $\hat{p}(t)$ – решение уравнения (27), то из определения оператора $\mathcal{A}(p)$ в (26) имеем

$$\hat{p}(t)G(t)=\varphi'(t)+\gamma(t)\varphi(t)-R(t)+\int_0^l a(t,x)\hat{u}_x\omega_x(x)dx+\int_0^l (b(t,x)\hat{u}_x+c(t,x)\hat{u})\omega(x)dx. \qquad (30)$$

Положим $\psi(t)=\varphi(t)-\hat{\varphi}(t)\in W^1_2(0,T)$. Вычитая (29) из (30) и учитывая условие согласования в (G), получаем, что $\psi(t)$ является на $[0,T]$ обобщенным решением задачи

$$\psi'+\gamma(t)\psi=0,\ \psi(0)=0.$$

В силу известной леммы Гронуолла (см., например, [7, с. 112]) имеем отсюда, что $\psi(t) \equiv 0$ на $[0, T]$, т.е. $\hat{\varphi}(t) = \varphi(t)$ на $[0, T]$, а следовательно, пара $\{\hat{u}(t,x), \hat{p}(t)\}$ есть обобщенное решение обратной задачи (1)–(4). Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (A)–(G). *Тогда существует обобщенное решение обратной задачи* (1)–(4) *и оно единственно.*

Доказательство. Покажем, что оператор, заданный формулой (26), является сжимающим оператором в $L_2(0, \tau)$ при некотором малом $\tau \in (0, T]$.

Пусть $p^{(1)}(t), p^{(2)}(t) \in L_2(0, T)$. Пусть $u^{(1)}(t, x)$ и $u^{(2)}(t, x)$ – соответствующие решения прямой задачи (1)–(3). Положим $v(t, x) = u^{(1)}(t, x) - u^{(2)}(t, x)$, $\sigma(t) = p^{(1)}(t) - p^{(2)}(t)$. Тогда пара $\{v(t, x), \sigma(t)\}$ удовлетворяет соотношениям

$$v_t - (a(t,x)v_x)_x + b(t,x)v_x + c(t,x)v + \gamma(t)v = \sigma(t)g(t,x), \quad (t,x)\in Q, \tag{31}$$

$$v(0,x) = 0, \; x\in[0,l], \tag{32}$$

$$v(t,0) = v(t,l) = 0, \quad t\in[0,T] \tag{33}$$

в смысле определения 1.

В силу определения оператора $\mathcal{A}$ в (26) и условий (A)–(G) имеем для любого $\tau \in [0, T]$:

$$\begin{gathered}\|\mathcal{A}(p^{(1)}) - \mathcal{A}(p^{(2)})\|^2_{L_2(0,\tau)} \le \frac{3}{g_0^2}\left[\left(\int\limits_{Q_\tau}\frac{a(t,x)}{\Lambda_0(x)}\sqrt{\Lambda_0(x)}v_x\sqrt{\Lambda_0(x)}\omega_x dxdt\right)^2 + \right.\\ \left. +\left(\int\limits_{Q_\tau}\frac{b(t,x)}{\sqrt{\Lambda_0(x)}}\sqrt{\Lambda_0(x)}v_x\omega dxdt\right)^2 + \left(\int\limits_{Q_\tau}c(t,x)v\omega dxdt\right)^2\right] \le \\ \le \frac{4}{g_0^2}\left\{\left[\left(a_2K_\omega^*\right)^2 a_0 + K_{b,a}K_\omega^2\right]\int\limits_{Q_\tau}\Lambda_0(x)|v_x|^2 dxdt + K_c^2K_\omega^2\tau\sup_{0\le t\le\tau}\int\limits_0^l v^2(t,x)dx\right\}.\end{gathered} \tag{34}$$

