ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА "МИФИ", 2019, том 8, № 5, с. 415–427

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ В НЕЯВНОМ ВИДЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ КОНВЕКТИВНОГО МАССО- И ТЕПЛОПЕРЕНОСА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. Д. Полянин[1,2,3,*]

[1] Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия
[2] Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, 115409, Россия
[3] Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия
**e-mail: polyanin@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 30.01.2019 г.
После доработки 30.01.2019 г.
Принята к публикации 26.02.2019 г.

Рассматриваются различные классы нелинейных уравнений конвективного массо- и теплопереноса с переменными коэффициентами $c(x)u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)g(u)u_x$, которые допускают точные решения. Основное внимание уделяется нелинейным уравнениям достаточно общего вида, которые содержат несколько произвольных функций, зависящих от искомой функции u и пространственной переменной x (важно отметить, что точные решения нелинейных уравнений математической физики, которые зависят от произвольных функций и поэтому обладают достаточной общностью, представляют наибольший практический интерес для тестирования различных численных и приближенных методов решения соответствующих начально-краевых задач). Используется метод поиска точных решений, который основан на представлении решения в неявной форме $\int h(u)du = \xi(t) + \eta(x)$, где $h(u)$, $\xi(t)$, $\eta(x)$ – искомые функции, конкретный вид которых определяется в ходе дальнейшего анализа возникающих функционально-дифференциальных уравнений. Приведены примеры конкретных нелинейных уравнений конвективной диффузии и их точных решений. Описан ряд новых точных решений типа обобщенной бегущей волны и решений с функциональным разделением переменных.

Ключевые слова: уравнения массо- и теплопереноса, нелинейные уравнения конвективной диффузии, уравнения с переменными коэффициентами, точные решения в неявном виде, решения с функциональным разделением переменных, решения типа обобщенной бегущей волны

DOI: 10.1134/S2304487X19040084

1. КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Будем рассматривать эволюционные уравнения, в которых x и t – независимые переменные, а $u = u(x,t)$ – искомая функция.

Преобразования, редукции и точные решения различных классов нелинейных уравнений диффузионного типа, которые содержат реакционные или/и конвективные члены и не зависят явно от переменных x и t, рассматривались во многих работах (см., например, [1–19] и цитируемую в них литературу). Для построения точных решений чаще всего использовались классический и неклассические методы исследования симметрий [1–3, 5, 7, 9, 14, 15, 17–19], методы обобщенного и функционального разделения переменных [6, 8, 10, 11, 14, 16, 17], метод дифференциальных связей [6, 10, 13, 14, 16, 17].

В [10, 17, 20–25] были описаны некоторые точные решения нелинейных уравнений реакционно-диффузионного типа с переменными коэффициентами автономного вида, зависящими от пространственной координаты x. В [26–31] исследовались симметрии и были приведены некоторые точные решения нелинейных уравнений конвективной диффузиии с переменными коэффициентами автономного вида. Другие родственные и более сложные нелинейные эволюционные уравнения рассматривались в [17, 32–34]. В [17, 35] описано много систем уравнений реакционно-диффузионного типа, допускающих точные решения (в цитируемых книгах приведен обширный список публикаций на эту тему).

Отметим также, что в последнее время большое внимание уделяется изучению наследственных систем, которые моделируются реакционно-диффузионными уравнениями с запаздыванием.

Точные решения таких и более сложных родственных уравнений получены в [36–44].

В данной статье будут рассматриваться допускающие точные решения нелинейные уравнения конвективной диффузии достаточно общего вида, которые зависят от одной или нескольких произвольных функций. Важно отметить, что точные решения нелинейных уравнений математической физики, которые содержат произвольные функции и поэтому обладают значительной общностью, представляют наибольший практический интерес для тестирования численных и приближенных аналитических методов интегрирования соответствующих начально-краевых задач.

2. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ КОНВЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИИ. МЕТОД ПОИСКА ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ

2.1. Класс рассматриваемых нелинейных уравнений с переменными коэффициентами. Предварительные замечания

Будем рассматривать одномерные нелинейные уравнения конвективного массо- и теплопереноса с переменными коэффициентами

$$c(x)u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)g(u)u_x. \qquad (1)$$

Отметим, что при $a(x) = c(x) = x^n$, где x – радиальная координата, уравнение (1) описывает конвективно-диффузионные процессы с радиальной симметрией в двумерном (при $n = 1$) и трехмерном (при $n = 2$) случаях.

Пример 1. Рассмотрим сначала более простое нелинейное уравнение без конвективного члена

$$u_t = [f(u)u_x]_x, \qquad (2)$$

которое содержит произвольную функцию $f(u)$ и является частным случаем уравнения (1) при $a(x) = b(x) = c(x) = 1$, $g(u) = 0$. Поскольку коэффициенты этого уравнения не зависят явно от x и t, оно допускает точное решение типа бегущей волны

$$u = u(z), \quad z = x + kt, \qquad (3)$$

где k – произвольная постоянная. Подставив (3) в (2), получим ОДУ $ku'_z = [f(u)u'_z]'_z$. Интегрируя, находим его решение в неявном виде

$$\int \frac{f(u)du}{ku + C_1} = x + kt + C_2, \qquad (4)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. В правой части (4) была сделана замена z на исходные переменные с помощью (3).

Видно, что даже для простых функций, например, $f(u) = u$, $f(u) = e^u$, $f(u) = \sin u$, $f(u) = \cos u$, решение (4) не может быть выражено через элементарные функции в явном виде. Поэтому поиск точных решений в явном виде уравнения (1), значительно более сложного, чем (2), представляется малоперспективным.

Далее основное внимание будет уделено уравнениям достаточно общего вида (1), которые зависят от одной или двух произвольных функций. Для построения точных решений этого уравнения будет использован метод [25], основанный на обобщении решения (4).

Замечание 1. В [31] были описаны некоторые точные решения уравнения (1) при $f(u) = 1$, причем функция $g(u)$ считалась произвольной.

2.2. Общее описание метода поиска точных решений с функциональным разделением переменных в неявном виде

Точные решения уравнения (1) (или другого нелинейного дифференциального уравнения в частных производных) ищутся в неявном виде

$$\int h(u)du = \xi(t) + \eta(x), \qquad (5)$$

где функции $h(u)$, $\xi(t)$, $\eta(x)$ определяются в ходе дальнейшего анализа. Представление решения в виде (5) основано на естественном обобщении решения (4), которое осуществляется следующим образом:

$$\frac{f(u)}{ku + C_1} \Rightarrow h(u), \quad kt \Rightarrow \xi(t), \quad x + C_2 \Rightarrow \eta(x).$$

Далее аргументы функций $a = a(x)$, $b = b(x)$, $c = c(x)$, $f = f(u)$, $g = g(u)$, $h = h(u)$, $\xi = \xi(t)$, $\eta = \eta(x)$, которые входят в уравнение (1) и решение (5), часто будут опускаться.

