

УДК 51-32

Анализ автомодельных решений задач о взаимодействии льда с гидрофильной жидкостью

© 2025 г. О. В. Нагорнов¹, Т. И. Бухарова¹, В. С. Загороднов², В. Л. Камынин¹¹ Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, 115409, Россия² Cryosphere Research Solutions LLC, Columbus, OH, 43221, США

Одномерные автомодельные решения позволяют установить основные аналитические закономерности процессов. В отличие от хорошо известной задачи Стефана о промерзании чистой воды при контакте со льдом, температура фазового перехода не постоянна и зависит от концентрации гидрофильной жидкости, описываемой уравнением диффузии. В работе используется линейное приближение для связи равновесных температуры и концентрации на границе контакта. Температура во льду и в жидкости описывается уравнениями теплопроводности. На фазовой границе происходит тепломассообмен: вода из гидрофильной жидкости намерзает на поверхность льда, ее концентрация увеличивается, или наоборот, происходит растворение льда на границе и понижается концентрация гидрофильной жидкости. Это определяется входными параметрами задачи. В работе анализируются такие решения для случая контакта льда с гидрофильными жидкостями – морской водой и раствором этанола, встречающиеся в задачах взаимодействия шельфовых ледников с океаном и при термическом бурении скважин в ледниках. В работе исследуются особенности выбора значений температуропроводности жидкости в прикладных задачах.

Ключевые слова: автомодельное решение, эффективная температуропроводность, гидрофильная жидкость.

Введение

Детальная постановка задачи рассмотрена ранее в [1]. Для двух контактирующих полупространств, заполненных гидрофильной жидкостью (HL) ($x < 0$) и льдом ($x > 0$) основная система уравнений имеет вид [1–4]:

$$T_{f,t} = a_f^2 T_{f,xx}, \quad -\infty < x < 0, t > 0, \quad (1)$$

$$C_t = a_c^2 C_{xx}, \quad -\infty < x < 0, t > 0, \quad (2)$$

$$T_{i,t} = a_i^2 T_{i,xx}, \quad 0 < x < +\infty, t > 0, \quad (3)$$

$$C(x, 0) = C_0, \quad T_f(x, 0) = T_1, \quad -\infty < x < 0, \quad (4)$$

$$T_i(x, 0) = T_0, \quad 0 < x < +\infty \quad (5)$$

$$k_f T_{f,x} - k_i T_{i,x} = L\rho \xi'(t), \quad x = \xi(t), t > 0, \quad (6)$$

✉ О.В. Нагорнов: ovnagornov@mephi.ru

Поступила в редакцию: 25.09.2025

После доработки: 29.10.2025

Принята к публикации: 05.11.2025

$$T_f(\xi, t) = T_i(\xi, t) = T_{eq}, t > 0, \quad (7)$$

$$C_{eq} = AT_{eq}, \quad x = \xi(t), t > 0, \quad (8)$$

$$-a_c^2 C_x = C \xi'(t), \quad x = \xi(t), t > 0, \quad (9)$$

где T_f и T_i – температура НЛ и льда, соответственно; C – концентрация НЛ; температуры и концентрация зависят от двух переменных (x, t) , x – координата, t – время; нижние индексы t и x в уравнениях обозначают соответствующие частные производные; a_f^2, a_i^2, a_c^2 – температуропроводности НЛ, льда и коэффициент диффузии НЛ, соответственно; C_0, T_1, T_0 – постоянные; k_f и k_i – коэффициенты теплопроводности НЛ и льда, соответственно; L – теплота плавления; ρ – плотность льда; A – постоянная.

В данной работе анализируется влияние выбора коэффициента температуропроводности гидрофильной жидкости на скорость движения фазовой границы, что необходимо учитывать при математическом моделировании прикладных задач.

Анализ автомодельного решения

Система уравнений (1)–(9) допускает автомодельное решение так, что все неизвестные оказываются функциями комбинации переменных $x/\sqrt{t}$ [1, 4]. Переходя к автомодельной переменной, уравнения в частных производных преобразуются в обыкновенные дифференциальные уравнения. Температуры и концентрация тогда могут быть найдены в следующем виде:

$$T_f(x, t) = B_1 + D_1 \Phi\left(\frac{x}{2a_f\sqrt{t}}\right), \quad T_i(x, t) = B_2 + D_2 \Phi\left(\frac{x}{2a_i\sqrt{t}}\right), \quad C(x, t) = B_3 + D_3 \Phi\left(\frac{x}{2a_c\sqrt{t}}\right), \quad (10)$$

где B и D с индексами обозначают неизвестные постоянные; $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$ – функция ошибок.