Пусть $\tau \equiv \tau_0$ удовлетворяет условию (13). Поскольку $v(t, x)$ удовлетворяет соотношениям (31)–(33), то в силу оценки (12), примененной к функции $v(t, x)$, имеем

$$\frac{1}{4}\sup_{0\le t\le\tau_0}\|v(t,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\sqrt{\Lambda_0}v_x\|^2_{L_2(Q_{\tau_0})} \le 2\tau_0 K_g^{*2}\int\limits_0^{\tau_0}\sigma^2(t)dt. \tag{35}$$

Подставляя выражение (35) в (34), получаем неравенство

$$\|\mathcal{A}(p^{(1)}) - \mathcal{A}(p^{(2)})\|^2_{L_2(0,\tau_0)} \le \frac{4}{g_0^2}\left[\left(a_2K_\omega^*\right)^2 a_0 + \left(K_{b,a} + K_c^2\tau_0\right)K_\omega^2\right]\times 8\tau_0 K_g^{*2}\int\limits_0^{\tau_0}\sigma^2(t)dt. \tag{36}$$

Пусть τ_0 дополнительно к условию (13) удовлетворяет еще неравенству

$$\frac{32}{g_0^2}K_g^{*2}\left[a_0a_2^2K_\omega^{*2} + \left(K_{b,a} + K_c^2\tau_0\right)K_\omega^2\right]\tau_0 \le \frac{1}{2}.$$

Тогда из неравенства (36) следует, что

$$\|\mathcal{A}(p^{(1)}) - \mathcal{A}(p^{(2)})\|^2_{L_2(0,\tau_0)} \le \frac{1}{2}\|p^{(1)} - p^{(2)}\|^2_{L_2(0,\tau_0)}.$$

Последнее неравенство означает, что оператор $\mathcal{A}$ является сжимающим в $L_2(0, \tau_0)$, а следовательно, уравнение (27) имеет единственное решение $p(t) \in L_2(0, \tau_0)$.

Тогда в силу леммы 1 обратная задача (1)–(4) однозначно разрешима в цилиндре Q_{τ_0}. Поскольку τ_0 фиксировано, то повторяя предыдущие рассуждения в прямоугольниках $[\tau_0, 2\tau_0] \times [0, l]$,$[2\tau_0, 3\tau_0] \times [0, l]$ и т.д., мы получаем однозначную разрешимость обратной задачи(1)–(4) во всем прямоугольнике Q.

Теорема 3 доказана.

Заключительные выводы

В работе доказана однозначная разрешимость обратной задачи определения неизвестного источника в вырождающемся параболическом уравнении с дивергентной главной частью, причем вырождение допускается в бесконечном числе точек прямоугольника, где рассматривается задача. Ранее для уравнений с дивергентной главной частью вырождение допускалось в заранее фиксированных точках, как правило, на границе области.

Финансирование

Работа выполнена при поддержке Программы Приоритет-2030 НИЯУ МИФИ

Конфликт интересов

Конфликт интересов отсутствует.

Вклад авторов

В.Л. Камынин – постановка задачи, доказательство утверждений, обсуждение результатов.

О.В. Нагорнов – доказательство утверждений, обсуждение результатов.

Список литературы

1. *Cannon J.R., Lin Y.* Determination of a parameter $p(t)$ in some quasilinear parabolic differential equations // Inverse Problems, 1988. V. 4. № 1. P. 35–45.

2. *Cannon J.R., Lin Y.* Determination of a parameter $p(t)$ in Holder classes for some semilinear parabolic differential equations // Inverse Problems, 1988. V. 4. № 3. P. 596–606.

3. *Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekker, 2000. 709 p.

4. *Камынин В.Л.* О корректной разрешимости обратной задачи определения правой части в вырождающемся параболическом уравнении с условием интегрального наблюдения // Математические заметки, 2015. Т. 98. № 5. С. 710–724.

5. *Камынин В.Л.* Обратная задача определения правой части в вырождающемся параболическом уравнении с неограниченными коэффициентами // Журнал вычислит. матем. и матем. Физики, 2017. Т. 57. № 5. С. 832–841.

