

УДК 51-32

Аналитическое решение для определения температуры испаряющихся капель на твердой подложке

© 2025 г. С. З. Дунин, О. В. Нагорнов, В. П. Трифоненков, С. А. Тюфлин

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия

Процесс испарения жидких капель на твердых поверхностях привлекает внимание исследователей, поскольку оказывается определяющим во многих прикладных задачах: в биологии, распылении пестицидов, печати принтеров, нанофабрикации, создании пленок с заданными свойствами, работе с OLED дисплеями, ДНК анализе и др. Процесс испарения капель сложен, поэтому аналитические модели могут дать понимание закономерностей процесса. Исследуется спонтанное испарение капель жидкости с горизонтальных подложек в неизотермическом приближении. Получены аналитические выражения для температуры и концентрации пара как функции безразмерных параметров, выраженные через термодинамические параметры подложки, жидкости и пара. Учет температурных поправок позволяет рассчитать силу Марангони, определяющую термокапиллярные течения в капле. Определены значения параметров, при которых направление силы Марангони меняет знак, и линии стагнации. Найдены критические значения коэффициентов теплопроводностей жидкости и подложки, при которых возбуждаются разнонаправленные течения. Проведены сравнения температурных полей с экспериментальными данными. Установлены критические параметры соотношения теплопроводностей капли и подложки, при которых меняется монотонное распределение температуры и возможно охлаждение капли.

Ключевые слова: испарение капли, термокапиллярные течения, сила Марангони, точки стагнации.

Введение

Возможность практического использования самоорганизующихся процессов, протекающих в испаряющихся каплях с растворенными в них микрообъектами, привлекает пристальное внимание к проблеме испарения посаженных капель [1–19]. Контроль режима испарения капель на подложке определяет не только время жизни капли, но и управляет скоростными потоками внутри капли и, как следствие, архитектуру осадков растворенных в капле веществ. Такие процессы планируют широко использовать в производстве новейших электронных и оптических материалов, при биохимическом тестировании, в DNA/RNA исследованиях.

Многоплановость процессов, протекающих в испаряющейся капле, одновременный учет температурных и скоростных полей, сложность математического описания из-за возникающих сингулярностей в плотности потока на краях капли (как и проблемы численного счета) заставляют авторов упрощать модели, учитывая те или иные факторы, определяющие процесс испарения. В серии работ [4–8] граничные условия на испаряющейся поверхности капли, скорректированные численными вычислениями методом конечных элементов (FEM), использовались для нахождения полей концентраций водяного пара. При этом концентрация насыщенных паров на поверхности капли не постоянна, что должно

✉ О.В. Нагорнов: ovnagornov@mephi.ru

Поступила в редакцию: 08.09.2025

После доработки: 20.10.2025

Принята к публикации: 21.10.2025

приводить к температурной неоднородности вдоль поверхности. Эта неоднородность определяет силы Марангони, влияющие на скоростные потоки в капле, которые, как было показано в [4–8], при наличии растворенного в капле вещества, могут выносить его не только на периферию, но и в другие части высыхающей капли (наличие стагнационных точек, определяемых силами Марангони) [8]. В работах [5–8] экспериментально подтвержден этот вывод и дан количественный критерий направленности конвективных потоков. Показано, что время испарения капли и динамика любого не малого краевого угла хорошо описываются формулами [8]. В работах [15–17] проведен широкий комплекс экспериментальных исследований зависимости скорости испарения от различных термодинамических параметров сред и установлено сильное влияние теплопроводящих свойств подложки и жидкостей. Температурные поправки к полю концентрации получены численно (FEM).

В настоящей работе получены аналитические выражения для локальных температурных полей и полей концентрации, взаимосвязь которых учтена через граничные условия на границах капли. Знание этих полей позволяет вычислять как интегральные характеристики теплового и массового потока (не очень чувствительных к сингулярным особенностям плотностей потоков в силу их интегрируемости), так и локальные тепловые и массовые потоки с поверхности капли.