Фазовая граница подчиняется уравнению $\xi(t) = \alpha\sqrt{t}$, где α – постоянная (автомодельный параметр), подлежащая определению. Исключая неизвестные, получаем трансцендентное уравнение для параметра α :

$$\frac{T_1 G_f}{1 + \Phi_f} - \frac{C_0 \cdot G_f}{A} \left[\frac{1}{1 + \Phi_f} - \frac{\alpha}{\alpha(1 + \Phi_c) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} a_c E_c} \right] + \frac{T_0 G_i}{1 - \Phi_i} - \frac{C_0 G_i}{(1 - \Phi_i)A} \left[1 - \frac{\alpha(1 + \Phi_f)}{\alpha(1 + \Phi_c) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} a_c E_c} \right] = \alpha \rho L, \quad (11)$$

где уравнение (11) представляет исправленное уравнение для α из [1] и введены следующие обозначения:

$$\Phi_f = \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_f}\right), \quad \Phi_i = \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_i}\right), \quad \Phi_c = \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_c}\right), \\ E_c = e^{-\frac{\alpha^2}{4a_c^2}}, \quad E_f = e^{-\frac{\alpha^2}{4a_f^2}}, \quad E_i = e^{-\frac{\alpha^2}{4a_i^2}}, \quad G_f = \frac{2k_f \cdot E_f}{\sqrt{\pi} \cdot a_f}, \quad G_i = \frac{2k_i \cdot E_i}{\sqrt{\pi} \cdot a_i}.$$

В случае взаимодействия чистой воды и льда уравнение (11) упрощается и сводится к уравнению:

$$\frac{T_1 G_f}{1 + \Phi_f} + \frac{T_0 G_i}{1 - \Phi_i} = \alpha \rho L.$$

Когда конвективные движения и стратификация в жидкости отсутствуют, используются табличные значения для молекулярных температуропроводностей и коэффициента диффузии (табл. 1).

Таблица 1. Параметры задачи

a_i^2	a_f^2	a_c^2	k_i	k_f	k_c
$1.33 \cdot 10^{-6}$	$1.5 \cdot 10^{-7}$	$1.5 \cdot 10^{-8}$	2.22	0.53	2.0

В таблице размерности температуропроводностей указаны в $\text{м}^2/\text{с}$, коэффициенты теплопроводностей в $\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, плотность льда $917 \text{ кг}/\text{м}^3$, теплота плавления льда $3.3 \cdot 10^5 \text{ Дж}/\text{кг}$. В реальных задачах, например, взаимодействие океана и шельфового ледника, или процесс термобурения ледников с помощью гидрофильных жидкостей, вследствие образования конвективных ячеек и стратификации, необходимо использовать эффективные турбулентные значения температуропроводности жидкости [6–8]. Поэтому изменение температуропроводности морской воды и НЛ меняется от молекулярных значений порядка $10^{-8} - 10^{-7}$ до значений $0.01 - 0.1$ и выше в случае интенсивного перемешивания жидкости. В частности для областей подо льдом (шельфовые ледники) так называемая подавленная турбулентность (superstressed turbulent thermal diffusivity) составляет величины порядка $10^{-6} - 10^{-5}$, в придонных, верхних перемешанных слоях, в термоклинах, на больших глубинах океана эффективная температуропроводность меняется от 10^{-5} до $0.01 \text{ м}^2/\text{с}$ [6–8].

При моделировании натурных и лабораторных процессов термобурения ледников выбор значений температуропроводностей для гидрофильной жидкости оказывается принципиально влияет на результаты моделирования [4]. В силу отличия характера конвективных ячеек при лабораторном и натурном бурения льда, при моделировании необходимо надлежащим образом выбирать значения температуропроводностей.

На рис. 1 показано влияние значений температуропроводности морской воды на скорость растворения льда (аналогично в случаях бурения льда и последующего смыкания образованных скважин рассчитываемая скорость будет сильно зависеть от выбранного значения температуропроводности НЛ). При малых значениях температуропроводности параметр скорости растворения льда α значительно меняется, а при значениях порядка $10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$ и выше выходит почти на постоянную величину (в расчетах использовались следующие значения: $C_0 = 0.347$, $T_0 = -20^\circ\text{C}$, $T_1 = 1^\circ\text{C}$, $A = -0.01334$).

