ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЯДЕРНОГО УНИВЕРСИТЕТА “МИФИ”, 2019, том 8, № 5, с. 428–436

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 517.9

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО И ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА, ИМЕЮЩИЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ, ВЫРАЖЕННЫЕ ЧЕРЕЗ ЭЛЛИПТИЧЕСКУЮ ФУНКЦИЮ ВЕЙЕРШТРАССА

© 2019 г. С. Ф. Лаврова[1,*], Н. А. Кудряшов[1,], А. А. Кутуков[1,***]**

[1] *Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, 115409, Россия*

**e-mail: infuriatedot@gmail.com*

***e-mail: nakudr@gmail.com*

****e-mail: aakutukov@mephi.ru*

Поступила в редакцию 19.07.19 г.
После доработки 31.07.2019 г.
Принята к публикации 27.08.2019 г.

Задача классификации обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих аналитические решения, является классической. В данной работе рассматривается задача классификации обыкновенных дифференциальных уравнений, точные решения которых выражаются через эллиптическую функцию Вейерштрасса. Алгоритм поиска таких уравнений следующий. Сначала выбирается порядок полюса при разложении решения уравнения в ряд Лорана в окрестности особой точки. Затем задается порядок обыкновенного дифференциального уравнения, которое хотим построить. После этого с помощью многоугольника Ньютона строится общий вид дифференциального уравнения, принимая во внимание порядок полюса и порядок уравнения. Затем ищутся ограничения на параметры построенного обыкновенного дифференциального уравнения в общем виде, при которых имеются решения, выраженные через эллиптическую функцию Вейерштрасса. Во втором разделе данной работы приведены теоремы, которые использованы для поиска ограничений на параметры. В последующих пяти разделах этой работы описанный алгоритм применяется для построения автономных нелинейных полиномиальных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков. Кроме того, в этих разделах приведены нелинейные автономные обыкновенные дифференциальные уравнения и их решения, выраженные через эллиптическую функцию Вейерштрасса.

Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения, эллиптическая функция Вейерштрасса, точные решения

DOI: 10.1134/S2304487X19050031

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача классификации обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих аналитические решения, является классической. Ей посвящены работы Фукса, Брио, Буке и Пуанкаре. Особенно яркий след в этой области оставил Пенлеве. Еще более века назад ему вместе со своими учениками удалось найти пятьдесят три канонических нелинейных дифференциальных уравнения второго порядка в полиномиальной форме, общие решения которых не имеют критических подвижных точек [1–3]. Про такие уравнения говорят, что они обладают свойством Пенлеве [5, 4]. Однако свойство Пенлеве является лишь необходимым условием интегрируемости дифференциального уравнения.

Данная работа посвящена классификации нелинейных автономных полиномиальных дифференциальных уравнений, точные решения которых выражаются через эллиптическую функцию Вейрштрасса. Эти уравнения имеют точные решения, но не все из них являются интегрируемыми в том смысле, что имеют общие решения, выраженные в аналитическом виде. Таким образом, нами делается попытка расширения класса дифференциальных уравнений, имеющих точные решения.

Работа построена следующим образом. Во втором разделе описан алгоритм построения уравнений, решения которых выражаются через эллиптическую функцию Вейрштрасса. В последующих разделах построены нелинейные автономные дифференциальные уравнения третьего и четвертого порядков в полиномиальной форме и их точные решения. Эти решения важны, так как ряд нелинейных эволюционных уравнений сводится к нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям с решениями в форме полученных в работе решений.

2. МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть задано автономное нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$E[y(z)] = 0, \tag{2.1}$$

где $E[y(z)]$ – полином по $y(z)$ и ее производным. Так как уравнение автономное, для каждого решения $y(z)$ существует семейство решений $y(z - z_0)$. Без ограничения общности опустим константу z_0. Предположим, что уравнение (2.1) имеет N различных асимптотических разложений решения в ряд Лорана в окрестности полюса $z = 0$

$$y^{(i)}(z) = \sum_{k=1}^{p_i} \frac{c_k^{(i)}}{z^k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(i)} z^k, \quad 0 < |z| < \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{2.2}$$

Здесь p_i – порядок полюса $z = 0$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Все мероморфные эллиптические решения уравнения* (2.1) *при* $N = 1$ *имеют следующий вид*:

$$y(z) = \left\{ \sum_{k=2}^{p} \frac{(-1)^k c_{-k}}{(k-1)!} \frac{d^{k-2}}{dz^{k-2}} \right\} \wp(z, \omega_1, \omega_2) + h_0. \tag{2.3}$$

Необходимым условием существования такого решения является $c_1 = 0$.

Теорема 2. *Все мероморфные эллиптические решения уравнения* (2.1) *при* $N > 1$ *имеют следующий вид*:

$$y(z) = \left\{ \sum_{i \in I} \sum_{k=2}^{p_i} \frac{(-1)^k c_{-k}^{(i)}}{(k-1)!} \frac{d^{k-2}}{dz^{k-2}} \right\} \times \left(\frac{1}{4} \left[\frac{\wp_z(z) + B_i}{2(\wp(z) - A_i)} \right]^2 - \wp(z) \right) + \sum_{i \in I} \frac{c_{-1}^{(i)} (\wp_z(z) + B_i)}{2(\wp(z) - A_i)} + \left\{ \sum_{k=2}^{p_{i_0}} \frac{(-1)^k c_{-k}^{(i_0)}}{(k-1)!} \right\} \wp(z) + h_0. \tag{2.4}$$

Здесь $\wp(z, \omega_1, \omega_2) \overset{\text{def}}{=} \wp(z)$. *Необходимым условием существования такого решения является* $\sum_{i \in I} c_{-1}^{(i)} + c_{-1}^{(i_0)} = 0$.