Постановка задачи

Рассматривается стационарный режим испарения капли жидкости на горизонтальной теплопроводящей подложке. Капля испаряется в режиме закрепленной контактной линии, краевой угол смачивания θ_c меньше 90° и уменьшается по мере испарения капли. Начальная фаза, когда капля расширяется по подложке, непродолжительна по времени и определяет начальные параметры капли (ее горизонтальный размер R , высоту h и начальный краевой угол θ_c). Капли миллиметрового размера $R \leq 2.7$ мм из-за малости числа Бонда $Bo = \rho g R h_0 / \sigma \sim 0.03 - 0.4$ можно считать сферическим сегментом; R – радиус контактной линии капли, отсчитанный от оси симметрии; θ_c – краевой угол; ρ – плотность жидкости; σ – коэффициент поверхностного натяжения жидкости; g – ускорение свободного падения; h_0 – высота капли (рис. 1). Последнюю фазу жизни капли перед ее быстрым исчезновением мы исключим из нашего рассмотрения.

В силу медленности изменения параметров капли по сравнению с характерным временем распространения тепла в пределах размеров капли ($t \gg R^2 k_{L,S}^{-1} = t_{L,S}$ – время диффузионного выравнивания поля концентрации и температуры на размере капли радиусом R) можно пренебречь временным слагаемым в уравнении теплопроводности и конвективным из-за малости числа Пекле $Pe \ll 1$. Тогда квазitemпературное поле в капле T_L и подложке T_s можно определить из решения уравнений Лапласа

$$\begin{cases} \Delta T_L = 0; \\ \Delta T_s = 0. \end{cases}$$

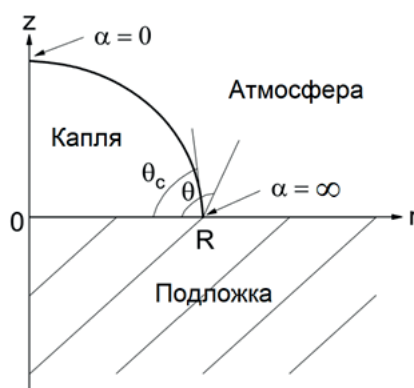


Рис. 1. Сферическая капля на твердой подложке

В газовой фазе массовая концентрация $c(\alpha, \theta)$ удовлетворяет стационарному уравнению Лапласа $\Delta c(\alpha, \theta) = 0$ (считаем газовую фазу неподвижной и пренебрегаем конвективным слагаемым в силу малости числа Пекле $Pe \ll 1$).

Влияния тепловых характеристик подложки и жидкости на массовые и тепловые потоки при спонтанном естественном испарении посаженной капли учитываются через граничные условия (равенство температур и тепловых потоков на границе жидкость – подложка). Предполагается, что основной тепловой поток, стимулирующий процесс испарения, исходит из подложки (пренебрегаем коэффициентом теплопроводности газа) и поступает к поверхности капли, где благодаря фазовому превращению трансформируется в массовый паровой поток, диффундирующий от поверхности капли (тепловым потоком из газовой фазы пренебрегаем). При выбранной конфигурации капли удобно решать систему уравнений Лапласа для полей концентрации и температур в тороидальной системе координат α, θ (см. рис. 1, границы капли совпадают с θ_c – краевым углом капли и $\theta = 0$). Полагаем равенство нулю нормальных производных концентраций в газовой фазе и температур в подложке на их общей границе и равенство температур и тепловых потоков на жидкой границе капли.

Решения для температур и концентрации с указанными граничными условиями на подложках, толщина которых значительно превышает радиус основания капли, можно представить в виде:

