

УДК 517.958

О свойствах решений обратных задач восстановления палеотемператур

© 2025 г. О. В. Нагорнов, С. А. Тюфлин, В. Л. Камынин

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

Изучение прошлых температур на поверхности Земли представляет важную задачу для предсказания климатических изменений. Систематические инструментальные измерения температур начались менее двух столетий назад. Таким образом, не прямые оценки прошлых температур представляют главную информацию по прошлому климату. Измеренные температуры в скважинах могут быть использованы, чтобы реконструировать прошлые температуры на поверхности Земли. В работе рассматриваются обратные задачи реконструкции прошлых температур по данным измерений температурного профиля в скважинах горных пород и ледников. В общем случае данная задача не обладает свойством единственности и устойчивости. Различные реконструкции прошлых температур, проведенные ранее различными авторами, не учитывают это. В данной работе доказывается, что в том случае, когда изменения температуры на поверхности в прошлом можно представить в виде конечного отрезка ряда Фурье, решение обратной задачи обладает единственностью и устойчивостью.

Ключевые слова: обратные задачи, реконструкция климата, тепло- и массоперенос.

Введение

Исследование прошлых температур поверхности Земли является важной задачей с точки зрения изучения и прогноза изменений климата. Систематические инструментальные измерения температур начались лишь два столетия назад. Таким образом, для оценки прошлых изменений температур необходимо использовать косвенные источники изменений климата. Так, одним из таких источников о прошлом климате являются данные по температурным измерениям в скважинах.

Распределение температур ниже земной поверхности зависит, в основном, от двух процессов [1–3]. Первый – это процесс изменения температуры на поверхности. Второй – исходящий из недр Земли тепловой поток, который отражает длительные устоявшиеся геологические процессы. Изменения температуры на поверхности происходят на значительно меньших масштабах времени, чем геологические процессы. Таким образом, можно сказать, что измеренный температурный профиль в скважинах содержит в себе информацию о прошлых изменениях климата. Сезонные колебания температуры заметны лишь в приповерхностной области на глубинах до 10–20 м, в то время как длительные колебания фиксируются на глубинах в несколько сотен метров и более.

Процесс распространения тепла описывается одномерным уравнением теплопроводности в горных породах и одномерным уравнением теплопроводности с учетом вертикальной адвекции годовых слоев в ледниках [1–4]. Задача реконструкции прошлых температур представляет собой обратную задачу, содержащую условие переопределения. Таким условием является измеренный температурный профиль в скважине.

Хорошо известные методы реконструкции прошлых температур по профилю температуры в скважинах следующие: метод Монте-Карло [5], метод наименьших квадратов [6] и метод сингулярного раз-

✉ О.В. Нагорнов: nagornov@yandex.ru

Поступила в редакцию: 15.08.2025

После доработки: 04.10.2025

Принята к публикации: 07.10.2025

EDN LOCBGN

ложения [7], [8]. Этими методами были проведены как локальные реконструкции прошлых температур, так и глобальные [5], [9–11]. С математической точки зрения эти реконструкции могут не обладать свойствами единственности и устойчивости.

Постановка задачи

Математическая постановка обратной задачи для ледников включает в себя уравнение теплопроводности с учетом вертикальной адвекции годовых слоев в леднике, начальное и граничное условия и условие переопределения. Условием переопределения является измеренный температурный профиль в скважине $\chi(z)$, где z – вертикальная координата. Тогда обратная задача нахождения температуры на поверхности в прошлом есть решение следующей одномерной обратной задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} + w(z) \frac{\partial T}{\partial z} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, & 0 < t < t_f, \quad 0 < z < H, \\ T(0, t) = U_s + \mu(t), & 0 < t \leq t_f, \\ -k \cdot \frac{\partial T}{\partial z}(H, t) = q, & 0 < t \leq t_f, \\ T(z, 0) = U(z), & 0 < z < H, \\ T(z, t_f) = \chi(z), & 0 < z < H. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь H – глубина ледника; a^2 – коэффициент температуропроводности; k – коэффициент теплопроводности; $w(z)$ – скорость вертикальной адвекции годовых слоев в леднике; q – геотермический тепловой поток у основания ледника; $U(z)$ – стационарный профиль температуры, связанный с этим потоком. U_s – начальная температура на поверхности, характеризующая среднюю температуру, которая была на поверхности в прошлом; $\mu(t)$ – изменения температуры на поверхности относительно ее начального значения U_s в момент времени $t = 0$ ($\mu(0) = 0$) до времени измерения температурного профиля в скважине t_f .