Опишем процедуру построения точного решения в неявном виде. Сначала, используя (5), вычисляются производные u_x, u_t, u_{xx}, ..., которые выражаются в терминах функций h, ξ, η и их производных. Затем полученные выражения для производных подставляются в уравнение (1) после чего исключается переменная t с помощью (5). В результате (при подходящем выборе функции ξ, см. далее) приходим к функционально-дифференциальному уравнению билинейного вида

$$\sum_{j=1}^{N} \varphi_j[x]\psi_j[u] = 0,$$
$$\varphi_j[x] \equiv \varphi_j(x, \eta, \eta'_x, \eta''_{xx} \ldots), \qquad (6)$$
$$\psi_j[u] \equiv \psi_j(u, h, h'_u, h''_{uu}, \ldots).$$

Здесь $\varphi_j[x]$ и $\psi_j[u]$ – дифференциальные формы (в некоторых случаях функциональные коэффициенты), зависящие соответственно только от x и u. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение. Функционально-дифференциальные уравнения вида (6) могут допускать решения только в тех случаях, когда формы $\psi_j[u]$ ($j = 1,\dots,N$) связаны линейными соотношениями [14, 17]:

$$\sum_{j=1}^{m_i} k_{ij}\psi_j[u] = 0, \quad i = 1,\dots,n, \tag{7}$$

где k_{ij} – некоторые постоянные, $2 \le m_i \le N$, $1 \le n \le N - 1$. При этом надо рассматривать также вырожденные случаи, когда помимо линейных соотношений отдельные дифференциальные формы $\psi_j[u]$ обращаются в нуль.

Аналогичное утверждение справедливо также для форм $\varphi_j[x]$.

В разд. 3 сформулированное утверждение будет использовано для построения точных решений некоторых функционально-дифференциальных уравнений вида (6), которые возникают при поиске решений соответствующих нелинейных уравнений реакционно-диффузионного типа (1).

Замечание 2. Поиск решения в неявном виде с интегральным членом в левой части (5) часто приводит к уравнениям для определения функции h более низкого порядка, чем при поиске точных решений в явном виде. Кроме того, неявная форма записи решения обычно приводит к более простым явным представлениям функций g и f через h (при поиске точных решений в явном виде функции g и f нередко выражаются через h в параметрической форме [17]). Отметим также, что различные линейные соотношения вида (7) в случае общего положения обычно соответствуют различным решениям рассматриваемого уравнения.

2.3. Вывод функционально-дифференциального уравнения. Процедура его решения

Будем искать точные решения нелинейных уравнений конвективной диффузии вида (1) в неявной форме (5). Дифференцируя (5) по t и x, имеем

$$hu_t = \xi'_t \Rightarrow u_t = \frac{\xi'_t}{h}; \quad hu_x = \eta'_x \Rightarrow u_x = \frac{\eta'_x}{h};$$

$$(afu_x)_x = \left[(a\eta'_x)\frac{f}{h}\right]_x = (a\eta'_x)'_x\frac{f}{h} + a(\eta'_x)^2\frac{1}{h}\left(\frac{f}{h}\right)'_u.$$

Подставив эти выражения в (1), получим функционально-дифференциальное уравнение

$$\xi'_t = \frac{1}{c}\left[(a\eta'_x)'_x f + a(\eta'_x)^2\left(\frac{f}{h}\right)'_u + b\eta'_x g\right]. \tag{8}$$

Уравнение (8), зависящее от x, t, u, с помощью дифференцирования по x можно свести к функционально-дифференциальному уравнению билинейного вида (6) при $N = 6$, а затем использовать метод решения, описанный в разд. 2.2. Однако такой путь достаточно сложно реализовать технически, поскольку после дифференцирования повышается порядок производных в редуцированном уравнении и для определения функции $\xi(t)$ на заключительном этапе все равно необходимо вернуться к анализу уравнения (8).

В данной работе для решения уравнения (8) будем применять прямой метод, основанный на использовании функций $\xi(t) = kt$, $\xi(t) = ke^{\lambda t}$, $\xi(t) = k\ln t$, которые были получены в [31] для уравнений (1) специального вида при $f(u) = 1$ и произвольной $g(u)$.

3. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ РАЗДЕЛЕНИЕМ ПЕРЕМЕННЫХ В НЕЯВНОМ ВИДЕ

3.1. Решения типа обобщенной бегущей волны при $\xi(t) = kt$

Функционально-дифференциальное уравнение (8) представляет собой уравнение с разделенными переменными (левая часть зависит только от t, а правая – от x и u). Поэтому можно положить $\xi'_t = k = \text{const}$, что дает $\xi(t) = kt$. Рассматриваемая ситуация соответствует решениям типа обобщенных бегущих волн, заданных в неявной форме

$$\int h(u)du = kt + \int \theta(x)dx. \tag{9}$$

Здесь подынтегральные функции $h(u)$ и $\theta(x) = \eta'_x(x)$ будут определяться в ходе дальнейшего анализа из функционально-дифференциального уравнения

$$(a\theta)'_x f + a\theta^2\left(\frac{f}{h}\right)'_u + b\theta g - kc = 0, \tag{10}$$

которое получается в результате подстановки функций $\xi(t) = kt$ и $\theta(x) = \eta'_x(x)$ в (8). Уравнение (10) является функционально-дифференциальным уравнением билинейного вида (6) при $N = 4$.

Решение 1. Рассмотрим сначала вырожденный случай, когда дифференциальная форма $(f/h)'_u$ в (10) обращается в нуль. В этом случае уравнение (10) имеет решения, если выполняются соотношения

$$h = f, \quad g = A + Bf, \quad (a\theta)'_x + Bb\theta = 0, \\ Ab\theta - kc = 0, \tag{11}$$

где A и B – произвольные постоянные. Полагая $A = k$ в (11), приходим к уравнению

$$c(x)u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + \frac{c(x)}{\theta(x)}[k + Bf(u)]u_x, \tag{12}$$

которое для произвольных функций $a(x)$, $c(x)$, $f(u)$ и

$$\theta(x) = -\frac{B}{a(x)}\int c(x)dx - \frac{C_1}{a(x)}, \qquad (13)$$

имеет решение типа обобщенной бегущей волны

$$\int f(u)du = kt - B\int \frac{1}{a(x)}\Big(\int c(x)dx\Big)dx - \\ - C_1\int \frac{dx}{a(x)} + C_2. \qquad (14)$$

Здесь C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Пример 2. Полагая $c(x) = 1$, $B = 1$, $C_1 = C_2 = 0$ в (12)–(14), а затем переобозначая $a(x)$ на $xa(x)$, получим уравнение

$$u_t = [xa(x)f(u)u_x]_x - a(x)[k + f(u)]u_x,$$

которое допускает решение типа обобщенной бегущей волны в неявной форме

$$\int f(u)du = kt - \int \frac{dx}{a(x)}.$$

Здесь $a(x)$ и $f(u)$ — произвольные функции, k — произвольная постоянная.

Решение 2. Уравнению (10) можно удовлетворить, если имеют место соотношения

$$f = A, \quad g = \left(\frac{f}{h}\right)'_u, \\ A(a\theta)'_x - kc = 0, \quad b = -a\theta, \qquad (15)$$

где A — произвольная постоянная.

Из формул (15) при $c(x) = 1$, $A = 1$, $k = 1$ можно получить нелинейное уравнение конвективной диффузии

$$u_t = [a(x)u_x]_x - xg(u)u_x, \qquad (16)$$

где $a(x)$ — произвольная функция, а функция $g(u)$ следующим образом выражается через произвольную функцию $h = h(u)$:

$$g(u) = -h^{-2}h'_u. \qquad (17)$$

Уравнение (16) при условии (17) имеет точное решение

$$\int h(u)du = t + \int \frac{xdx}{a(x)} + C_1. \qquad (18)$$

Разрешая (17) относительно h, приходим к соотношению $h(u) = \left(\int g(u)du + C_2\right)^{-1}$. Исключая с помощью этого соотношения функцию h в (18), получим представление решения уравнения (16) в виде

$$\int\left(\int g(u)du + C_2\right)^{-1}du = t + \int \frac{xdx}{a(x)} + C_1. \qquad (19)$$

Здесь $a(x)$ и $g(u)$ — произвольные функции, C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Пример 3. Точное решение уравнения

$$u_t = (x^n u_x)_x - xg(u)u_x$$

определяется формулой (19) при $a(x) = x^n$.