$$\begin{aligned} T_L(\alpha, \theta) &= T_\infty + \left\{ 2(\operatorname{ch} \alpha + \cos \theta) \right\}^{\frac{1}{2}} \times \left[\int_0^\infty d\tau P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) \frac{\operatorname{ch} \tau \theta_c}{\operatorname{ch} \tau \pi} A_s(\tau) \times \frac{\operatorname{ch} \tau \pi \operatorname{ch} \tau \theta + k_R \operatorname{sh} \tau \pi \operatorname{sh} \tau \theta}{\operatorname{ch} \tau \pi \operatorname{ch} \tau \theta_c + k_R \operatorname{sh} \tau \pi \operatorname{sh} \tau \theta_c} \right], \quad 0 < \theta < \theta_c, \\ c_V(\alpha, \theta) &= c_\infty + \left\{ 2(\operatorname{ch} \alpha + \cos \theta) \right\}^{\frac{1}{2}} \times \left[\int_0^\infty d\tau P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) \frac{\operatorname{ch} \tau \theta_c}{\operatorname{ch} \tau \pi} B_D(\tau) \times \frac{\operatorname{ch} \tau (\pi - \theta)}{\operatorname{ch} \tau (\pi - \theta_c)} \right], \quad \theta_c < \theta < \pi, \\ T_s(\alpha, \theta) &= T_\infty + \left\{ 2(\operatorname{ch} \alpha + \cos \theta) \right\}^{\frac{1}{2}} \times \left[\int_0^\infty d\tau P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) \frac{\operatorname{ch} \tau \theta_c}{\operatorname{ch} \tau \pi} A_s(\tau) \times \frac{\operatorname{ch} \tau (\pi - \theta)}{\operatorname{ch} \tau \pi \operatorname{ch} \tau \theta_c + k_R \operatorname{sh} \tau \pi \operatorname{sh} \tau \theta_c} \right], \quad \pi < \theta < 2\pi, \end{aligned} \quad (1)$$

где T_L и T_s – температура в жидкости и подложке, соответственно; c_V – концентрация пара; $k_R = k_s/k_L$, T_∞ и c_∞ – окружающая температура и концентрация пара, соответственно; θ_c – краевой угол;

$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha)$ – функции Лежандра [20], которые можно выразить через гипергеометрические функции Римана и гамма-функцию

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{\Gamma(i\tau)}{\sqrt{\pi} \Gamma(0.5 + i\tau)} (2\operatorname{ch} \alpha)^{-0.5+i\tau} F\left(\frac{3}{4} - i\tau/4, \frac{1}{4} - i\tau/4, 1 + i\tau; \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \alpha}\right) + KC.$$

Это позволяет провести вычисления интегралов в комплексной плоскости τ . Распространив интегрирование на всю действительную ось, и замыкая контур через бесконечную полуокружность в верхней полуплоскости τ , получим ряд по степеням $(r^2/R^2)^{-m}$. Наибольший вклад в окрестности края капли вносят полюса, ближайшие к действительной оси (в работах [1, 2] приведен именно этот вклад полюсов $B_D(\tau)$). Полюс гамма-функции, лежащий на действительной оси, определяет температуру и концентрацию пара на краях капли. Ядра B_D, A_s в интегральных выражениях, определяющие поведение температурных и концентрационных полей в пространстве, находятся из граничных условий на границе капли. Так, считая, что приток тепла к поверхности капли от газовой фазы отсутствует, определяем значения:

$$\begin{aligned} Lj_L(\alpha, \theta_c) &\approx q_L(\alpha, \theta_c), \\ Lj_c(\alpha, \theta_c) &= -L \frac{D}{R} (\operatorname{ch} \alpha + \cos \theta_c) \frac{d}{d\theta_c} c(\alpha, \theta_c) = -\frac{k_L}{R} (\operatorname{ch} \alpha + \cos \theta_c) \frac{d}{d\theta_c} T_L(\alpha, \theta_c), \end{aligned} \quad (2)$$

где L – удельная теплота испарения; j_L – поток массы; q_L – тепловой поток. Считая, что на всей поверхности капли граничные условия такие же, как в окрестности края капли, получим связь между ядрами интегральных представлений

$$-LDB_D(\tau) \tan \tau (\pi - \theta_c) = k_L A_s(\tau) (\operatorname{ch} \tau \pi \operatorname{sh} \tau \theta_c + k_R \operatorname{sh} \tau \pi \operatorname{ch} \tau \theta_c). \quad (3)$$

В квазистационарном режиме испарения на поверхности капли выполнено условие Клапейрона – Клаузиуса, связывающее концентрацию насыщенных паров и температуру в любой точке газовой фазы. Ограничиваясь линейной зависимостью концентрации пара от температуры

$$c_V(\alpha, \theta_c) - c_{s\infty} = c'_{sT} (T_L(\alpha, \theta_c) - T_\infty), \quad (4)$$