6. *Katуnin V.L.* Unique solvability of direct and inverse problems for degenerate parabolic equations in multidimensional case // Journal of math. Sciences, 2023. V. 269. № 1. С. 36–51.

7. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967, 736 с.

8. *Кружков С.Н.* Квазилинейные параболические уравнения и системы с двумя независимыми переменными // Труды сем. им. И. Г. Петровского. 1979. Вып. 5. С. 217–272.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2025, vol. 14, no. 5, pp. 414–423

Inverse problem of determining the source function in a degenerate parabolic equation with a divergent principal part on a plane

V. L. Kamynin✉, O. V. Nagornov✉

National Research Nuclear University MEPhI, Moscow, 115409, Russia
✉ vlkamynin2008@yandex.ru
✉ Nagornov@yandex.ru

Received September 3, 2025; revised September 22, 2025; accepted September 23, 2025

We study the linear inverse problem of determining the unknown, time-dependent right-hand side (source function) in a one-dimensional parabolic equation with a weakly degenerate principal part defined in divergence form. The additional observation condition is specified in integral form. Sufficient conditions are established under which a solution to the inverse problem under consideration exists and is unique. No restrictions are imposed on the value of T or the size of the domain, i.e. the proven theorems are of a global nature. The solution is understood in the generalized sense according to Sobolev; in particular, the unknown source function is sought in the space $L_2(0, T)$. The equation's coefficients may depend on both the time and spatial variables. Degeneracy of the equation is also permitted in both the time and spatial variables. Proofs of the existence and uniqueness theorems for the solution of the inverse problem are based on the study of the unique solvability of the corresponding direct problem, which is also new and of independent interest. When studying the unique solvability of the inverse problem, it is reduced to studying the solvability of a certain operator equation, using general theorems of functional analysis.

Keywords: inverse problems of determining the source function, degenerate parabolic equations, integral observation.

References

1. *Cannon J.R., Lin Y.* Determination of a parameter $p(t)$ in some quasilinear parabolic differential equations. Inverse Problems. 1988. Vol. 4. No 1. Pp. 35–45.

2. *Cannon J.R., Lin Y.* Determination of a parameter $p(t)$ in Holder classes for some semilinear parabolic differential equations. Inverse Problems. 1988. Vol. 4. No 3. Pp. 596–606

3. *Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A*. Methods for solving inverse problems in mathe-matical physics. New York: Marcel Dekker, 2000. 709 p.

4. *Kamynin V.L*. O korrektnoi razreshimosti obratnoi zadachi v vyrozhdayushemsya parabo-licheskom uravnenii s usloviem integral'nogo nablyudeniya. [On the solvability of the inverse problem for determining the right-hand side of a degenerate parabolic equation with integral observation]. Matematicheskie zametki, 2015. Vol. 98. No. 5. Pp. 710–724 (in Russian).

5. *Kamynin V.L*. Obratnaya zadacha opredeleniya pravoi chasti v vyrozhdayushemsya parabolicheskom uravnenii s neogranichennymi koefficientami [Inverse problem of determining the right-hand side in a degenerating parabolic equation with unbounded coefficients]. Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki, 2017. Vol. 57. No. 5. Pp. 832–841 (in Russian).

6. *Kamynin V.L.* Unique solvability of direct and inverse problems for degenerate parabolic equations in multidimensional case. Journal of math. Sciences, 2023. Vol. 269. No. 1. Pp. 36–51.

7. *Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N.* Lineinye i kvazilineinye uravneniya parabolicheskogo tipa. [Linear and quasilinear parabolic equations of parabolic type]. Moscow, Nauka Publ. 1967, 736 p. (in Russian).

8. *Kruzhkov S.N.* Kvazilineinye parabolicheskie uravneniya i sistemy s dvumya nezavisimymi peremennymi [Quasilinear parabolic equations and systems with two independed variables]. Trudy Seminara im. I.G. Petrovskogo, 1979. No. 5. Pp. 217–272 (in Russian).