Представим температурный профиль в скважине $T(z, t)$ в виде суперпозиции двух температурных профилей: $U(z)$, стационарного температурного профиля, связанного с геотермическим потоком Земли, и $V(z, t)$, остаточного температурного профиля, связанного с изменениями температуры на поверхности:

$$T(z, t) = U(z) + V(z, t). \quad (2)$$

Тогда стационарный температурный профиль $U(z)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} a^2 \frac{d^2 U}{dz^2} - w(z) \frac{dU}{dz} = 0, & 0 < z < H, \\ U(0) = U_s, \\ -k \frac{dU}{dz}(H) = q. \end{cases} \quad (3)$$

Обозначим $\theta(z) = \chi(z) - U(z)$ как отклонения от стационарного температурного профиля в измеренном температурном профиле, связанные с изменениями температуры на поверхности. Тогда нахождение изменений температуры на поверхности в прошлом сводится к решению следующей обратной задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + w(z) \frac{\partial V}{\partial z} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, & 0 < t < t_f, \quad 0 < z < H, \\ V(0, t) = \mu(t), & 0 < t \leq t_f, \\ \frac{\partial V}{\partial z}(H, t) = 0, & 0 < t \leq t_f, \\ V(z, 0) = 0, & 0 < z < H, \\ V(z, t_f) = \theta(z), & 0 < z < H. \end{cases} \quad (4)$$

Исследование задачи

Ранее было показано, что обратная задача (4) в общем случае не имеет единственного решения [12].

Предположим, что $\mu(t) = \sum_{k=-m}^m \mu_k \cdot \exp\left(i2\pi k \frac{t}{t_f}\right)$ – конечный отрезок ряда Фурье. Покажем, что в этом случае можно установить единственность определения $\mu(t)$.

Представим $V(z, t)$ из задачи (4) в виде $V(z, t) = \mu(t) + W(z, t)$, тогда задачу нахождения изменений температуры на поверхности в прошлом можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} W_t + w(z)W_z + f(t) = a^2 W_{zz}, & 0 < t < t_f, \quad 0 < z < H, \\ W(0, t) = 0, & 0 < t \leq t_f, \\ W_z(H, t) = 0, & 0 < t \leq t_f, \\ W(z, 0) = 0, & 0 < z < H, \\ W(z, t_f) = s(z), & 0 < z < H. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь $f(t) = \mu'(t)$ и $s(z) = \theta(z) - \mu(t_f)$. Так как $\mu(t)$ – конечный отрезок ряда Фурье, $f(t)$ также является конечным отрезком ряда Фурье, $f(t) = \sum_{k=-m}^m f_k \cdot \exp\left(i2\pi k \frac{t}{t_f}\right)$.

Так как $f(t) = \mu'(t)$; $\mu(0) = 0$ то функция $\mu(t)$ находится однозначно для $f(t) \in \mathbb{C}[0, t_f]$. Таким образом, установив единственность определения $f(t)$, можно установить единственность определения $\mu(t)$.

Для доказательства единственности решения задачи (5) нужно установить, что если $s(z) = 0$, то $W(z, t) \equiv 0$ и $f(t) \equiv 0$.