определим ядро $B_D(\tau)$, зависящее от параметров жидкости, подложки и газовой фазой

$$\begin{aligned} B_D(\tau) &= B_D(\tau, \theta_c, k_R, \Gamma) = \hat{B}_D(\tau)(c_{s\infty} - c_\infty), \\ \hat{B}_D(\tau) &= \left\{ 1 + \Gamma \tan \tau (\pi - \theta_c) \times \frac{\operatorname{ch} \tau \pi \operatorname{ch} \tau \theta_c + k_R \operatorname{sh} \tau \pi \operatorname{sh} \tau \theta_c}{\operatorname{ch} \tau \pi \operatorname{sh} \tau \theta_c + k_R \operatorname{sh} \tau \pi \operatorname{ch} \tau \theta_c} \right\}^{-1}, \\ \Gamma &= c'_{sT} \frac{DL}{k_L} \frac{p_{atm}}{p}. \end{aligned}$$

Здесь $c_{s\infty}$ – концентрация насыщенного пара в окружающей среде; D – коэффициент диффузии; p – давление. Важно отметить, что в неизотермическом случае ядро зависит как от краевого угла, теплопроводящих свойств жидкости и подложки (k_L, k_s), так и от термодинамических параметров жидкости и газа $\left(c'_{sT} = \frac{dc_n}{dT}, D, L \right)$.

Из (1–5) можно вычислить температурный профиль вдоль поверхности капли:

$$T_L(\alpha, \theta_c) - T_\infty = \frac{c_{s\infty}}{c'_{sT}} (1 - H) \left[-1 + \left\{ 2(\operatorname{ch} \alpha + \cos \theta_c) \right\}^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty d\tau P_{\frac{1}{-2} + i\tau} (\operatorname{ch} \alpha) \frac{\operatorname{ch} \tau \theta_c}{\operatorname{ch} \tau \pi} \operatorname{ch} [\tau (\pi - \theta_c)] \hat{B}_D(\tau) \right]. \quad (6)$$

Тогда находим уравнение для температуры на краю капли:

$$\begin{aligned} \Delta T = \frac{T_L(\infty, \theta_c) - T_\infty}{\frac{c_{s\infty}}{c'_{sT}} (1 - H)} &= \Gamma_{atm} \frac{p_{atm}}{p} \times \frac{\left(1 - \frac{\theta_c}{\pi} \right)}{k_R + \frac{\theta_c}{\pi} + \Gamma_{atm} \frac{p_{atm}}{p} \left(1 - \frac{\theta_c}{\pi} \right)}, \\ \left(\frac{c_{s\infty}}{c'_{sT}} \right)^{-1} &= \frac{\mu L}{RT_\infty^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Силу Марангони в любой точке поверхности капли можно вычислить через градиент температуры вдоль поверхности капли

$$F_M(\alpha, \theta_c) = \nabla_\tau \sigma(\alpha, \theta_c) = \sigma'_T \nabla_\tau T_L(\alpha, \theta_c) = \frac{\sigma'_T}{R} (\operatorname{ch} \alpha + \cos \theta_c) \frac{d}{d\alpha} T_L(\alpha, \theta_c), \quad \sigma'_T = \frac{d\sigma}{dT}. \quad (8)$$

Результаты и анализ

Аналитические решения для испаряющихся капель на подложке рассматривались ранее в [11–13, 21]. Проведено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными, относящимися к ситуации, близкой к постановке задачи рассматриваемой в нашей математической модели. Разность температур не зависит от радиуса капли и при больших k_R стремится к нулю по закону обратной пропорциональности. Таким образом, для подложек с высокой теплопроводностью (из алюминия, золота, меди, силикона) температура края капли близка к температуре окружающей каплю атмосферы (базовая модель в терминологии [16]). Экспериментальные данные измерений разности температур на краю капли на подложках из материалов PTFE, Масог и золота, и окружающего газа при атмосферном давлении ($T_{\text{ambient}} - T_6 \approx 1.3^\circ\text{C}$) [17], что неплохо совпадает с нашими результатами для воды в атмосфере ненасыщенного воздуха $\Gamma_{\text{ref}} \approx 0.11$, $c_{\text{sec}} c'_{sT}{}^{-1} = 17.3^\circ\text{C}$ при $H = 0.55$ на PTFE при $\theta_c = 30^\circ$: $\Delta T_{\text{PTFE}} \approx 1.3^\circ\text{C}$, $\Delta T_{\text{Al}} \approx 0$. Наши результаты показывают не только правильный тренд, но и хорошее численное совпадение с экспериментальными данными. Расчеты указывают, что для спонтанно испаряющейся капли, по мере уменьшения краевого угла, температура в вершине капли при определенных условиях могут быть выше, чем на краях капли. На рис. 2, а дана зависимость безразмерной разности температур произвольной точки поверхности капли и в ее вершине для различных подложек и контактных углов.