Замечание 3. Уравнение (16) и его решение другим путем были получены в [31]. В [31] построен еще ряд точных решений уравнения (1), в котором полагалось $f(u) = 1$, а функция $g(u)$ считалась произвольной (эти решения здесь не приводятся).

Решение 3. Уравнению (10) можно удовлетворить, если положить

$$\left(\frac{f}{h}\right)'_u = A, \quad g = f, \\ (a\theta)'_x + b\theta = 0, \quad Aa\theta^2 - kc = 0, \qquad (20)$$

где A — произвольная постоянная. Из первого соотношения (20), находим

$$h(u) = f(u)/(Au + C_1). \qquad (21)$$

Полагая далее $c(x) = 1$, $A = 1$, $C_1 = 0$ в (20) и (21), получим нелинейное уравнение конвективной диффузии

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x - \frac{1}{2}a'_x(x)f(u)u_x, \qquad (22)$$

которое имеет два решения типа обобщенной бегущей волны в неявном виде

$$\int \frac{f(u)}{u}du = kt \pm \sqrt{k}\int \frac{dx}{\sqrt{a(x)}} + C_2. \qquad (23)$$

Уравнение (22) и формулы (23) содержат произвольные функции $a(x)$ и $f(u)$, а также произвольные постоянные k и C_2.

Решение 4. Уравнение (10) удовлетворяется, если взять

$$Af = \left(\frac{f}{h}\right)'_u, \quad g = 1, \\ (a\theta)'_x + Aa\theta^2 = 0, \quad b\theta = kc, \qquad (24)$$

где A — произвольная постоянная. Из уравнений (24), находим

$$h(u) = f(u)\left(A\int f(u)du + C_1\right)^{-1} = \\ = \frac{1}{A}\frac{d}{du}\ln\left(A\int f(u)du + C_1\right),$$

$$\theta(x) = \frac{1}{Aa(x)}\left(\int \frac{dx}{a(x)} + C_2\right)^{-1}, \quad b(x) = \frac{kc(x)}{\theta(x)},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Полагая $c(x)=1$ и $A=1$, приходим к нелинейному уравнению конвективной диффузии

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + ka(x)\left(\int \frac{dx}{a(x)} + C_2\right)u_x, \quad (25)$$

которое допускает точное решение

$$\int f(u)du + C_1 = e^{kt}\left(\int \frac{dx}{a(x)} + C_2\right). \quad (26)$$

Уравнение (25) и формулы (26) содержат две произвольные функции $a(x)$ и $f(u)$.

Пример 4. Подставляя $a(x)=1$, $C_1=C_2=0$ в (25) и (26), приходим к уравнению [17]:

$$u_t = [f(u)u_x]_x + kxu_x,$$

которое имеет решение $\int f(u)du = xe^{kt}$.

Пример 5. Полагая $a(x)=e^x$, $C_1=0$, $C_2=1$ в (25) и (26), получим уравнение конвективной диффузии

$$u_t = [e^x f(u)u_x]_x - ku_x,$$

которое имеет неинвариантное решение типа бегущей волны $\int f(u)du = -e^{kt-x}$.

Решение 5. Уравнению (10) можно удовлетворить, если положить

$$g = A_1 f + A_2, \quad \left(\frac{f}{h}\right)'_u = A_3 f + A_4, \quad (27)$$

$$\begin{gathered}(a\theta)'_x + A_3 a\theta^2 + A_1 b\theta = 0,\\ A_4 a\theta^2 + A_2 b\theta - kc = 0,\end{gathered} \quad (28)$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 — произвольные постоянные. Из второго уравнения (27) выразим функцию h через f:

$$h(u) = f(u)\left[A_3\int f(u)du + A_4 u + C_1\right]^{-1}, \quad (29)$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Уравнения (28) для заданных функций $a=a(x)$ и $c=c(x)$ позволяют найти две другие функции $b(x)$ и $\theta(x)$. Исключая $b(x)$ из уравнений (28), получим ОДУ первого порядка с квадратичной нелинейностью для функции $\theta(x)$ (уравнение Риккати [45]):

$$A_2 a\theta'_x + (A_2A_3 - A_1A_4)a\theta^2 + A_2 a'_x\theta + A_1kc = 0. \quad (30)$$

Подстановка

$$\theta = \lambda\frac{\zeta'_x}{\zeta}, \ \lambda = \frac{A_2}{A_2A_3 - A_1A_4} \ (A_2A_3 - A_1A_4 \neq 0), \quad (31)$$

приводит его к линейному ОДУ второго порядка

$$A_2\lambda(a\zeta'_x)'_x + A_1kc\zeta = 0. \quad (32)$$

Точные решения уравнения (32) для некоторых функций $a=a(x)$ и $c=c(x)$ можно найти в [45].

Используя последнее соотношение (28), выразим функциональный коэффициент b через θ:

$$b = -\frac{1}{A_2\theta}(A_4 a\theta^2 - kc). \quad (33)$$

Пример 6. При $a(x)=c(x)=1$ общее решение уравнения (32) имеет вид

$$\zeta = \begin{cases} C_2\cos(mx) + C_3\sin(mx) & \text{при} \quad A_1k(A_2A_3 - A_1A_4) > 0,\\ C_2\cosh(mx) + C_3\sinh(mx) & \text{при} \quad A_1k(A_2A_3 - A_1A_4) < 0,\end{cases} \quad (34)$$

где C_2, C_3 — произвольные постоянные, $m = \sqrt{|A_1k|/|A_2\lambda|}$. В частности, подставляя $A_1=A_2=A_4=1$, $A_3=2$, $C_2=1$, $C_3=0$, $k=-1$ в формулы (31), (33), (34), находим $m=\lambda=1$, $\zeta=\cosh x$, $\theta=\tanh x$, $b=-(\tanh x + \coth x)$.

Решение 6. Уравнение (10) также допускает решения, если имеют место соотношения

$$\begin{gathered}(a\theta)'_x = Ac, \quad a\theta^2 = Bc, \quad b\theta = c,\\ Af + B\left(\frac{f}{h}\right)'_u + g - k = 0,\end{gathered} \quad (35)$$

где A и B — произвольные постоянные.

Подставив в (35) $a(x)=b(x)=c(x)=\theta(x)=1$, $A=0$, $B=1$, получим решение типа бегущей волны (3), которое здесь опускается.

Решение 7. Полагая $c(x)=1$ и $A=B=1$ в первых трех уравнениях (35), имеем

$$a(x) = x^2, \quad b(x) = x, \quad \theta(x) = 1/x. \quad (36)$$

В результате получим уравнение

$$u_t = [x^2 f(u)u_x]_x + xg(u)u_x, \quad (37)$$

где

$$g(u) = k - f(u) - \frac{d}{du}\left[\frac{f(u)}{h(u)}\right], \quad (38)$$

которое допускает решение в неявном виде

$$\int h(u)du = kt + \ln x. \qquad (39)$$

Отметим, что уравнение (37)–(38) зависит от двух произвольных функций $f = f(u)$ и $h = h(u)$. Из (38) можно выразить функцию $h(u)$ через $f(u)$ и $g(u)$.

Замечание 4. Инвариантное решение (39) уравнения (37) можно искать в явном виде $u = U(z)$, где $z = kt + \ln x$ (в этом случае не используется соотношение (38) между функциями g и h). Функция $U(z)$ определяется из автономного ОДУ

$$[f(U)U'_z]'_z + [f(U) + g(U) - k]U'_z = 0,$$

которое легко интегрируется.