Доказательства этих теорем можно найти в работах [6–8].

В этой работе мы занимаемся поиском автономных полиномиальных дифференциальных уравнений с эллиптическими решениями. Применяемый в данной работе алгоритм состоит из следующих шагов [9, 10].

Первый шаг – построение нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения в общем виде при помощи многоугольников Ньютона [10–12]. Для построения многоугольников Ньютона в данной работе использовалась программа [13].

В соответствии с книгой Брюно [14] введем некоторые определения. Выражения вида $C_1 z^{p_1} y^{p_2}$ называются мономами. C_1 здесь произвольная константа. Произведение монома и конечного числа производных $\frac{d^k y}{dz^k} (k \in \mathbb{N})$ носит название дифференциального монома.

Предположим, что мы ищем точные решения дифференциального уравнения в полиномиальной форме (2.1). Каждому его моному можно поставить в соответствие точку на плоскости следующим образом

$$C_1 z^{p_1} y^{p_2} \to (q_1, q_2), \quad C_2 \frac{d^k y}{dz^k} \to (-k, 1).$$

C_1 и C_2 здесь – произвольные константы. При перемножении мономов их координаты складываются. Множество точек, соответствующее всем мономам дифференциального уравнения, образует носитель этого уравнения.

Соединив точки носителя в выпуклую фигуру, мы получим многоугольник Ньютона дифференциального уравнения (2.1). Углы и вершины многоугольника в основном определяют степенные или нестепенные асимптотики и разложение в ряд решения уравнения. Используя многоугольники Ньютона, можно легко найти общую форму нелинейного дифференциального уравнения с неизвестными параметрами.

Алгоритм поиска общей формы уравнения следующий. Сначала выбираются порядок дифференциального уравнения, которое хотим построить, и порядок полюса при разложении решения этого уравнения в ряд Лорана в окрестности особой точки. Одним из ведущих членов искомого уравнения выбирается производная высшего порядка. Мономы остальных ведущих членов ищутся из соображения, что они должны иметь ту же степень, что и моном высшей производной. В результате первого шага мы имеем нелинейное дифференциальное уравнение в полиномиальной форме.

Второй шаг – поиск ограничений на параметры построенного дифференциального уравнения общего вида, при которых это уравнение имеет точные решения. Существует очень много способов построения решений нелинейных неинтегрируемых дифференциальных уравнений [15–17]. При выполнении этого шага для поиска решений уравнений общего вида мы пользуемся теоремами 3 и 4.

3. УРАВНЕНИЕ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С РЕШЕНИЕМ, ИМЕЮЩИМ ПОЛЮС ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка вида (2.1) с решением, имеющим полюс первого порядка. Предполагаем, что y_{zzz} является одним из ведущих членов этого уравнения. Тогда все остальные ведущие члены можно найти при помощи степенной геометрии. Мономы ведущих членов должны давать значение с тем же полюсом, что и моном третьей производной. Обозначим координаты мономов ведущих членов как (m,n). В случае уравнения третьего порядка с решением, имеющим полюс первого порядка, получаем, что m и n являются корнями следующего уравнения

$$|m| + n = 4, \quad n \in \mathbb{N}^0, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad -3 < m \leq 0. \tag{3.1}$$

Отсюда получается, что координаты мономов других ведущих членов $(0,4)$, $(-1,3)$, $(-2,2)$ и другими ведущими членами являются y^4, $y_z y^2$, $y_{zz} y$, $y_z{}^2 y$. Построив многоугольник Ньютона уравнения с ведущими членами и заполнив его точками с целочисленными координатами (рис. 1), получим общий вид дифференциального уравнения третьего порядка типа (2.1) с решением, имеющим полюс первого порядка

$$y_{zzz} + a_1 y_z + a_2 y_{zz} + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + b_4 y^4 + \\ + c_1 y y_{zz} + c_2 y_z{}^2 + c_3 y y_z + c_4 y^2 y_z = 0, \tag{3.2}$$

где $a_1, a_2, \; b_1, b_2, b_3, b_4, \; c_1, c_2, c_3, c_4$ — параметры уравнения.