По мере уменьшения контактного угла, температура меняется монотонно (увеличивается к краю капли) при $k_R \geq k_c = 0.57$, и становится не монотонной при $k_R \leq 0.57$. В точках стагнации (отмечены крестом), в которых температура достигает минимума, сила Марангони меняет направление (безразмерная сила Марангони приведена на рис. 2, б). Экспериментально эффекты охлаждения капель исследовались в [22]. Изменение направления силы Марангони зависит от краевого угла. Это ранее было отмечено в работах [2, 6].

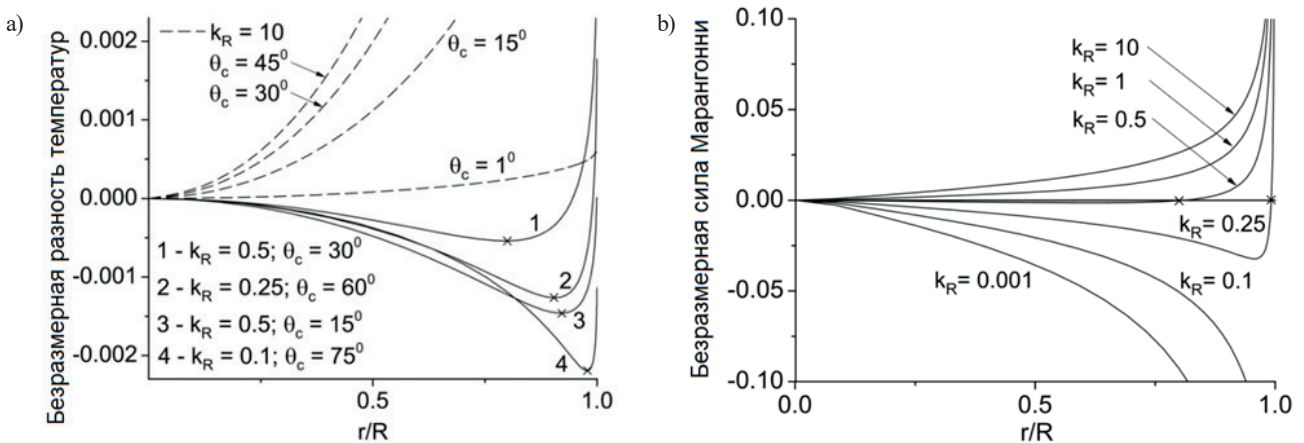


Рис. 2. Безразмерная разность температур (а) и безразмерная сила Марангони (б) вдоль поверхности капли для различных подложек и краевых углов

Заключение

Получены аналитические выражения для температуры и концентрации пара для испарения покоящейся капли с закрепленной линией контакта, учитывающие теплопроводящие свойства подложки и жидкости и термодинамические параметры газовой фазы. Определено критическое значение параметра k_c , при котором поведение системы меняется. Для $k_R \geq k_c = 0.57$ температура на поверхности капли – монотонная и температура вершины ниже, чем температура рядом с линией контакта. В этом

случае возможно формирование течения, направленного к центру около подложки и к краю капли около поверхности капли. Температура на поверхности капли немонотонна при $k_R \leq k_c$, что приводит к возникновению точек стагнации, в которых сила Марангони меняет свое направление. Из-за этого формируются противоположно направленные течения. Положение точек стагнации зависит от материалов жидкости и подложки и от краевого угла. При уменьшении краевого угла линии стагнации перемещаются к краям капли.