Решение задачи (5) дается формулой:

$$W(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n e_n(z) \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} \cdot f(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Здесь $e_n(z)$ и λ_n – собственные функции и собственные значения соответствующей задачи Штурма – Лиувилля:

$$\begin{cases} a^2 \frac{d^2 Z}{dz^2}(z) - w(z) \frac{dZ}{dz}(z) + \lambda Z(z) = 0, & 0 < z < H; \\ Z(0) = \frac{dZ}{dz}(H) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Известно, что $\{e_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ – полная ортонормированная система, $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $\lambda_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$. Из условия $W(z, t_f) = 0$ получим, что $\forall n \in \mathbb{N}$: $I_n \int_0^{t_f} e^{-\lambda_n(t_f-\tau)} \cdot f(\tau) d\tau = 0$. Здесь $I_n = -\int_0^H e^{z^2/2} \cdot e_n(z) dz \neq 0$ на некоторой последовательности номеров согласно следующей лемме.

Лемма

Пусть $\{e_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ – собственные функции и собственные значения задачи Штурма – Лиувилля.

Тогда существует такая подпоследовательность $\{k_n\}$, что $I_{k_n} = -\int_0^H e^{z^2/2} \cdot e_{k_n}(z) dz \neq 0$ ($\forall k_n$).

Доказательство

Предположим противное. Следовательно $\exists N \in \mathbb{N}$: $I_n = 0$, $\forall n \geq N$, т.е. функция $\psi(z) = e^{z^2/2}$ ортогональна всем функциям $e_n(z)$ с номерами $n \geq N$. Так как $\{e_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис в $L_2(0, H)$, получим, что $\psi(z) = \sum_{n=1}^{N-1} I_n \cdot e_n(z)$. Но $\psi(0) = 1$, а все $e_n(0) = 0$. Следовательно, получаем противоречие, и лемма доказана.

Таким образом, целая функция $F(\lambda) = \int_0^{t_f} e^{\lambda\tau} \cdot f(\tau) d\tau$ имеет бесконечное число нулей. В случае, когда $f(t)$ – конечный отрезок ряда Фурье, это возможно лишь при $f(t) \equiv 0$. Следовательно, и $\mu(t) \equiv 0$. Таким образом, единственность установлена.

Покажем, что такое решение также обладает свойством устойчивости. Пусть имеются два решения задачи (5) $W_1(z, t), f_1(t)$ и $W_2(z, t), f_2(t)$, отвечающие близким условиям переопределения $s_1(z)$ и $s_2(z)$. Покажем, что эти решения также близки для случая, когда $f(t)$ является конечным отрезком ряда Фурье.

Из формулы (6) и условия переопределения $W(z, t_f) = s(z)$ следует, что:

$$s(z) = \int_0^{t_f} K(z, \tau) f(\tau) d\tau. \quad (8)$$

Здесь ядро $K(z, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n e_n(z) e^{-\lambda_n(t_f-\tau)}$.

Уравнение (8) представляет из себя уравнение Фредгольма первого рода. Это классическая некорректно поставленная задача. Если $f(t)$ – конечный отрезок ряда Фурье, то для уравнения (8) было установлено свойство единственности, т.е. из условия $s(z) = 0$, $z \in [0, H]$ следует, что $f(t) = 0$, $t \in [0, t_f]$.

Так как $\{e_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис в $L_2(0, H)$, то для случая $f(t) = \sum_{k=-m}^m f_k \cdot \exp\left(i2\pi k \frac{t}{t_f}\right)$

уравнение (8) эквивалентно следующей системе линейных уравнений:

$$s_n = I_n \sum_{k=-m}^m f_k \cdot \int_0^{t_f} e^{-\lambda_n(t_f-\tau)} e^{i2\pi k \frac{\tau}{t_f}} d\tau, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

где $s_n = \frac{1}{\|e_n(z)\|^2} \int_0^H s(z) e_n(z) dz$; неизвестными являются f_k , $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$.