Замечание 5. Более общее, чем (37), нелинейное уравнение конвективной диффузии с запаздыванием

$$u_t = [x^2 f(u,w)u_x]_x + xg(u,w)u_x, \quad w = u(x, t-\tau),$$

где τ — время запаздывания, также имеет точное решение вида $u = U(z)$, где $z = kt + \ln x$.

3.2. Решения с функциональным разделением переменных при $\xi(t) = ke^{\lambda t}$

Вернемся к уравнению (8). В разд. 3.1 рассматривался простейший случай линейной зависимости $\xi(t) = kt$, который сразу приводил к функционально-дифференциальному уравнению с двумя переменными вида (6).

Функция $\xi(t)$ входит в формулу (5) линейным образом. Если выбрать $\xi(t) = ke^{\lambda t}$ (k — произвольная постоянная), тогда решение принимает вид

$$H(u) = ke^{\lambda t} + \eta(x), \quad H(u) = \int h(u)du, \qquad (40)$$

и экспоненту $e^{\lambda t}$ удается исключить из уравнения (8) с помощью (40). В результате приходим к функционально-дифференциальному уравнению вида (6) при $N = 5$:

$$\lambda\eta - \lambda H + \frac{(a\eta'_x)'_x}{c}f + \frac{a(\eta'_x)^2}{c}\left(\frac{f}{h}\right)'_u + \frac{b\eta'_x}{c}g = 0. \qquad (41)$$

Замечание 6. Уравнение (41) можно вывести, используя другие соображения. Действительно, переписав (5) в виде

$$\xi/(H - \eta) = 1, \qquad (42)$$

умножим правую часть уравнения (8) на $\xi/(H-\eta)$. В результате получим

$$\frac{\xi'_t}{\xi} = \frac{1}{c(H-\eta)}\left[(a\eta'_x)'_x f + a(\eta'_x)^2\left(\frac{f}{h}\right)'_u + b\eta'_x g\right]. \qquad (43)$$

В уравнении (43) переменные разделены: левая часть зависит только от t, а правая — от x и u. Приравнивая обе части (43) константе λ, получим два уравнения. Левая часть (43) дает уравнение $\xi'_t/\xi = \lambda$, которое имеет решение $\xi = ke^{\lambda t}$. Правая часть (43) приводит к уравнению (41).

Решение 8. Уравнению (41) можно удовлетворить, если положить

$$f = C_1uh + C_2h, \quad g = \lambda H - C_1C_3uh - C_2C_3h, \qquad (44)$$

$$b\eta'_x = c, \quad (a\eta'_x)'_x = C_3c, \quad C_1a(\eta'_x)^2 + \lambda c\eta = 0, \qquad (45)$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. Соотношения (44) и (45) включают две произвольные функции h и c, а функции f, g, a, b, η через них выражаются.

Общее решение системы, состоящей из двух последних уравнений (45), определяется формулами

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{C_5}{c(x)}\left[C_3\int c(x)dx + C_4\right]^{2+\lambda/(C_1C_3)}, \\ \eta(x) &= -\frac{C_1}{C_5\lambda}\left[C_3\int c(x)dx + C_4\right]^{-\lambda/(C_1C_3)}, \end{aligned} \qquad (46)$$

где C_4 и C_5 — произвольные постоянные.

Пример 7. Подставив $c(x) = 1$, $C_1 = C_3 = C_5 = 1$, $C_2 = C_4 = 0$, $\lambda = n - 2$ в (45) и (46), имеем

$$a(x) = x^n, \quad b(x) = x^{n-1}, \quad \eta(x) = x^{2-n}/(2-n).$$

Учитывая соотношения (44), приходим к нелинейному уравнению

$$\begin{aligned} &u_t = [x^n f(u)u_x]_x + x^{n-1}g(u)u_x, \\ &f(u) = uh(u), \quad g(u) = (n-2)\int h(u)du - uh(u), \end{aligned} \qquad (47)$$

где $h(u)$ — произвольная функция, $n \neq 2$ — произвольная постоянная, которое допускает решение с функциональным разделением переменных в неявной форме

$$\int h(u)du = ke^{(n-2)t} + \frac{x^{2-n}}{2-n}; \qquad (48)$$

k — произвольная постоянная.

Подставляя $h = f/u$ в (47), получим уравнение

$$u_t = [x^n f(u)u_x]_x + x^{n-1}\left[(n-2)\int\frac{f(u)}{u}du - f(u)\right]u_x,$$

решение которого записывается так:

$$\int\frac{f(u)}{u}du = ke^{(n-2)t} + \frac{x^{2-n}}{2-n}.$$

Решение 9. Уравнению (41) можно удовлетворить другим способом, если положить

$$f = 1, \quad g = \lambda H + C_1 \frac{h'_u}{h^2}, \qquad b\eta'_x = c, \quad (a\eta'_x)'_x + \lambda c\eta = 0, \quad a(\eta'_x)^2 - C_1 c = 0, \tag{49}$$

где C_1 – произвольная постоянная. Соотношения (49) содержат две произвольные функции h и c, а остальные функции g, a, b, η через них выражаются.

Общее решение системы, состоящей из двух последних уравнений (49), имеет вид

$$a(x) = \frac{C_4^2}{C_1 c(x)} \exp\left(-\frac{\lambda}{C_1}\eta^2\right), \qquad \int \exp\left(-\frac{\lambda}{2C_1}\eta^2\right) d\eta = \frac{C_1}{C_4}\int c(x)dx + C_5, \tag{50}$$

где C_4 и C_5 – произвольные постоянные (это решение можно выразить через обратную функцию к интегралу вероятностей).

Замечание 7. Если в двух последних уравнениях (49) функцию $\eta = \eta(x)$ считать заданной, то решение этих уравнений определяется формулами

$$a(x) = \frac{C_4}{\eta'_x(x)} \exp\left(-\frac{\lambda}{2C_1}\eta^2\right), \qquad c(x) = \frac{C_4}{C_1}\eta'_x(x) \exp\left(-\frac{\lambda}{2C_1}\eta^2\right).$$

3.3. Решения с функциональным разделением переменных при $\xi(t) = k\ln t$

Подставляя логарифмическую функцию $\xi(t) = k\ln t$ в (5), ищем решения в виде

$$\int h(u)du = k\ln t + \eta(x). \tag{51}$$

Исключая t из (8) (при $\xi = k\ln t$) и (51), получим функционально-дифференциальное уравнение

$$(a\eta'_x)'_x f + a(\eta'_x)^2 \left(\frac{f}{h}\right)'_u + b\eta'_x g - kce^{\eta/k}e^{-H/k} = 0, \qquad H = \int h(u)du. \tag{52}$$

Замечание 8. Уравнение (52) можно вывести, исходя из других соображений. Действительно, представив формулу (5) в виде

$$e^{(H-\eta-\xi)/k} = 1,$$

где k – некоторая постоянная, умножим правую часть уравнения (8) на $e^{(H-\eta-\xi)/k}$. В результате, после элементарных преобразований, имеем

$$e^{\xi/k}\xi'_t \frac{e^{(H-\eta)/k}}{c}\left[(a\eta'_x)'_x f + a(\eta'_x)^2\left(\frac{f}{h}\right)'_u + b\eta'_x g\right]. \tag{53}$$

В уравнении (53) переменные разделены: левая часть зависит только от t, а правая – от x и u. Приравнивая обе части (53) константе λ, получим два уравнения. Левая часть (53) приводит к уравнению $e^{\xi/k}\xi'_t = \lambda$, которое имеет решение $\xi = k\ln(t + t_0) + k\ln(\lambda/k)$. Правая часть (53) при $\lambda = k$ приводит к уравнению (52).