Финансирование

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации и выполнена по теме государственного задания FSWU-2023-0031.

Конфликт интересов

Конфликт интересов отсутствует.

Вклад авторов

С.З. Дунин – постановка задачи, участие в проведении вычислений.

О.В. Нагорнов – участие в проведении исследования, анализ и обсуждение результатов.

В.П. Трифоненков – участие в проведении вычислений, анализ и обсуждение результатов.

С.А. Тюфлин – обсуждение результатов.

Список литературы

1. Deegan R.D., Bakajin O., Dupont T.F., Huber G., Nagel S.R., Witten T.A. Capillary flow as the cause of ring stains from dried liquid drops // *Nature*, 1997. V. 389. P. 827–829. DOI: 10.1038/39827.
2. Deegan R.D., Bakajin O., Dupont T.F., Huber G., Nagel S.R., Witten T.A. Contact line deposits in an evaporating drop // *Physical Review E*, 2000. V. 62. P. 756–765. DOI: 10.1103/physreve.62.756.
3. Deegan R.D. Pattern formation in drying drops // *Physical Review E*, 2000. V. 61(1). P. 475–485. DOI: 10.1103/physreve.61.475.
4. Ristenpart W.D., Kim P.G., Domingues C., Wan J., Stone H.A. Influence of Substrate Conductivity on Circulation Reversal in Evaporating Drops // *Physical Review Letters*, 2007. V. 99. P. 234502. DOI: 10.1103/PhysRevLett.99.234502.
5. Hu H., Larson R.G. Analysis of the Effects of Marangoni Stresses on the Microflow in an Evaporating Sessile Droplet // *Langmuir*, 2005. V. 21(9). P. 3972–3980. DOI: 10.1021/la0475270.
6. Hu H., Larson R.G. Evaporation of a sessile droplet on a substrate // *Journal of Physical Chemistry B*, 2002. V. 106. P. 1334–1344. DOI: 10.1021/jp0118322.
7. Hu H., Larson R.G. Analysis of the microfluid flow in an evaporating sessile droplet // *Langmuir*, 2005. V. 21(9). P. 3963–3971. DOI: 10.1021/la047528s.
8. Hu H., Larson R.G. Marangoni effect reverses coffee-ring depositions // *Journal of Physical Chemistry B*, 2006. V. 110(14). P. 7090–7094. DOI: 10.1021/jp0609232.
9. Watanabe T. Simulation of surface flows on a droplet in an oscillating pressure field // *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2011. V. 5. Iss. 8. P. 1398–1405.
10. Torfi S., Nejad S.M.H. Droplet Simulation, A Case Study: Evaporation. WSEAS Transactions on Fluid Mechanics, 2011. V. 6. Iss. 3. P. 192–197.
11. Nagornov O.V., Starostin N.V. Influence of substrate properties on evaporation of the sessile drop // *Advances in Engineering Mechanics and Materials*, 2014. P. 98–100.
12. Nagornov O.V., Starostin N.V. Influence of properties of liquid and substrate on evaporation of the sessile drop // *Wseas Transactions on Heat and Mass Transfer*, 2014. V. 9. P. 221–225.
13. Dunin S.Z., Nagornov O.V., Starostin N.V., Trifonenkov V.P. Analytical Solution for Evaporating Sessile Drops on Solid Substrates // *Recent Advances in Applied Mathematics, Modelling and Simulation*, 2014. P. 252–255.
14. Popov Y.O. Evaporative deposition patterns: spatial dimensions of the deposit // *Physical Review E*, 2005, V. 71. P. 036313. DOI: 10.1103/PhysRevE.71.036313.
15. Dunn G.J., Wilson S. K., Duffy B.R., David S., Sefiane K. The strong influence of substrate conductivity on droplet evaporation // *Journal of Fluid Mechanics*, 2009. V. 623. P. 329–351. DOI: 10.1017/S0022112008005004.
16. Sefiane K., Wilson S.K., David S., Dunn G.J., Duffy B.R. On the Effect of the Atmosphere on the Evaporation of Sessile droplet of water // *Physics of Fluids*, 2009. V. 21(6). P. 062101. DOI: 10.1063/1.3131062.