Число уравнений бесконечно; число неизвестных $2m + 1$, следовательно, система в общем случае при произвольных s_n решения не имеет. Таким образом, исследуемая задача сводится к решению СЛАУ вида:

$$\mathbf{A}\mathbf{f} = \mathbf{s}, \text{ где } \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_{-m} \\ f_{-m+1} \\ \vdots \\ f_0 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}; \mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}; \mathbf{A} = (\alpha_{pq})_{p=1,2,\dots; q=1,2,\dots,2m+1}, \alpha_{pq} = I_p \int_0^{t_f} e^{-\lambda_p(t_f-\tau)} e^{i2\pi q \frac{\tau}{t_f}} d\tau.$$

Для исследуемой задачи доказана теорема единственности. Поэтому однородная задача имеет только нулевое решение. Докажем, что в этом случае есть и устойчивость в следующем смысле. Пусть имеется два решения $\mathbf{f}^{(1)}$ и $\mathbf{f}^{(2)}$, отвечающие таким столбцам $\mathbf{s}^{(1)}$ и $\mathbf{s}^{(2)}$, что $\mathbf{s}^{(1)}$ и $\mathbf{s}^{(2)}$ близки по норме $\|\mathbf{s}^{(1)} - \mathbf{s}^{(2)}\| = \sup_{i \in N} |s_i^{(1)} - s_i^{(2)}|$, то и соответствующие решения близки по норме.

Рассмотрим линейный оператор $A: R^n \rightarrow C_0$. Здесь C_0 – пространство числовых последовательностей $(s_1, \dots, s_n, \dots)$ сходящихся к нулю (так как коэффициенты Фурье стремятся к нулю), с матрицей A в некотором базисе. Найдем $\text{Im}A$ – образ этого оператора.

Утверждение

Пусть $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ – какой-либо базис R_n . Тогда векторы $A\mathbf{e}_1, \dots, A\mathbf{e}_n$ образуют базис в $\text{Im}A$.

Доказательство

Возьмем произвольный вектор $\mathbf{z} \in \text{Im}A$. По определению $\text{Im}A \exists \mathbf{x} \in R^n$ такой, что $A\mathbf{x} = \mathbf{z}$.

Разложим вектор $\mathbf{x}$ по базису $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$: $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$. Тогда в силу линейности оператора A : $\mathbf{z} = A\mathbf{x} = x_1A\mathbf{e}_1 + x_2A\mathbf{e}_2 + \dots + x_nA\mathbf{e}_n$. Следовательно, разложение существует.

Докажем единственность такого разложения, т.е. линейную независимость элементов $A\mathbf{e}_1, \dots, A\mathbf{e}_n$.

Если $\alpha_1A\mathbf{e}_1 + \alpha_2A\mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_nA\mathbf{e}_n = 0$, тогда в силу линейности получим $A(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{e}_n) = 0$. Так как ядро оператора – нулевое, то $\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{e}_n = 0$. Отсюда в силу линейной независимости $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Утверждение доказано.

Следствие

$\text{Im}A$ – конечномерное (n -мерное) подпространство C_0 .

Линейный оператор A действует из R^n в $V_n = \text{Im}A$ и имеет нулевое ядро. Следовательно, A имеет обратный оператор $A^{-1}: V_n \rightarrow R^n$, A^{-1} – линейный ограниченный оператор.

Если $A\mathbf{f}^{(l)} = \mathbf{s}^{(l)}$, $l = 1, 2$, то $\mathbf{f}^{(l)} = A^{-1}\mathbf{s}^{(l)}$, $l = 1, 2$. Таким образом, $\mathbf{f}^{(2)} - \mathbf{f}^{(1)} = A^{-1}(\mathbf{s}^{(2)} - \mathbf{s}^{(1)})$, и справедлива оценка устойчивости обратной задачи $\|\mathbf{f}^{(2)} - \mathbf{f}^{(1)}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\mathbf{s}^{(2)} - \mathbf{s}^{(1)}\|$ в силу ограниченности A^{-1} .

Таким образом, если для двух «близких» переопределений существуют решения обратной задачи в виде отрезка ряда Фурье, то эти решения «близки». Следовательно, в данном случае устойчивость восстановления температуры на поверхности в прошлом доказана.