Без ограничения общности положим $c_4 = -6$. Также примем $b_4 = 0$ и будем рассматривать уравнение

$$y_{zzz} + a_1 y_z + a_2 y_{zz} + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \\ + c_1 y y_{zz} + c_2 y_z{}^2 + c_3 y y_z - 6 y^2 y_z = 0. \tag{3.3}$$

Уравнение (3.3) имеет два разложения решения в ряд Лорана в окрестности полюса

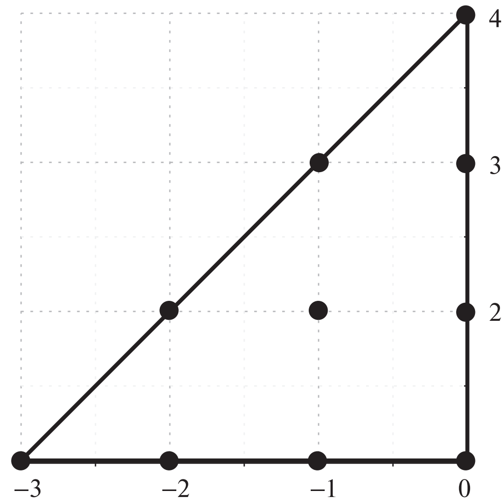

Рис. 1. Многоугольник Ньютона уравнения (3.2).

$$y(z) = \\ = \left(-\frac{c_1}{6} - \frac{c_2}{12} + \frac{\sqrt{4c_1{}^2 + 4c_1c_2 + c_2{}^2 + 144}}{12}\right)\frac{1}{z} + \ldots \\ y(z) = \\ = \left(-\frac{c_1}{6} - \frac{c_2}{12} - \frac{\sqrt{4c_1{}^2 + 4c_1c_2 + c_2{}^2 + 144}}{12}\right)\frac{1}{z} + \ldots \tag{3.4}$$

При $c_2 = -2c_1$ решение уравнения (3.3) можно искать в виде

$$y(z) = -\frac{\wp_z(z, g_2, g_3) + B_1}{2(\wp(z, g_2, g_3) - A_1)} + h_0. \tag{3.5}$$

При $h_0 = 0$ разложение (3.5) имеет вид

$$y(z) = \frac{1}{z} + A_1 z - \frac{B_1 z^2}{2} + \\ + \left(A_1{}^2 - \frac{6c_1 A_1{}^2 + 2a_2 B_1}{20c_1}\right) z^3 - \frac{B_1 A_1}{2} z^4 + o(z^5). \tag{3.6}$$

Подставив это разложение в (3.3) и последовательно приравняв коэффициенты при различных степенях z к нулю, получим значения параметров

$$c_3 = 0, \quad A_1 = -\frac{b_2}{6c_1}, \quad B_1 = \frac{a_2 b_2 + b_1 c_1}{6c_1{}^2}, \\ g_2 = \frac{2a_2{}^2 b_2 + 2a_2 b_1 c_1 + b_2{}^2 c_1}{12c_1{}^3} \\ a_1 = -\frac{b_2}{c_1}, \quad g_3 = \frac{6a_2 b_1 b_2 + 6b_1{}^2 c_1 + b_2{}^3}{216c_1{}^3}, \\ b_3 = -2a_2. \tag{3.7}$$

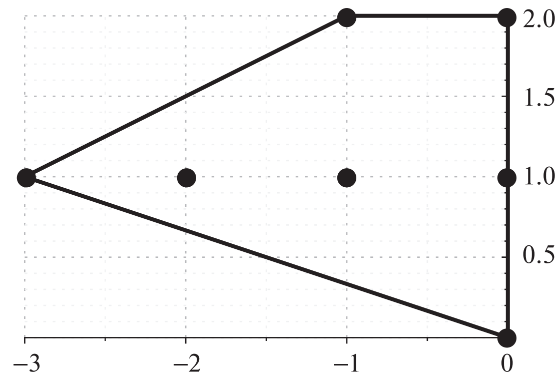

Рис. 2. Многоугольник Ньютона уравнения (4.2).

Итак, мы получили, что формула (3.5) является решением уравнения (3.3) при значениях параметров (3.7).

4. УРАВНЕНИЕ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С РЕШЕНИЕМ, ИМЕЮЩИМ ПОЛЮС ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка (2.1), которое имеет решение с полюсом второго порядка. Как и в предыдущем разделе, обозначим координаты мономов ведущих членов как (m, n). В случае уравнения третьего порядка с решением, имеющим полюс второго порядка, получаем, что m и n являются корнями следующего уравнения

$$|m| + 2n = 5, \quad n \in \mathbb{N}^0, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad -3 < m \le 0. \quad (4.1)$$

Отсюда получается, что координаты мономов других ведущих членов $(-1, 2)$ и второй ведущий член — yy_z. Построив многоугольник Ньютона уравнения с ведущими членами и заполнив его точками с целочисленными координатами (рис. 2), получим общий вид дифференциального уравнения третьего порядка типа (2.1) с решением, имеющим полюс второго порядка

$$y_{zzz} + a_2 y_{zz} + a_3 y_z + a_4 y y_z + a_5 y^2 + a_6 y + a_7 = 0. \quad (4.2)$$

Пусть $y = \frac{y'}{a_4}$, тогда, опуская штрихи, уравнение (4.2) запишем в виде

$$y_{zzz} + a_2 y_{zz} + a_3 y_z + y y_z + \tilde{a}_5 y^2 + a_6 y + a_7 = 0, \quad (4.3)$$