17. David S., Sefiane K., Tadrist L. Experimental investigation of the effect of thermal properties of the substrate in the wetting and evaporation of sessile drops // *Colloids and Surfaces A: Physico-chem. Eng. Aspects*, 2007. V. 298 (1). P. 108–114. DOI: 10.1016/j.colsurfa.2006.12.018.
18. Semenov S., Starov V.M., Rubio R.G., Agogo H., Velarde M.G. Evaporation of sessile water droplets: Universal behaviour in presence of contact angle hysteresis // *Colloids Surf. Aspects*, 2011. V. 391. P. 135–1444.
19. Saada M.A., Chikh S., Tadrist L. Evaporation of a sessile drop with pinned or receding contact line on a substrate with different thermophysical properties // *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2013. V. 58, P. 197–208. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2012.11.026.
20. Lebedev N.N. Special functions and their applications. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, NJ, 1965. 322 p.
21. Gossali G.E., Tonini S. Analytical solutions for modelling the evaporation of sessile drops // *Applied Mathematical Modelling*, 2023. V. 114. P. 61–77. DOI: 10.1016/j.apm.2022.09.023.
22. Emelyanenko K.A., Emelyanenko A.M., Boinovich L.B. Supercooling of evaporating water droplets on superhydrophobic surface at low temperatures // *Colloid Journal*, 2025, V. 87. № 4. P. 481–491. DOI: 10.1134/S1061933X25600642.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2025, vol. 14, no. 6, pp. 478–485

Analytical solution for temperature of evaporative drops on solid substrate

S. Z. Dunin, O. V. Nagornov[✉], V. P. Trifonenkov, S. A. Tyufilin

National Research Nuclear University MEPhI, Moscow, 115409, Russia

[✉] ovnagornov@mephi.ru

Received September 08, 2025; revised October 20, 2025; accepted October 21, 2025

The evaporation of liquid droplets on solid surfaces attracts the attention because it turns out to be decisive in many applied problems: in biology, pesticide spraying, printing, creating films with given properties, OLED technology, nanofabrication, DNA analysis, etc. The droplet evaporation is complex process, so analytical models can provide insight into process. Free evaporation of sessile liquid non-isothermal drop on solid substrate is analyzed. Exact formulae for temperature and concentration fields are found out as functions of dimensionless parameters. The non-uniform temperature distribution at the drop surface creates the thermocapillar Marangoni forces that change their direction in the vicinity of stagnation points. Direction of the forces and disposition of the stagnation points are derived as function of contact angle and thermodynamic parameters of model. Conditions for the stagnation points to appear are found out. Comparison of calculated and measured temperatures is done. The critical parameters of the ratio of the conductivities of droplet and substrate at which the monotonic temperature distribution changes and the cooling of droplet is possible.

Keywords: drop evaporation, thermocapillar flow, the Marangoni force, stagnation points.

References

1. Deegan R.D., Bakajin O., Dupont T.F., Huber G., Nagel S.R., Witten T. A. Capillary flow as the cause of ring stains from dried liquid drops. *Nature*, 1997. Vol. 389. Pp. 827–829. DOI:10.1038/39827.
2. Deegan R.D., Bakajin O., Dupont T.F., Huber G., Nagel S.R., Witten T.A. Contact line deposits in an evaporating drop. *Physical Review E*, 2000. Vol. 62. Pp. 756–765. DOI: 10.1103/physreve.62.756.
3. Deegan R.D. Pattern formation in drying drops. *Physical Review E*, 2000. Vol. 61(1). Pp. 475–485. DOI: 10.1103/physreve.61.475.
4. Ristenpart W.D., Kim P.G., Domingues C., Wan J., Stone H.A. Influence of Substrate Conductivity on Circulation Reversal in Evaporating Drops. *Physical Review Letters*, 2007. Vol. 99. Pp. 234502. DOI: 10.1103/PhysRevLett.99.234502.
5. Hu H., Larson R.G. Analysis of the Effects of Marangoni Stresses on the Microflow in an Evaporating Sessile Droplet. *Langmuir*, 2005. Vol. 21(9). Pp. 3972–3980. DOI: 10.1021/la0475270.