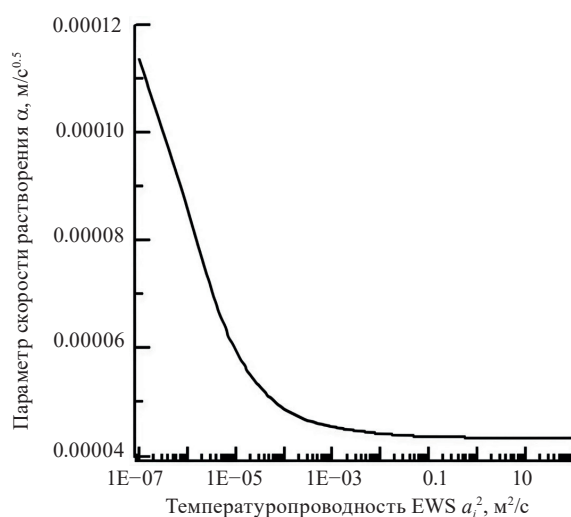


Рис. 1. Влияние эффективной температуропроводности морской воды на скорость фазовой границы

Рис. 2 демонстрирует влияние эффективной температуропроводности воды в условиях подавленной турбулентности. С увеличением температуропроводности скорость изменения скорости фазовой границы уменьшается.

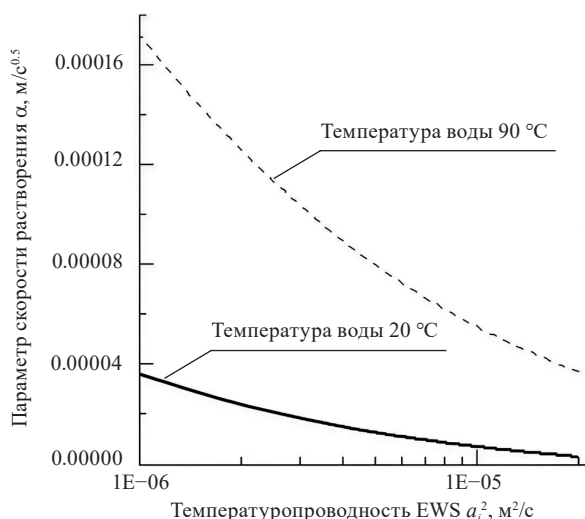


Рис. 2. Влияние эффективной температуропроводности и температуры жидкости на скорость фазовой границы.

Выводы

Найдено автомодельное решение задачи о взаимодействии льда с гидрофильной жидкостью. Фазовая граница движется согласно соотношению $x = \xi(t) = \alpha\sqrt{t}$ подобно хорошо известному решению задачи Стефана. Для параметра α , определяющего решение задачи, получено трансцендентное уравнение и определено численное решение при различных входных параметрах. Температура и концентрация гидрофильной жидкости, а также температура льда найдены в явной форме, удобной для дальнейшего анализа. На основе аналитического решения установлено, что скорость фазовой границы чувствительна к выбору значения эффективной температуропроводности гидрофильной жидкости. Поэтому при моделировании сложных прикладных задач выбор этого параметра заранее не известен, и его нужно определять из дополнительных условий. При высоких значениях температуропроводности гидрофильной жидкости, порядка 10^{-3} м²/с и выше, параметр скорости фазовой границы становится почти постоянным.

Финансирование

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации и выполнена по теме государственного задания FSWU-2023-0031.

Конфликт интересов

Конфликт интересов отсутствует.

Вклад авторов

О.В. Нагорнов – постановка задачи, участие в проведении исследования, анализ и обсуждение результатов.

Т.И. Бухарова – участие в проведении вычислений.

В.С. Загороднов – анализ и обсуждение результатов.

В.Л. Камынин – обсуждение результатов.

Список литературы

1. Нагорнов О.В., Бухарова Т.И. Автомодельное решение задачи о растворении льда гидрофильной жидкостью // Вестник НИЯУ МИФИ, 2025. Т. 14. № 4. С. 352–356.
2. Nagornov O.V., Sergienko O.V. Temperature field of an ice shelf in the vicinity of a hot water-drilled well // Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 1998. V. 71. № 1. P. 154–160.