Заключение

На практике измеренные температуры в скважинах содержат непрерывный набор гармоник. Это связано с ошибками измерений и неизвестной природой климатических изменений. Таким образом, в общем случае задача реконструкции прошлых температур не обладает свойством единственности и устойчивости.

Фактически все предыдущие реконструкции прошлых температур поверхности неявно предполагали, что восстановленные температуры поверхности могут быть представлены конечным набором гармоник. В этих случаях амплитуды гармоник могут быть найдены, а решения единственны и устойчивы.

Финансирование

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации и выполнена по теме государственного задания FSWU-2023-0031.

Конфликт интересов

Конфликт интересов отсутствует.

Вклад авторов

О.В. Нагорнов – постановка задачи, разработка математической модели, участие в проведении исследования и обсуждения результатов;

С.А. Тюфлин – участие в постановке задачи и разработке математической модели, проведение вычислений, анализ результатов;

В.Л. Камынин – участие в проведении исследования и обсуждения результатов.

Список литературы

1. Jones P.D., Mann M.E. Climate over past millennia // *Reviews of Geophysics*, 2004. V. 42. RG2002.
2. Paterson W.S.B. The Physics of Glaciers, 3rd ed. Butterworth–Heinemann, Burlington, 1994. 496 p.
3. Нагорнов О.В., Тюфлин С.А., Коновалов Ю.В., Костин А.Б. Обратные задачи палеотермометрии. М.: МИФИ, 2008. 176 с.
4. Kotlyakov V.M., Arkhipov S.M., Henderson K.A., Nagornov O.V. Deep drilling of glaciers in Eurasian Arctic as a source of paleoclimatic records // *Quaternary Science Reviews*, 2004. V. 23. P. 1371–1390.
5. Dahl-Jensen D., Mosegaard K., Gundestrup N., Clow G.D., Johnsen S.J., Hansen A.W., Balling N. Past temperatures directly from the Greenland Ice Sheet // *Science*, 1998. V. 282. P. 268–271.
6. Shen P.Y., Beck A.E. Least squares inversion of borehole temperature measurements in functional space // *Journal of Geophysical Research*, 1991. V. 96. P. 19965–19979.
7. Beltrami H., Cheng L.Z., Mareschal J.C. Simultaneous inversion of borehole temperature data for past climate determination // *Geophysical Journal International*, 1997. V. 129. P. 311–318.
8. Beltrami H., Matharoo G., Tarasov L., Rath V., Smerdon J.E. Numerical studies on the Impact of the Last Glacial Cycle on recent borehole temperature profiles: implications for terrestrial energy balance // *Climate of the Past*, 2014. V. 10. P. 1693–1706.
9. Harris R.N., Chapman D.S. Geothermics and climate change: 1. Analysis of borehole temperatures with emphasis on resolving power // *Journal of Geophysical Research*, 1998. V. 103(B4). P. 7360–7370.
10. Pollack H.N., Demezhko D.Yu., Duchkov A.D., Golovanova I.V., Huang S., Shchapov V.A., Smerdon J.E. Surface temperature trends in Russia over the past five centuries reconstructed from borehole temperatures // *Journal of Geophysical Research*, 2003. V. 108(B4). P. 2-1-2-12.
11. Liu J., Zhang T., Clow G.D., Jafarov E. Application of Tikhonov regularization to reconstruct past climate record from borehole temperature // *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2021. V. 29. Iss. 3. P. 3167–3189.
12. Нагорнов О.В., Тюфлин С.А. Об интерпретации результатов палеорекострукций по данным скважинных температурных измерений в ледниках // *Вестник НИЯУ МИФИ*, 2018. Т. 7. № 2. С. 170–174.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2025, vol. 14, no. 5, pp. 424–430