6. *Hu H., Larson R.G.* Evaporation of a sessile droplet on a substrate. *Journal of Physical Chemistry B*, 2002. Vol. 106. Pp. 1334–1344. DOI: 10.1021/jp0118322.
7. *Hu H., Larson R.G.* Analysis of the microfluid flow in an evaporating sessile droplet. *Langmuir*, 2005. Vol. 21(9). Pp. 3963–3971. DOI: 10.1021/la047528s.
8. *Hu H., Larson R.G.* Marangoni effect reverses coffee-ring depositions. *Journal of Physical Chemistry B*, 2006. Vol. 110(14). Pp. 7090–7094. DOI: 10.1021/jp0609232.
9. *Watanabe T.* Simulation of surface flows on a droplet in an oscillating pressure field. *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2011. Vol. 5. Iss. 8. Pp. 1398–1405.
10. *Torfi S., Nejad S.M.H.* Droplet Simulation, A Case Study: Evaporation. *WSEAS Transactions on Fluid Mechanics*, 2011. Vol. 6. Iss. 3. Pp. 192–197.
11. *Nagornov O.V., Starostin N.V.* Influence of substrate properties on evaporation of the sessile drop. *Advances in Engineering Mechanics and Materials*, 2014. Pp. 98–100.
12. *Nagornov O.V., Starostin N.V.* Influence of properties of liquid and substrate on evaporation of the sessile drop. *Wseas Transactions on Heat and Mass Transfer*, 2014. Vol. 9. Pp. 221–225.
13. *Dunin S.Z., Nagornov O.V., Starostin N.V., Trifonenkov V.P.* Analytical Solution for Evaporating Sessile Drops on Solid Substrates. *Recent Advances in Applied Mathematics, Modelling and Simulation*, 2014. Pp. 252–255.
14. *Popov Y.O.* Evaporative deposition patterns: spatial dimensions of the deposit. *Physical Review E*, 2005. Vol. 71. Pp. 036313. DOI: 10.1103/PhysRevE.71.036313.
15. *Dunn G.J., Wilson S.K., Duffy B.R., David S., Sefiane K.* The strong influence of substrate conductivity on droplet evaporation. *Journal of Fluid Mechanics*, 2009. Vol. 623. Pp. 329–351. DOI: 10.1017/S0022112008005004.
16. *Sefiane K., Wilson S.K., David S., Dunn G.J., Duffy B.R.* On the Effect of the Atmosphere on the Evaporation of Sessile droplet of water. *Physics of Fluids*, 2009. Vol. 21(6). Pp. 062101. DOI: 10.1063/1.3131062.
17. *David S., Sefiane K., Tadrist L.* Experimental investigation of the effect of thermal properties of the substrate in the wetting and evaporation of sessile drops. *Colloids and Surfaces A: Physico-chem. Eng. Aspects*, 2007. Vol. 298 (1). Pp. 108–114. DOI: 10.1016/j.colsurfa.2006.12.018.
18. *Semenov S., Starov V.M., Rubio R.G., Agogo H., Velarde M.G.* Evaporation of sessile water droplets: Universal behaviour in presence of contact angle hysteresis. *Colloids Surf. Aspects*, 2011. Vol. 391. Pp. 135–1444.
19. *Saada M.A., Chikh S., Tadrist L.* Evaporation of a sessile drop with pinned or receding contact line on a substrate with different thermophysical properties. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2013. Vol. 58. Pp. 197–208. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2012.11.026.
20. *Lebedev N.N.* Special functions and their applications. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1965. 322 p.
21. *Gossali G.E., Tonini S.* Analytical solutions for modelling the evaporation of sessile drops. *Applied Mathematical Modelling*, 2023. Vol. 114. Pp. 61–77. DOI: 10.1016/j.apm.2022.09.023.
22. *Emelyanenko K.A., Emelyanenko A.M., Boinovich L.B.* Supercooling of evaporating water droplets on superhydrophobic surface at low temperatures. *Colloid Journal*, 2025. Vol. 87. No. 4. Pp. 481–491. DOI 10.1134/S1061933X25600642.