где $\tilde{a}_5 = \frac{a_5}{a_4}$. Уравнение, состоящее из ведущих членов уравнения (4.2), имеет вид

$$y_{zzz} + y y_z = 0. \quad (4.4)$$

Подстановка $y(z) = \frac{a_0}{(z - z_0)^p}$ в уравнение (4.3) приводит к $(a_0, p) = (0, 2)$ и $(a_0, p) = (-12, 2)$. При помощи подстановки $y(z) = \frac{-12}{(z - z_0)^2} + \beta(z - z_0)^{r-2}$ находятся индексы Фукса $r_1 = -1,\ r_2 = 4,\ r_3 = 6$. Подстановка

$$y(z) = \sum_{i=-2}^{\infty} c_i (z - z_0)^i \quad (4.5)$$

в уравнение (4.3) позволяет найти коэффициенты разложения в ряд Лорана решения уравнения. Необходимое условие существования эллиптических решений $c_{-1} = 0$ приводит к выражению $a_5 = \frac{a_2}{2}$. При нахождении коэффициентов c_i получается ограничение на параметры уравнения (4.3) $a_6 = a_2 a_3$. Разложение решения уравнения (4.3) до десятого порядка включительно

$$\begin{aligned} y(z) = &-\frac{12}{(z - z_0)^2} - a_3 - \frac{(a_3^2 a_2 - 2a_7)}{20 a_2} \times (z - z_0)^2 + c_4 (z - z_0)^4 - \frac{(a_3^2 a_2 - 2a_7)^2}{14\,400 a_2^2} (z - z_0)^6 + \\ &+ \frac{(a_3^2 a_2 - 2a_7) c_4}{880 a_2} (z - z_0)^8 - \frac{(a_2^3 a_3^6 - 6 a_2^2 a_3^4 a_7 + 144\,000 a_2^3 c_4^2 + 12 a_2 a_3^2 a_7^2 - 8 a_7^3)}{22\,464\,000 a_2^3} (z - z_0)^{10} \end{aligned} \quad (4.6)$$

содержит две произвольные константы z_0 и c_4 и не проходит тест Пенлеве. После обозначения параметров $a_2 = b_1$, $a_3 = b_2$, $a_7 = b_3$ уравнение (4.3) с учетом ограничений на параметры принимает вид

$$y_{zzz} + b_1 y_{zz} + b_2 y_z + y y_z + \frac{b_1}{2} y^2 + b_1 b_2 y + b_3 = 0. \quad (4.7)$$

Ищутся точные решения уравнения (4.7), выраженные через эллиптическую функцию Вейерштрасса $\wp(z, g_2, g_3)$.

1. Пусть решение уравнения (4.7) имеет одно разложение в ряд Лорана в окрестности $z = 0$ (поскольку рассматривается автономное уравнение, то без ограничения общности константа z_0 опускается). Тогда точное решение уравнения (4.7) ищется в виде

$$y(z) = c_{-2} \wp(z, g_2, g_3) + h_0. \quad (4.8)$$

Подстановка выражения (4.8) в уравнение (4.7) позволяет найти точное решение уравнения (4.7)

$$y(z) = -12 \wp\left(z, \frac{b_1 b_2^2 - 2b_3}{12 b_1}, g_3\right) - b_2. \quad (4.9)$$

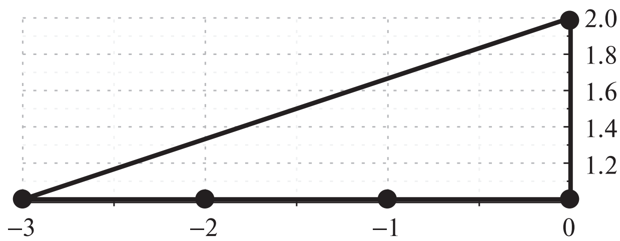

Рис. 3. Многоугольник Ньютона уравнения (5.2).

В случае, когда $g_2^3 - 27g_3^2 = 0$, эллиптическое решение вырождается, то есть условие вырождения выглядит следующим образом

$$g_3 = \pm\left(\frac{b_1 b_2^2 - 2b_3}{36b_1}\right)^{\frac{3}{2}}. \qquad (4.10)$$

2. Пусть решение уравнения (4.7) имеет два разложения в ряд Лорана в окрестности $z = 0$. Тогда точное решение уравнения (4.7) ищется в виде

$$y(z) = \frac{c_{-2}}{4}\left(\frac{\wp_z(z, g_2, g_3) + B_1}{\wp(z, g_2, g_3) - A_1}\right)^2 + h_0. \qquad (4.11)$$

Точное решение уравнения (4.7) вида (4.11) выражается следующим образом:

$$y(z) = -3\left(\frac{\wp_z(z, g_2, g_3)}{\wp(z, g_2, g_3) - A_1}\right)^2 - b_2 + 24A_1, \qquad (4.12)$$

где

$$g_2 = \frac{720A_1^2 b_1 - b_1 b_2^2 + 2b_3}{48b_1}, \qquad g_3 = -\frac{A_1(528A_1^2 b_1 - b_1 b_2^2 + 2b_3)}{48b_1}. \qquad (4.13)$$

Условие вырождения эллиптического решения $g_2^3 - 27g_3^2 = 0$ имеет вид

$$A_1 = \pm\frac{\sqrt{b_1(b_1 b_2^2 - 2b_3)}}{12b_1}. \qquad (4.14)$$

3. Пусть решение уравнения (4.7) имеет три разложения в ряд Лорана в окрестности $z = 0$. Тогда точное решение уравнения (4.7) ищется в виде

$$y(z) = \frac{c_{-2}}{4}\left(\frac{\wp_z(z, g_2, g_3) + B_1}{\wp(z, g_2, g_3) - A_1}\right)^2 + \frac{c_{-2}}{4}\left(\frac{\wp_z(z, g_2, g_3) + B_2}{\wp(z, g_2, g_3) - A_2}\right)^2 - c_{-2}\wp(z, g_2, g_3) + h_0. \qquad (4.15)$$