Решение 10. Сначала рассмотрим вырожденный случай, когда дифференциальная форма $(f/h)'_u$ обращается в нуль. В этом случае уравнение (52) допускает решения, если выполняются соотношения

$$h = f, \quad g = Af + Be^{-F/k}, \qquad (a\eta'_x)'_x + Ab\eta'_x = 0, \quad Bb\eta'_x - kce^{\eta/k} = 0, \tag{54}$$

где A и B – произвольные постоянные, $F = \int f(u)du$. Из (54) при $B = k$ следует, что уравнение

$$c(x)u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + \frac{c(x)e^{\eta(x)/k}}{\eta'_x(x)}[Af(u) + ke^{-F(u)/k}]u_x, \tag{55}$$

где $a(x)$, $c(x)$, $f(u)$ – произвольные функции, а функция $\eta = \eta(x)$ является решением нелинейного ОДУ второго порядка

$$[a(x)\eta'_x]'_x + Ac(x)e^{\eta/k} = 0, \tag{56}$$

имеет решение с обобщенным разделением переменных

$$\int f(u)du = k\ln t + \eta(x). \tag{57}$$

Пример 8. При $a(x) = x^n$ $(n \neq 1, 2)$, $c(x) = 1$, $A = -k(n-1)(n-2)$, уравнение (56) имеет точное решение $\eta = k(n-2)\ln x$. Поэтому уравнение

$$u_t = [x^n f(u)u_x]_x + x^{n-1}\left[-(n-1)f(u) + \frac{1}{n-2}e^{-F(u)/k}\right]u_x \tag{58}$$

допускает точное решение в неявной форме $\int f(u)du = k\ln t + k(n-2)\ln x$.

Пример 9. При $a(x) = e^{\lambda x}$, $c(x) = 1$, $A = -k\lambda^2$ уравнение (56) допускает точное решение $\eta = k\lambda x$. Поэтому уравнение конвективной диффузии

$$u_t = [e^{\lambda x}f(u)u_x]_x + e^{\lambda x}\left[-\lambda f(u) + \frac{1}{\lambda}e^{-F(u)/k}\right]u_x \tag{59}$$

имеет точное решение в неявной форме $\int f(u)du = k\ln t + k\lambda x$.

Решение 11. Уравнению (52) можно удовлетворить, если положить

$$Af = \left(\frac{f}{h}\right)'_u, \quad g = e^{-H/k}, \qquad (60)$$
$$(a\eta'_x)'_x + Aa(\eta'_x)^2 = 0, \quad b\eta'_x = kce^{\eta/k},$$

где A — произвольная постоянная. Подставляя $c(x) = 1$ в (60), получим нелинейное уравнение конвективной диффузии

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + \\ + \frac{Aka(x)}{C_1}\left(C_1\int\frac{dx}{a(x)} + C_2\right)^{(Ak+1)/(Ak)} g(u)u_x, \qquad (61)$$

где $a(x)$ — произвольная функция, а функции $f(u)$ и $g(u)$ следующим образом выражаются через произвольную функцию $h = h(u)$:

$$f(u) = Bh\exp\left(A\int hdu\right), \\ g(u) = \exp\left(-\frac{1}{k}\int hdu\right). \qquad (62)$$

Уравнение (61)—(62) имеет точное решение

$$\int h(u)du = k\ln t + \frac{1}{A}\ln\left(C_1\int\frac{dx}{a(x)} + C_2\right). \qquad (63)$$

Формулы (62) и (63) зависят от произвольных функций $a(x)$ и $h(u)$ и произвольных постоянных A, B, C_1, C_2, k.

Пример 10. При $a(x) = 1$, $A = 1/k$, $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ уравнение (61) принимает вид

$$u_t = [f(u)u_x]_x + x^2 g(u)u_x,$$

где функции $f(u)$ и $g(u)$ определяются формулами (62). Это уравнение имеет точное решение $\int h(u)du = k\ln t + k\ln x$.

Решение 12. Уравнение (52) удовлетворяется, если выполняются соотношения

$$\left(\frac{f}{h}\right)'_u = Ae^{-H/k}, \quad g = f, \qquad (64)$$
$$Aa(\eta'_x)^2 = kce^{\eta/k}, \quad (a\eta'_x)'_x = -b\eta'_x,$$

где A — произвольная постоянная. В результате приходим к нелинейному уравнению конвективной диффузии

$$c(x)u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)f(u)u_x, \qquad (65)$$

где функция $f(u)$ следующим образом выражается через произвольную функцию $h = h(u)$:

$$f(u) = h(u)\left[A\int e^{-H(u)/k}du + B\right], \qquad (66)$$

а функция $b(x)$ определяется формулами (возможны два варианта)

$$b(x) = -[a(x)\eta'_x]'_x/\eta'_x, \\ \eta = -2k\ln\left[C_1 \pm \frac{1}{2\sqrt{Ak}}\int\sqrt{\frac{c(x)}{a(x)}}dx\right]. \qquad (67)$$

Уравнения (65)—(67) допускают точные решения

$$\int h(u)du = k\ln t - 2k\ln\left[C_1 \pm \frac{1}{2\sqrt{Ak}}\int\sqrt{\frac{c(x)}{a(x)}}dx\right]. \qquad (68)$$

Формулы (66) и (68) содержат произвольные постоянные A, B, C.

Решение 13. Уравнению (52) можно удовлетворить, если положить

$$f = Ae^{-H/k}, \quad g = \left(\frac{f}{h}\right)'_u, \qquad (69)$$
$$A(a\eta'_x)'_x - kce^{\eta/k} = 0, \quad a\eta'_x + b = 0,$$

где A — произвольная постоянная.

Из первых двух уравнений (69), выразим g и h через f. В результате получим

$$H = -k\ln\frac{f}{A}, \quad h = -k\frac{f'_u}{f}, \quad g = -\frac{1}{k}\left(\frac{f^2}{f'_u}\right)'_u. \qquad (70)$$

Будем считать, что в последних двух уравнениях (69) заданы функции $c = c(x)$ и $\eta = \eta(x)$. Тогда функциональные коэффициенты $a = a(x)$ и $b = b(x)$ определяются формулами

$$a(x) = \frac{k}{A\eta'_x}\left(\int ce^{\eta/k}dx + B\right), \quad b(x) = -a(x)\eta'_x,$$

где B — произвольная постоянная.

Решение 14. Уравнение (52) удовлетворяется, если наложить условия

$$(a\eta'_x)'_x = Ace^{\eta/k}, \\ a(\eta'_x)^2 = Bce^{\eta/k}, \quad b\eta'_x = ce^{\eta/k}, \qquad (71)$$
$$Af + B\left(\frac{f}{h}\right)'_u + g - k\exp(-H/k) = 0,$$

где A и B — произвольные постоянные, $H = \int h(u)du$.

Подставляя $c(x) = 1$, $A = 1/k$, $B = 1$ в первые три уравнения (71), находим

$$a(x) = b(x) = e^{\lambda x}, \quad \eta(x) = x, \quad \lambda = \frac{1}{k}. \qquad (72)$$

В результате получим уравнение

$$u_t = [e^{\lambda x}f(u)u_x]_x + e^{\lambda x}g(u)u_x, \qquad (73)$$

где

$$g(u) = \frac{1}{\lambda}\exp\left[-\lambda\int h(u)du\right] - \lambda f(u) - \frac{d}{du}\left[\frac{f(u)}{h(u)}\right], \quad (74)$$

которое допускает решение в неявном виде

$$\int h(u)du = x + \frac{1}{\lambda}\ln t. \quad (75)$$

Отметим, что уравнение (73)–(74) содержит две произвольные функции $f = f(u)$ и $h = h(u)$.