Properties of the inverse problem solutions for paleotemperature reconstructions

O. V. Nagornov[✉], S. A. Tyufin, V. L. Kamynin

National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409, Russia

[✉] nagornov@yandex.ru

Received August 15, 2025; revised October 04, 2025; accepted October 7, 2025

The studies of the past temperatures at the Earth surface is important problem for prediction of the climate changes. The systematic instrumental temperature measurements took place no more than two centuries. Thus, indirect estimations of the past temperatures present main information on the past

climate. It is considered that the measured temperatures in the boreholes can be used to reconstruct the past surface temperatures at the Earth. The inverse problem on the past surface temperature reconstruction based on the measured borehole temperature in glaciers and rocks is studied. In common case the solution of this problem is not unique and stable. There were many such reconstructions, however, the properties of such solutions have not been derived. We find out that the solution of this problem is not unique and stable. Unfortunately, various previous reconstructions do not take into account these properties. We prove in this paper that the uniqueness and stability properties take place for the inverse problems that assume solution in the form of the finite segments of the Fourier series.

Keywords: inverse problems, climate reconstruction, heat and mass transfer.

References

1. Jones P.D., Mann M.E. Climate over past millennia. *Reviews of Geophysics*, 2004. Vol. 42. RG2002.
2. Paterson W.S.B. *The Physics of Glaciers*, 3rd ed. Butterworth–Heinemann, Burlington, 1994. 496 p.
3. Nagornov O.V., Tyuflyin S.A., Kononov Yu.V., Kostin A.B. Obratnyye zadachi paleotermometrii [Inverse problems of paleothermometry]. Moscow. MEPhI Publ., 2008. 176 p.
4. Kotlyakov V.M., Arkhipov S.M., Henderson K.A., Nagornov O.V. Deep drilling of glaciers in Eurasian Arctic as a source of paleoclimatic records. *Quaternary Science Reviews*, 2004. Vol. 23. Pp. 1371–1390.
5. Dahl-Jensen D., Mosegaard K., Gundestrup N., Clow G.D., Johnsen S.J., Hansen A.W., Balling N. Past temperatures directly from the Greenland Ice Sheet. *Science*, 1998. Vol. 282. Pp. 268–271.
6. Shen P.Y., Beck A.E. Least squares inversion of borehole temperature measurements in functional space. *Journal of Geophysical Research*, 1991. Vol. 96. Pp. 19965–19979.
7. Beltrami H., Cheng L.Z., Mareschal J.C. Simultaneous inversion of borehole temperature data for past climate determination. *Geophysical Journal International*, 1997. Vol. 129. Pp. 311–318.
8. Beltrami H., Matharoo G., Tarasov L., Rath V., Smerdon J.E. Numerical studies on the Impact of the Last Glacial Cycle on recent borehole temperature profiles: implications for terrestrial energy balance. *Climate of the Past*, 2014. Vol. 10. Pp. 1693–1706.
9. Harris R.N., Chapman D.S. Geothermics and climate change: 1. Analysis of borehole temperatures with emphasis on resolving power. *Journal of Geophysical Research*, 1998. Vol. 103(B4). Pp. 7360–7370.
10. Pollack H.N., Demezhko D.Yu., Duchkov A.D., Golovanova I.V., Huang S., Shchapov V.A., Smerdon J.E. Surface temperature trends in Russia over the past five centuries reconstructed from borehole temperatures. *Journal of Geophysical Research*, 2003. Vol. 108(B4). Pp. 2-1-2-12.
11. Liu J., Zhang T., Clow G.D., Jafarov E. Application of Tikhonov regularization to reconstruct past climate record from borehole temperature. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2021. Vol. 29. Iss. 3. Pp. 3167–3189.
12. Nagornov O.V., Tyuflyin S.A. Ob interpretatsii rezul'tatov paleorekonstruktsiy po dannym Skvazhinnykh temperaturnykh izmereniy v lednikakh. [About paleo-reconstructions based on the borehole temperature measurements in glaciers]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2018. Vol. 7. No. 2. Pp. 170–174 (in Russian).