Уравнению (4.7) соответствует решение вида (4.16) с параметрами

$$c_{-2} = -12, \quad h_0 = -b_2 + 48A_2, \quad A_1 = A_2, \quad B_1 = -B_2,$$
$$B_2 = \frac{\sqrt{3}(144A_2^2 b_1 - b_1 b_2^2 + 2b_3)}{1296\sqrt{A_2}b_1}, \quad g_2 = \frac{1440A_2^2 b_1 - b_1 b_2^2 + 2b_3}{108b_1}, \qquad (4.16)$$
$$g_3 = \frac{(-5\,246\,208A_2^4 + 5472A_2^2 b_2^2 - b_2^4)b_1^2 + (-10\,944A_2^2 b_3 + 4b_2^2 b_3)b_1 - 4b_3^2}{559872A_2 b_1^2}.$$

Условие вырождения эллиптического решения $g_2^3 - 27g_3^2 = 0$ имеет вид

$$A_2 = \pm\frac{\sqrt{b_1(b_1 b_2^2 - 2b_3)}}{12b_1}, \quad A_2 = \pm\frac{\sqrt{b_1(b_1 b_2^2 - 2b_3)}}{36b_1}. \qquad (4.17)$$

Таким образом, формулы (4.9), (4.12) при значениях параметров (4.13) и (4.16) при значениях параметров (4.16) являются решениями уравнения (4.7).

5. УРАВНЕНИЕ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С РЕШЕНИЕМ, ИМЕЮЩИМ ПОЛЮС ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка (2.1), которое имеет решение с полюсом третьего порядка. Снова обозначим координаты мономов ведущих членов как (m, n). В случае уравнения третьего порядка с решением, имеющим полюс третьего порядка, получаем, что m и n являются корнями следующего уравнения

$$|m| + 3n = 6, \quad n \in \mathbb{N}^0, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad -3 < m \le 0. \qquad (5.1)$$

Получаем, что координаты мономов других ведущих членов $(0, 2)$ и второй ведущий член – y^2. Построив многоугольник Ньютона уравнения с ведущими членами и заполнив его точками с целочисленными координатами (рис. 3), получим общий вид дифференциального уравнения третьего порядка типа (2.1) с решением, имеющим полюс третьего порядка

$$y_{zzz} = a_1 y_z + a_2 y_{zz} + b_1 y + b_2 y^2. \qquad (5.2)$$

Без ограничения общности можем предположить, что $b_2 = -60$ и рассмотрим уравнение

$$y_{zzz} = a_1 y_z + a_2 y_{zz} + b_1 y - 60y^2. \qquad (5.3)$$

У уравнения (5.3) есть одно разложение решения в ряд Лорана в окрестности полюса, которое выглядит следующим образом:

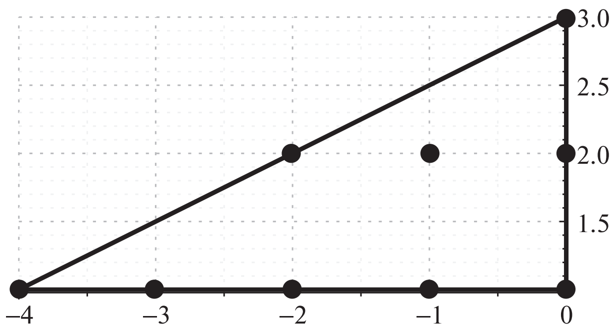

Рис. 4. Многоугольник Ньютона уравнения (6.2).

$$y(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{a_2}{8}\frac{1}{z^2} - \left(\frac{a_2^2}{608} + \frac{a_1}{38}\right)\frac{1}{z} + + \frac{13}{72960}a_2^3 + \frac{7}{9120}a_1 a_2 + \frac{b_1}{120} + \ldots \quad (5.4)$$

При $a_1 = -a_2^2/16$ решение уравнения (5.3) можно искать в виде

$$y(z) = h_0 + \frac{a_2}{8}\wp(z, g_2, g_3) - \frac{1}{2}\wp_z(z, g_2, g_3). \quad (5.5)$$

Разложим (5.5) в ряд Лорана

$$y(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{a_2}{8}1z + \frac{a_2^3}{7680} + \frac{b_1}{120} - \frac{1}{61440}a_2^4 z + \ldots \quad (5.6)$$

и подставим это разложение в (5.3). Приравняв к нулю коэффициенты при различных степенях z, получим

$$h_0 = \frac{a_2^3}{7680} + \frac{b_1}{120}, \quad g_2 = \frac{a_2^4}{3072}, \quad g_3 = \frac{13a_2^6}{4\,423\,680} - \frac{b_1^2}{2160}. \quad (5.7)$$

Таким образом, формула (5.5) является решением уравнения (5.3) при ограничениях на параметры (5.7).