Замечание 9. Инвариантное решение (75) уравнения (73) можно искать в явном виде $u = U(z)$, где $z = x + (1/\lambda)\ln t$ (в этом случае связь (74) между функциями g и h не используется). Функция $U(z)$ определяется из ОДУ:

$$\frac{1}{\lambda}U'_z = [e^{\lambda z} f(U)U'_z]'_z + e^{\lambda z} g(U)U'_z.$$

Замечание 10. Более общее, чем (73), уравнение

$$u_t = [e^{\lambda x} f(u,u_x)]_x + e^{\lambda x} g(u,u_x),$$

также допускает точное решение вида $u = U(z)$, где $z = x + (1/\lambda)\ln t$.

Решение 15. Полагая $c(x) = 1$, $A = (1+k)/k$, $B = 1$ в первых трех уравнениях (71), получим

$$a(x) = x^n, \quad b(x) = x^{n-1}, \quad \eta(x) = \ln x, \quad n = 2 + \frac{1}{k}. \quad (76)$$

В результате приходим к уравнению конвективной диффузии

$$u_t = [x^n f(u)u_x]_x + x^{n-1} g(u)u_x, \quad (77)$$

где $n \neq 2$ и

$$g(u) = \frac{1}{(n-2)}\exp\left[-(n-2)\int h(u)du\right] - (n-1)f(u) - \frac{d}{du}\left[\frac{f(u)}{h(u)}\right], \quad (78)$$

которое допускает точное решение в неявном виде

$$\int h(u)du = \ln x + \frac{1}{n-2}\ln t. \quad (79)$$

Замечание 11. Автомодельное решение (79) уравнения (77) можно искать в обычном виде $u = U(z)$, где $z = xt^{1/(n-2)}$ (в этом случае связь (78) между функциями g и h не используется). Функция $U(z)$ определяется из ОДУ:

$$\frac{1}{n-2}zU'_z = [z^n f(U)U'_z]'_z + z^{n-1} g(U)U'_z.$$

Решение 16. Уравнению (52) можно удовлетворить, если положить

$$\left(\frac{f}{h}\right)'_u = Af, \quad \exp(-H/k) = Bf, \quad g = f, \quad (a\eta'_x)'_x + Aa(\eta'_x)^2 + b\eta'_x - Bkce^{\eta/k} = 0, \quad (80)$$

где A и B — произвольные постоянные, $H = \int h(u)du$.

Подставляя $A = -1/k = \lambda$ и $B = 1$ в первые три уравнения (80), имеем

$$f(u) = g(u) = e^{\lambda u}, \quad h(u) = 1. \quad (81)$$

Поэтому уравнение

$$c(x)u_t = [a(x)e^{\lambda u}u_x]_x + b(x)e^{\lambda u}u_x \quad (82)$$

допускает точное решение в неявном виде

$$u = -\frac{1}{\lambda}\ln t + \eta(x), \quad (83)$$

где функция $\eta = \eta(x)$ определяется из ОДУ:

$$[a(x)e^{\lambda\eta}\eta'_x]'_x + b(x)e^{\lambda\eta}\eta'_x + \frac{1}{\lambda}c(x) = 0. \quad (84)$$

Уравнения (82) и (84) содержат три произвольные функции $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$.

Решение 17. Полагая $A = n+1$, $B = 1$, $k = -1/n$ в первых трех уравнениях (80), получим

$$f(u) = u^n, \quad g(u) = u^n, \quad h(u) = 1/u. \quad (85)$$

В результате приходим к уравнению конвективной диффузии

$$c(x)u_t = [a(x)u^n u_x]_x + b(x)u^n u_x, \quad (86)$$

где $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ — произвольные функции, которое имеет точное решение $\ln u = -(1/n)\ln t + \eta(x)$. Это решение можно представить в явном виде

$$u = t^{-1/n}\zeta(x), \quad \zeta(x) = e^{\eta(x)}, \quad (87)$$

где функция η удовлетворяет ОДУ:

$$[a(x)\zeta^n\zeta'_x]'_x + b(x)\zeta^n\zeta'_x + \frac{1}{n}c(x)\zeta = 0. \quad (88)$$

4. КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Описаны различные классы нелинейных уравнений конвективной диффузии с переменными коэффициентами, которые допускают точные решения. Решения ищутся в виде неявной зависимости, которая содержит несколько свободных функций (эти функции определяются в ходе дальнейшего анализа). Особое внимание уделено нелинейным уравнениям общего вида, которые зависят от одной или нескольких произвольных функций. Получен ряд новых точных решений типа обобщенной бегущей волны и решений с функциональным разделением переменных.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310385-6) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10025).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Овсянников Л.В.* Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности // Доклады АН СССР. 1959. Т. 125. № 3. С. 492–495.
2. *Дородницын В.А.* Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1982. Т. 22. № 6. С. 1393–1400.
3. *Galaktionov V.A., Dorodnitsyn V.A., Yelenin G.G., Kurdyumov S.P., Samarskii A.A.* A quasilinear equation of heat conduction with a source: peaking, localization, symmetry, exact solutions, asymptotic behavior, structures // J. Soviet Math. 1988. V. 41. № 5. P. 1222–1292.
4. *Kudryashov N.A.* On exact solutions of families of Fisher equations // Theor. Math. Phys. 1993. V. 94. № 2. P. 211–218.
5. *Clarkson P.A., Mansfield E.L.* Symmetry reductions and exact solutions of a class of nonlinear heat equations // Phys. D. 1994. V. 70. P. 250–288.
6. *Galaktionov V.A.* Quasilinear heat equations with first-order sign-invariants and new explicit solutions // Nonlinear Anal. Theory. Methods. Appl. 1994. V. 23. P. 1595–1621.
7. *Ibragimov N.H.* (Editor). CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Symmetries, Exact solutions and Conservation Laws, Vol. 1. Boca Raton: CRC Press, 1994.
8. *Doyle Ph. W., Vassiliou P. J.* Separation of variables for the 1-dimensional non-linear diffusion equation // Int. J. Non-Linear Mech. 1998. V. 33. № 2. P. 315–326.
9. *Hood S.* On direct, implicit reductions of a nonlinear diffusion equation with an arbitrary function – generalizations of Clarkson's and Kruskal's method // IMA J. Appl. Math. 2000. V. 64. № 3. P. 223–244.
10. *Pucci E., Saccomandi G.* Evolution equations, invariant surface conditions and functional separation of variables // Physica D. 2000. V. 139. P. 28–47.
11. *Estevez P.G., Qu C., Zhang S.* Separation of variables of a generalized porous medium equation with nonlinear source // J. Math. Anal. Appl. 2002. V. 275. P. 44–59.
12. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2002.
13. *Kaptsov O.V., Verevkin I.V.* Differential constraints and exact solutions of nonlinear diffusion equations // J. Phys. A: Math. Gen. 2003. V. 36. P. 1401–1414.
14. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005.
15. *Cherniha R.M., Pliukhin O.* New conditional symmetries and exact solutions of nonlinear reaction–diffusion–convection equations // J. Physics A: Math. Theor. 2007. V. 40. № 33. P. 10049–10070.
16. *Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R.* Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2007.
17. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition. Boca Raton: CRC Press, 2012 (see also 1st Edition, 2004).
18. *Cherniha R.M., Pliukhin O.* New conditional symmetries and exact solutions of reaction–diffusion–convection equations with exponential nonlinearities // J. Math. Anal. Appl. 2013. V. 403. P. 23–37.
19. *Cherniha R., Serov M., Pliukhin O.* Nonlinear Reaction-Diffusion-Convection Equations: Lie and Conditional Symmetry, Exact Solutions and Their Applications. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2018.
20. *Vaneeva O.O., Johnpillai, A.G., Popovycha R.O., Sophocleous C.* Extended group analysis of variable coefficient reaction–diffusion equations with power nonlinearities // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 330. № 2. P. 1363–1386.
21. *Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C.* Enhanced group analysis and exact solutions of variable coefficient semilinear diffusion equations with a power source // Acta Applicandae Mathematicae. 2009. V. 106. № 1. P. 1–46.
22. *Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C.* Extended group analysis of variable coefficient reaction–diffusion equations with exponential nonlinearities // J. Math. Anal. Appl. 2012. V. 396. P. 225–242.
23. *Vaneeva O., Zhalij A.* Group classification of variable coefficient quasilinear reaction–diffusion equations // Publications de L'Institute Mathématique (Nouvelle série). 2013. V. 94. № 108. P. 81–90.
24. *Polyanin A.D.* Functional separable solutions of nonlinear reaction-diffusion equations with variable coefficients // Appl. Math. Comput. 2019. V. 347. P. 282–292.
25. *Полянин А.Д.* Нелинейные реакционно-диффузионные уравнения с переменными коэффициентами: Метод поиска точных решений в неявном виде // Вестник Национального исследовательского ядерного университета "МИФИ". 2019. Т. 8. № 2.
26. *Gandarias M.L., Romero J.L., Díaz J.M.* Nonclassical symmetry reductions of a porous medium equation with convection // J. Phys. A: Math. Gen. 1999. V. 32. P. 1461–1473.
27. *Popovych R.O., Ivanova N.M.* New results on group classification of nonlinear diffusion-convection equations // J. Physics A: Math. General. 2004. V. 37. № 30. P. 7547–7565.
28. *Ivanova N.M., Sophocleous C.* On the group classification of variable-coefficient nonlinear diffusion-convection equations // J. Comput. Applied Math. 2006. V. 197. № 2. P. 322–344.
29. *Ivanova N.M.* Exact solutions of diffusion-convection equations // Dynamics of PDE. 2008. V. 5. № 2. P. 139–171.
30. *Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C.* Group analysis of variable coefficient diffusion-convection