3. Nagornov O.V., Zagorodnov V.S., Kelley J.J. Interaction of hydrophilic liquid with ice // Proceedings of Fourth International Symposium on Thermal Engineering and Science for Cold Regions, September 28 – October 1, 1993.
4. Talalay P.G., Fan X. Alternative clean approaches to accessing subglacial Lake Vostok // Arctic and Antarctic Research, 2024. V. 70(4). P. 499–513.
5. Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики. 2010. Долгопрудный: ИД Интеллект. 368 с.
6. Osborn T.R. Estimates of the local rate of vertical diffusion from dissipation measurements // Journal of Physical Oceanography, 1980. V.10(1). P. 83–89.
7. Stillinger D.C., Helland K.N., Van Atta C. W. Experiments on the transition of homogeneous turbulence to internal waves in a stratified fluid // Journal of Fluid Mechanics, 1983. V. 131. P. 91–122.
8. Gregg M.C., D'Asaro E.A., Riley J.J., Kunze E. Mixing efficiency in the ocean // Annual Review of Marine Science, 2018. V. 10. P. 443–473.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2025, vol. 14, no. 6, pp. 486–491

Analysis of self-similar solutions for the ice and hydrophilic liquid interaction problems

O. V. Nagornov^{1,✉}, T. I. Bukharova¹, V. S. Zagorodnov², V. L. Kamynin¹

¹ National research nuclear university MEPhI, Moscow, 115409, Russia

² Cryosphere Research Solutions LLC, Columbus, OH, 43221, USA

✉ ovnagornov@mephi.ru

Received September 25, 2025; revised October 29, 2025; accepted November 05, 2025

One-dimensional self-similar solutions allow us to establish the fundamental analytical properties for processes. Unlike the well-known Stefan problem concerning the freezing of pure water in contact with ice, the phase transition temperature is not constant and depends on the concentration of the hydrophilic liquid, which is described by a diffusion equation. We use a linear approximation to relate the equilibrium temperature and concentration at the phase boundary. The temperature in the ice and in the liquid is described by the heat conduction equations. Heat and mass transfer occur at the phase boundary when water from the hydrophilic liquid freezes onto the ice surface, increasing its concentration, or conversely, ice melting at the boundary occurs, decreasing the concentration of the hydrophilic liquid. This is determined by the input parameters of the problem. The paper analyzes such solutions for the case of ice – hydrophilic liquids interactions, for example, seawater and an ethanol solution that take place in problems of the interaction of ice shelves with the ocean and in the thermal drilling of boreholes in glaciers. The study also investigates peculiarities of choice of the thermal diffusivity of the liquid in applied problems.

Keywords: self-similar solution, effective thermal diffusivity, hydrophilic liquid.

References

1. Nagornov O.V., Bukharova T.I. Avtomodel'noe reshenie zadachi o rastvorenii l'da gidrofil'noj zhidkost'yu [Self-similar solution of the problem on dissolution of ice by hydrophilic liquid]. Vestnik NIYaU MIFI, 2025. Vol. 14. No. 4. Pp. 352–356 (in Russian).
2. Nagornov O.V., Sergienko O.V. Temperature field of an ice shelf in the vicinity of a hot water-drilled well. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 1998. Vol. 71. No. 1. Pp. 154–160.
3. Nagornov O.V., Zagorodnov V.S., Kelley J.J. Interaction of hydrophilic liquid with ice. Proceedings of Fourth International Symposium on Thermal Engineering and Science for Cold Regions, September 28 – October 1, 1993.
4. Talalay P.G., Fan X. Alternative clean approaches to accessing subglacial Lake Vostok. The Arctic and Antarctic Problems, 2024. Vol. 70(4). Pp. 499–513.

5. *Kudryashov N.A.* Metody nelineinoi matematicheskoi fiziki (Methods of non-linear mathematical physics). Dolgoprudnyj, PH Intellect Publ., 2010. 368 p.
6. *Osborn T.R.* Estimates of the local rate of vertical diffusion from dissipation measurements // *Journal of Physical Oceanography*, 1980. Vol. 10(1). Pp. 83–89.
7. *Stillinger D.C., Helland K.N., Van Atta C. W.* Experiments on the transition of homogeneous turbulence to internal waves in a stratified fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 1983. Vol. 131. Pp. 91–122.
8. *Gregg M.C., D'Asaro E.A., Riley J. J., Kunze E.* Mixing efficiency in the ocean. *Annual Review of Marine Science*, 2018. Vol. 10. Pp. 443–473.