6. УРАВНЕНИЕ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С РЕШЕНИЕМ, ИМЕЮЩИМ ПОЛЮС ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим дифференциальное уравнение четвертого порядка (2.1), которое имеет решение с полюсом второго порядка. Обозначим координаты мономов ведущих членов как (m, n). В случае уравнения третьего порядка с решением, имеющим полюс второго порядка, получаем, что m и n являются корнями следующего уравнения

$$|m| + 2n = 6, \quad n \in \mathbb{N}^0, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad -4 < m \le 0. \quad (6.1)$$

Отсюда получается, что координаты мономов других ведущих членов $(0, 3)$, $(-2, 2)$ и остальными ведущими членами являются y^3, yy_{zz}. Построив многоугольник Ньютона уравнения с ведущими членами и заполнив его точками с целочисленными координатами (рис. 4), получим общий вид дифференциального уравнения четвертого порядка типа (2.1) с решением, имеющим полюс второго порядка

$$y_{zzzz} + a_1 y_z + a_2 y_{zz} + a_3 y_{zzz} + b_1 y + b_2 y^2 + + b_3 y^3 + c_1 y y_{zz} + c_2 y_z^2 + c_3 y y_z = 0. \quad (6.2)$$

Без ограничения общности положим $b_3 = -120 - 6c_1 - 4c_2$. Уравнение (6.2) имеет два разложения решения в ряд Лорана в окрестности полюса

$$y^{(1)}(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{5c_3(3c_1 + 2c_2 + 120)}{4(3c_1 + 2c_2 + 60)(2c_1 + 3c_2)}\frac{1}{z} + \ldots$$
$$y^{(2)}(z) = -\frac{60}{(3c_1 + 2c_2 + 60)}\frac{1}{z^2} + + \frac{5c_3(3c_1 + 2c_2 + 120)}{4(3c_1 + 2c_2 + 60)(2c_1 + 3c_2)}\frac{1}{z} + \ldots \quad (6.3)$$

Из условия $c_{-1}^{(1)} + c_{-1}^{(2)} = 0$ следует равенство

$$a_3 = \frac{c_3(-51c_1^2 - 58c_1c_2 - 16c_2^2 - 5040c_1 - 3360c_2 - 100\,800)}{(-120 - 6c_1 - 4c_2)(2c_1 + 3c_2)}. \quad (6.4)$$

При выполнении всех перечисленных в разделе условий решение уравнения (6.2) можно искать в виде

$$y(z) = \frac{(\wp_z(z, g_2, g_3) + B_1)^2}{4(\wp(z, g_2, g_3) - A_1)^2} - \wp(z, g_2, g_3) - - 60\frac{\wp(z, g_2, g_3)}{3c_1 + 2c_2 + 60} + h_0 - - \frac{5c_3(3c_1 + 2c_2 + 120)(\wp_z(z, g_2, g_3) + B_1)^2}{4(3c_1 + 2c_2 + 60)(2c_1 + 3c_2)(\wp(z, g_2, g_3) - A_1)^2}. \quad (6.5)$$

Разложение (6.5) в ряд выглядит следующим образом

$$y(z) = -\frac{60}{(3c_1 + 2c_2 + 60)z^2} + + \frac{5c_3(3c_1 + 2c_2 + 120)}{2(3c_1 + 2c_2 + 60)(2c_1 + 3c_2)z} + 2A_1 + h_0 + \ldots \quad (6.6)$$

Подставим (6.6) в уравнение (6.2) и, последовательно приравнивая коэффициенты при степенях z к нулю, получим значения параметров

$$c_2 = -\frac{3c_1}{2} - 60, \quad A_1 = -\frac{a_1}{2c_3}, \quad B_1 = 0, g_2 = \frac{3a_1^2}{4c_3^2},$$
$$b_1 = -\frac{12(a_2c_3 + 12a_1)a_1}{c_3^2}, \quad g_3 = -\frac{a_1^3}{8c_3^3}. \tag{6.7}$$

Итак, уравнение (6.2) имеет решение (6.5) при ограничениях на параметры (6.7).

7. УРАВНЕНИЕ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С РЕШЕНИЕМ, ИМЕЮЩИМ ПОЛЮС ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Рассмотрим дифференциальное уравнение четвертого порядка (2.1), которое имеет решение с полюсом третьего порядка. Обозначим координаты мономов ведущих членов как (m, n). В случае уравнения третьего порядка с решением, имеющим полюс третьего порядка, получаем, что m и n являются корнями следующего уравнения

$$|m| + 3n = 7, \quad n \in \mathbb{N}^0, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad -4 < m \le 0. \tag{7.1}$$

Отсюда получается, что координаты мономов других ведущих членов $(-1, 2)$ и вторым ведущим членом является $y_z y$. Построив многоугольник Ньютона уравнения с ведущими членами и заполнив его точками с целочисленными координатами (рис. 5), получим общий вид дифференциального уравнения четвертого порядка типа (2.1) с решением, имеющим полюс третьего порядка

$$y_{zzzz} + a_1y_z + a_2y_{zz} + a_3y_{zzz} + b_1y + b_2y^2 + c_1yy_z = 0. \tag{7.2}$$

Уравнение (7.2) имеет одно разложение решения в ряд Лорана в окрестности полюса:

$$y(z) = \frac{120}{c_1z^3} - \frac{15(a_3c_1 - 2b_2)}{c_1^2z^2} + \frac{-15a_3^2c_1^2 + 240a_2c_1^2 - 420a_3b_2c_1 + 900b_2^2}{76c_1^3z} + \ldots \tag{7.3}$$