equations. I. Enhanced group classification // Lobachevskii J. Mathematics. 2010. V. 31. № 2. P. 100–122.

31. *Polyanin A.D.* Construction of exact solutions in implicit form for PDEs: New functional separable solutions of non-linear reaction-diffusion equations with variable coefficients // Int. J. Non-Linear Mech. 2019. V. 111. P. 95–105.
32. *Basarab-Horwath P., Lahno V., Zhdanov R.* The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations // Acta Appl. Math. 2001. V. 69. P. 43–94.
33. *Лагно В.И., Спичак С.В., Стогний В.И.* Симметрийный анализ уравнений эволюционного типа. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
34. *Jia H., Zhao W.X.X., Li Z.* Separation of variables and exact solutions to nonlinear diffusion equations with x-dependent convection and absorption // J. Math. Anal. Appl. 2008. V. 339. P. 982–995.
35. *Cherniha R., Davydovych V.* Nonlinear Reaction-Diffusion Systems: Conditional Symmetry, Exact Solutions and Their Applications in Biology. Springer, 2017.
36. *Meleshko S.V., Moyo S.* On the complete group classification of the reaction–diffusion equation with a delay // J. Math. Anal. Appl. 2008. V. 338. P. 448–466.
37. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Exact solutions of linear and non-linear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time // Int. J. Non-Linear Mech. 2013. V. 54. P. 115–126.
38. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Exact separable solutions of delay reaction-diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2014. V. 19. № 3. P. 409–416.
39. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2014. V. 19. № 3. P. 417–430.
40. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* New generalized and functional separable solutions to non-linear delay reaction-diffusion equations // Int. J. Non-Linear Mech. 2014. V. 59. P. 16–22.
41. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Nonlinear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients: Exact methods and new solutions // Appl. Math. Letters 2014. V. 37. P. 43–48.
42. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients // Int. J. Non-Linear Mech. 2014. V. 67. P. 267–277.
43. *Polyanin A.D., Sorokin V.G.* Nonlinear delay reaction-diffusion equations: Traveling-wave solutions in elementary functions // Appl. Math. Letters. 2015. V. 46. P. 38–43.
44. *Polyanin A.D.* Generalized traveling-wave solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with delay and variable coefficients // Appl. Math. Letters. 2019. V. 90. P. 49–53.
45. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems. Boca Raton: CRC Press, 2018.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2019, vol. 8, no. 4, pp. 415–427

Exact Solutions in the Implicit Form of Nonlinear Mass and Heat Transfer Equations with Variable Coefficients

A. D. Polyanin[a,b,c,#]

[a] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia*
[b] *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia*
[c] *Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005 Russia*
[#] *e-mail: polyanin@ipmnet.ru*

Received January 30, 2019; revised January 30, 2019; accepted February 26, 2019

Abstract—Various classes of nonlinear mass and heat transfer equations with variable coefficients, $c(x)u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)g(u)u_x$,, which admit exact solutions, are considered. The main attention is focused on nonlinear equations of a sufficiently general form, which contain several arbitrary functions that depend on the unknown function u and the spatial variable x. It is important to note that the exact solutions of nonlinear partial differential equations that contain arbitrary functions and are, therefore, sufficiently general, are of the greatest practical interest for testing various numerical and approximate analytical methods to solve corresponding initial-boundary value problems. The method used to find exact solutions is based on the representation of the solution in the implicit form $\int h(u)du = \xi(t) + \eta(x)$, where the functions $h(u)$, $\xi(t)$, and $\eta(x)$ are determined further by analyzing resulting functional-differential equations. Examples of specific reaction–diffusion type equations and their exact solutions are given. Many new generalized traveling wave solutions and functional separable solutions are described.

Keywords: mass and heat transfer equations, nonlinear convection–diffusion, equations, PDEs with variable coefficients, exact solutions in implicit form, functional separable solutions, generalized traveling-wave solutions