Для поиска эллиптических решений уравнения (7.2) необходимо выполнение условия $c_1 = 0$. Поэтому положим

$$a_2 = \frac{a_3^2c_1^2 + 28a_3b_2c_1 - 60b_2^2}{16c_1^2}. \tag{7.4}$$

Тогда решение уравнения (7.2) можно искать в виде

$$y(z) = -\frac{15(a_3c_1 - 2b_2)}{c_1^2}\wp(z, g_2, g_3) - \frac{60}{c_1}\wp_z(z, g_2, g_3) + h_0. \tag{7.5}$$

Разложение (7.5) в ряд имеет вид

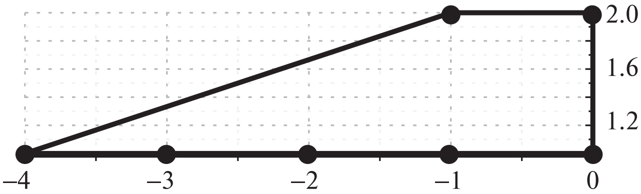

Рис. 5. Многоугольник Ньютона уравнения (7.2).

$$y(z) = \frac{120}{c_1z^3} - \frac{15(a_3c_1 - 2b_2)}{c_1^2z^2} + h_0 - \frac{6g_2z}{c_1} - \frac{3(a_3c_1 - 2b_2)g_2z^2}{4c_1^2} - \frac{60g_3z^3}{7c_1} + \ldots \tag{7.6}$$

Подставив (7.6) в (7.2) и последовательно приравняв коэффициенты при степенях z к нулю, получим следующие значения параметров

$$b_1 = -\frac{(a_3^3c_1^3 - 6a_3^2b_2c_1^2 + 64c_1^4h_0 + 12b_2^2a_3c_1 - 8b_2^3)b_2}{32c_1^4},$$
$$h_0 = \frac{(-a_3^3 - 64a_1)c_1^3 + 14a_3^2b_2c_1^2 - 44b_2^2a_3c_1 + 40b_2^3}{64c_1^4}, \tag{7.7}$$
$$g_2 = \frac{(a_3c_1 - 2b_2)^4}{3072c_1^4}.$$

$$g_3 = (25a_3^6c_1^6 - 300a_3^5b_2c_1^5 - 128a_3^3c_1^7h_0 + 1500a_3^4b_2^2c_1^4 + 768a_3^2b_2c_1^6h_0 - 4096c_1^8h_0^2 - 4000a_3^3b_2^3c_1^3 - 1536a_3b_2^2c_1^5h_0 + 6000a_3^2b_2^4c_1^2 + 1024b_2^3c_1^4h_0 - 4800a_3b_2^5c_1 + 1600b_2^6)/8\,847\,360c_1^6. \tag{7.8}$$

Итак, мы получили, что решение уравнения (7.2) задается формулой (7.5) при ограничениях на параметры (7.7) и (7.8).

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе была рассмотрена задача классификации обыкновенных дифференциальных уравнений, точные решения которых выражаются через эллиптическую функцию Вейерштрасса.

Алгоритм построения таких дифференциальных уравнений и используемые теоремы были приведены во втором разделе работы. В последующих пяти разделах были построены некоторые дифференциальные уравнения третьего и четвертого порядков в полиномиальной форме, точные решения которых выражаются через эллиптическую функцию Вейерштрасса.

Исследование выполнено за счет средств гранта РФФИ (проект № 18-29-10039).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Painlevé P.* Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme // Bulletin de la Société Mathématique de France. 1900. T. 28. P. 201–261.
2. *Painleve P. et al.* Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme // Acta mathematica. 1902. T. 25. C. 1–85.
3. *Painlevé P.* Sur les équations différentielles du second ordre á points critiques fixes // CR Acad. Sci. Paris. 1906. T. 143. C. 1111–1117.
4. *Кудряшов Н.А.* Методы нелинейной математической физики // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2010.
5. *Ablowitz M.J. et al.* Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering. Cambridge university press, 1991. T. 149.
6. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951.
7. *Demina M.V., Kudryashov N.A.* Explicit expressions for meromorphic solutions of autonomous nonlinear ordinary differential equations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2011. T. 16. № 3. C. 1127–1134.
8. *Demina M.V., Kudryashov N.A.* From Laurent series to exact meromorphic solutions: The Kawahara equation // Physics Letters A. 2010. T. 374. № 39. C. 4023–4029.
9. *Kudryashov N.A.* Nonlinear differential equations with exact solutions expressed via the Weierstrass function // Zeitschrift für Naturforschung A. 2004. T. 59. № 7–8. C. 443–454.
10. *Kudryashov N.A., Sinelshchikov D.I.* Nonlinear differential equations of the second, third and fourth order with exact solutions // Applied Mathematics and Computation. 2012. T. 218. № 21. C. 10454–10467.
11. *Kudryashov N.A., Demina M.V.* Polygons of differential equations for finding exact solutions // Chaos, Solitons & Fractals. 2007. T. 33. № 5. C. 1480–1496.
12. *Demina M.V., Kudryashov N.A., Sinel'shchikov D.I.* The polygonal method for constructing exact solutions to certain nonlinear differential equations describing water waves // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2008. T. 48. № 12. C. 2182.
13. *Кудряшов Н.А., Кутуков А.А.* Программа для построения многоугольников Ньютона, соответствующих обыкновенным дифференциальным уравнениям полиномиального вида // Свидетельство о государственной регистрации программы на ЭВМ № 2019617572 от 17.06.2019
14. *Брюно А.Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Наука, 1998.
15. *Parkes E.J., Duffy B.R., Abbott P.C.* The Jacobi elliptic-function method for finding periodic-wave solutions to nonlinear evolution equations. 2002.
16. *Parkes E.J., Duffy B.R.* An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to non-linear evolution equations // Computer physics communications. 1996. T. 98. № 3. C. 288–300.
17. *Кудряшов Н.А.* Методы построения решений нелинейных неинтегрируемых дифференциальных уравнений // Вестник Национального исследовательского ядерного университета МИФИ. 2015. Т. 4. № 2. С. 127.

Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI", 2019, vol. 8, no. 5, pp. 428–436

Nonlinear Differential Equations of the Third and Fourth orders with Exact Solutions Expressed in terms of the Weierstrass Elliptic Function

S. F. Lavrova[a,#], N. A. Kudryashov[a,##], and A. A. Kutukov[a,###]

[a] *National Research Nuclear University MEPhI(Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, 115409 Russia*

[#]*e-mail: infuriatedot@gmail.com*

[##]*e-mail: nakudr@gmail.com*

[###]*e-mail: aakutukov@mephi.ru*

Received July 19, 2019; revised July 31, 2019; accepted Auguast 27, 2019

Abstract—The classification of ordinary differential equations with exact solutions is a classical mathematical problem. In this work, the classification problem is considered for ordinary differential equations with solutions expressed in terms of the Weierstrass elliptic function. The algorithm of search for such equations is as follows. First, the order of the singularity of the solution is chosen. Then, the order of the sought nonlinear differential equation is set. Next, Newton polygons are used to write the general form of the nonlinear differential equation taking into account the singularity of the solution and the given order for the nonlinear differential equation. After that, limitations for the parameters are found so that the general form of the nonlinear differential equation has an exact solution expressed in terms of the Weierstrass elliptic function. Theorems used to look for parameter limitations are presented. The nonlinear autonomous ordinary differential equations of the third and fourth orders are constructed using the described algorithm. Moreover, nonlinear autonomous differential equations and their solutions expressed in terms of the Weierstrass elliptic function are presented.

Keywords: nonlinear differential equations, Weierstrass elliptic function, exact solutions

DOI: 10.1134/S2304487X19050031

REFERENCES

1. Painlevé P. Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme // Bulletin de la Société Mathématique de France. 1900. V. 28. P. 201–261.
2. Painleve P. et al. Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme // Acta mathematica. 1902. V. 25. P. 1–85.
3. Painlevé P. Sur les équations différentielles du second ordre á points critiques fixes // CR Acad. Sci. Paris. 1906. V. 143. P. 1111–1117.
4. Kudryashov N.A. Methods of Nonlinear Mathematical Physics // Publisher hous Intellekt – 2010 (in Russian).
5. Ablowitz M.J. et al. Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering. – Cambridge university press, 1991. V. 149.
6. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. Methods of Theory of Functions of Complex Variables. – Nauka, 1965. P. 716 (in Russian).
7. Demina M.V., Kudryashov N.A. Explicit expressions for meromorphic solutions of autonomous nonlinear ordinary differential equations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2011. V. 16. № 3. P. 1127–1134.
8. Demina M.V., Kudryashov N.A. From Laurent series to exact meromorphic solutions: The Kawahara equation // Physics Letters A. 2010. V. 374. № 39. P. 4023–4029.
9. Kudryashov N.A. Nonlinear differential equations with exact solutions expressed via the Weierstrass function // Zeitschrift für Naturforschung A. 2004. V. 59. № 7–8. P. 443–454.
10. Kudryashov N.A., Sinelshchikov D.I. Nonlinear differential equations of the second, third and fourth order with exact solutions // Applied Mathematics and Computation. 2012. V. 218. № 21. P. 10454–10467.
11. Kudryashov N.A., Demina M.V. Polygons of differential equations for finding exact solutions // Chaos, Solitons & Fractals. 2007. V. 33. № 5. P. 1480–1496.
12. Demina M.V., Kudryashov N.A., Sinel'shchikov D.I. The polygonal method for constructing exact solutions to certain nonlinear differential equations describing water waves // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2008. V. 48. № 12. P. 2182.
13. Kudryashov N.A., Kutukov A.A. The program for constructing Newton polygons corresponding to ordinary differential equations of polynomial type // The certificate of state registration of software № 2019617572 issued on 17.06.2019
14. Bruno A.D. Power Geometry in Algebraic and Differential Equations –Nauka, 1998 (in Russian).
15. Parkes E.J., Duffy B.R., Abbott P.C. The Jacobi elliptic-function method for finding periodic-wave solutions to nonlinear evolution equations. 2002.
16. Parkes E.J., Duffy B.R. An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to non-linear evolution equations // Computer physics communications. 1996. V. 98. № 3. P. 288–300.
17. Kudryashov N.A. Methods of solution construction of nonlinear nonintegrable differential equations // Vestnik NIYaU MIFI. 2015. V. 4. № 2. P. 127 (in Russian).