DOI: 10.1134/S2304487X19040084

REFERENCES

1. Ovsiannikov L.V. Gruppovye svoystva uravneniy nelineynoy teploprovodnosti [Group properties of nonlinear heat equations]. *Doklady Acad. Nauk USSR*, 1959, vol. 125, no. 3, pp. 492–495 (in Russian).
2. Dorodnitsyn V.A. Ob invariantnykh resheniyakh uravneniya nelineynoy teploprovodnosti s istochnikom [On invariant solutions of the nonlinear heat equation with a source]. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, 1982, vol. 22, no. 6, pp. 1393–1400 (in Russian).
3. Galaktionov V.A., Dorodnitsyn V.A., Yelenin G.G., Kurdyumov S.P., Samarskii A.A. A quasilinear equation of heat conduction with a source: peaking, localization, symmetry, exact solutions, asymptotic behavior, structures. *J. Soviet Math.*, 1988, vol. 41, no. 5, pp. 1222–1292.
4. Kudryashov N.A. On exact solutions of families of Fisher equations. *Theor. Math. Phys.*, 1993, vol. 94, no. 2, pp. 211–218.
5. Clarkson P.A., Mansfield E.L. Symmetry reductions and exact solutions of a class of nonlinear heat equations. *Phys. D*, 1994, vol. 70, pp. 250–288.
6. Galaktionov V.A. Quasilinear heat equations with first-order sign-invariants and new explicit solutions. *Nonlinear Anal. Theory. Methods. Appl.*, 1994, vol. 23, pp. 1595–1621.
7. Ibragimov N.H. (Editor). *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Symmetries, Exact solutions and Conservation Laws, vol. 1.* Boca Raton: CRC Press, 1994.
8. Doyle Ph. W., Vassiliou P. J. Separation of variables for the 1-dimensional non-linear diffusion equation. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 1998, vol. 33, no. 2, pp. 315–326.
9. Hood S. On direct, implicit reductions of a nonlinear diffusion equation with an arbitrary function – generalizations of Clarkson's and Kruskal's method. *IMA J. Appl. Math.*, 2000, vol. 64, no. 3, pp. 223–244.
10. Pucci E., Saccomandi G. Evolution equations, invariant surface conditions and functional separation of variables. *Physica D*, 2000, vol. 139, pp. 28–47.
11. Estevez P.G., Qu C., Zhang S. Separation of variables of a generalized porous medium equation with nonlinear source. *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, vol. 275, pp. 44–59.
12. Polyanin A.D, Zaitsev V.F. *Spravochnik po nelineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki* [Handbook of nonlinear equations of mathematical physics]. Moscow, Fizmatlit, 2002 (in Russian).
13. Kaptsov O.V., Verevkin I.V. Differential constraints and exact solutions of nonlinear diffusion equations. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2003, vol. 36, pp. 1401–1414.
14. Polyanin A.D, Zaitsev V.F., Zhurov A.I. *Metody resheniya nelineinyh uravnenii matematicheskoi fiziki i mehaniki* [Solution methods for nonlinear equations of mathematical physics and mechanics]. Moscow, Fizmatlit, 2005 (in Russian).
15. Cherniha R.M., Pliukhin O. New conditional symmetries and exact solutions of nonlinear reaction–diffusion–convection equations. *J. Physics A: Math. Theor.*, 2007, vol. 40, no. 33, pp. 10049–10070.
16. Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R. *Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics.* Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2006.
17. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition*. Boca Raton: CRC Press, 2012 (see also 1st Edition, 2004).
18. Cherniha R.M., Pliukhin O. New conditional symmetries and exact solutions of reaction–diffusion–convection equations with exponential nonlinearities. *J. Math. Anal. Appl.*, 2013, vol. 403, pp. 23–37.
19. Cherniha R., Serov M., Pliukhin O. *Nonlinear Reaction-Diffusion-Convection Equations: Lie and Conditional Symmetry, Exact Solutions and Their Applications.* Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2018.
20. Vaneeva O.O., Johnpillai, A.G., Popovycha R.O., Sophocleous C. Extended group analysis of variable coefficient reaction–diffusion equations with power nonlinearities. *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, vol. 330, no. 2, pp. 1363–1386.
21. Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C. Enhanced group analysis and exact solutions of variable coefficient semilinear diffusion equations with a power source. *Acta Applicandae Mathematicae*, 2009, vol. 106, no. 1, pp. 1–46.
22. Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C. Extended group analysis of variable coefficient reaction–diffusion equations with exponential nonlinearities. *J. Math. Anal. Appl.*, 2012, vol. 396, pp. 225–242.
23. Vaneeva O., Zhalij A. Group classification of variable coefficient quasilinear reaction–diffusion equations. *Publications de L'Institute Mathématique (Nouvelle série)*, 2013, vol. 94, no. 108, pp. 81–90.
24. Polyanin A.D. Functional separable solutions of nonlinear reaction-diffusion equations with variable coefficients. *Appl. Math. Comput.*, 2019, vol. 347, pp. 282–292.
25. Polyanin A.D. Nelineynyye reaktsionno-diffuzionnyye uravneniya s peremennymi koeffitsiyentami: Metod

poiska tochnykh resheniy v neyavnom vide [Nonlinear reaction-diffusion equations with variable coefficients: Method for finding exact solutions in implicit form]. Vestnik NIYaU MIFI, 2019, vol. 8, no. 2 (in Russian).

26. Gandarias M.L., Romero J.L., Díaz J.M. Nonclassical symmetry reductions of a porous medium equation with convection. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1999, vol. 32, 1461–1473.
27. Popovych R.O., Ivanova N.M. New results on group classification of nonlinear diffusion-convection equations. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2004, vol. 37, no. 30, pp. 7547–7565.
28. Ivanova N.M., Sophocleous C. On the group classification of variable-coefficient nonlinear diffusion-convection equations. *J. Comput. Applied Math.*, 2006, vol. 197, no. 2, pp. 322–344.
29. Ivanova N.M. Exact solutions of diffusion-convection equations. Dynamics of PDE, 2008, vol. 5, no. 2, pp. 139–171.
30. Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C. Group analysis of variable coefficient diffusion-convection equations. I. Enhanced group classification. *Lobachevskii J. Mathematics*, 2010, vol. 31, no. 2, pp. 100–122.
31. Polyanin A.D. Construction of exact solutions in implicit form for PDEs: New functional separable solutions of non-linear reaction-diffusion equations with variable coefficients. Int. J. Non-Linear Mech., 2019, vol. 111, pp. 95–105.
32. Basarab-Horwath P., Lahno V., Zhdanov R. The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations. *Acta Appl. Math.*, 2001, vol. 69, pp. 43–94.
33. Lagno V.I., Spichak S.V., Stognii V.I. *Simmetriynyy analiz uravneniy evolyutsionnogo tipa* [Symmetry analysis of evolution type equations]. Moskva – Izhevsk, Institute of Computer Sciences, 2004 (in Russian).
34. Jia H., Zhao W.X.X., Li Z. Separation of variables and exact solutions to nonlinear diffusion equations with x-dependent convection and absorption. *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, vol. 339, pp. 982–995.
35. Cherniha R., Davydovych V. *Nonlinear Reaction-Diffusion Systems: Conditional Symmetry, Exact Solutions and Their Applications in Biology.* Springer, 2017.
36. Meleshko S.V., Moyo S. On the complete group classification of the reaction–diffusion equation with a delay. *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, vol. 338, pp. 448–466.
37. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact solutions of linear and non-linear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2013, vol. 54, pp. 115–126.
38. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact separable solutions of delay reaction-diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, vol. 19, no. 3, pp. 409–416.
39. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Functional constraints method for constructing exact solutions to delay reaction-diffusion equations and more complex nonlinear equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, vol. 19, no. 3, pp. 417–430.
40. Polyanin A.D., Zhurov A.I. New generalized and functional separable solutions to non-linear delay reaction-diffusion equations. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014, vol. 59, pp. 16–22.
41. Polyanin A.D., Zhurov A.I. Nonlinear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients: Exact methods and new solutions. *Appl. Math. Letters*, 2014, vol. 37, pp. 43–48.
42. Polyanin A.D., Zhurov A.I. The functional constraints method: Application to non-linear delay reaction-diffusion equations with varying transfer coefficients. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2014, vol. 67, pp. 267–277.
43. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Nonlinear delay reaction-diffusion equations: Traveling-wave solutions in elementary functions. *Appl. Math. Letters*, 2015, vol. 46, pp. 38–43.
44. Polyanin A.D. Generalized traveling-wave solutions of nonlinear reaction–diffusion equations with delay and variable coefficients. *Appl. Math. Letters*, 2019, vol. 90, pp. 49–53.
45. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems*. Boca Raton: CRC Press, 2018.