Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», 2025, т. 14, № 6, с. 500 – 515

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

https://doi.org/10.26583/vestnik.2025.6.5

Оригинальная статья / *Original paper*

УДК 517.9

Точная линеаризация сильно нелинейных уравнений типа Монжа – Ампера

© **2025 г. А. Д. Полянин [1], А. В. Аксенов [2]**

[1] Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия

[2] Механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, 119991, Россия

Описаны новые классы сильно нелинейных уравнений типа Монжа – Ампера достаточно общего вида, зависящих от одной до шести произвольных функций одного или двух аргументов, которые допускают точную линеаризацию в замкнутой форме. Для линеаризации использованы контактные преобразования Эйлера и Лежандра и специальные точечные преобразования (включая неклассическое преобразование годографа) их комбинации. Особое внимание уделяется уравнениям Монжа – Ампера, встречающимся в метеорологии и геофизике. Рассматриваются также преобразования эквивалентности отдельных классов уравнений Монжа – Ампера. Для некоторых нелинейных уравнений получены точные решения, зависящие от произвольных функций. Были также рассмотрены два нестационарных сильно нелинейных уравнений типа Монжа – Ампера с тремя независимыми переменными, которые встречаются в электронной магнитной гидродинамике и геофизической гидродинамике. Для них в переменных типа бегущей волны были построены двумерные редукции к более простым уравнениям, допускающим точную линеаризацию..

Ключевые слова: уравнения Монжа – Ампера, сильно нелинейные уравнения с частными производными, точная линеаризация в замкнутой форме, преобразования Эйлера и Лежандра, преобразование годографа, контактные и точечные преобразования.

Введение

Сильно нелинейные уравнения типа Монжа – Ампера встречаются в дифференциальной геометрии [1 – 4], газовой динамике [5, 6], теории упругости [7, 8], магнитной гидродинамике [9], механике двухфазных сред [10], метеорологии и геофизике [11, 12], задачах оптимизации [3] и некоторых других приложениях [4, 13]. Качественные особенности, симметрии, преобразования, редукции, промежуточные интегралы и точные решения уравнений Монжа – Ампера с двумя независимыми пространственными переменными, содержащих квадратичную нелинейность относительно комбинации старших производных вида $u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2$, рассматривались во многих работах (см., например, [1, 2, 6, 13 – 19]).

1. Уравнения газовой динамики для плоских одномерных течений с переменной энтропией сводятся к неоднородному уравнению Монжа – Ампера [5, 6]:

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = F(x, y), \tag{1}$$

где $u = u(x, y)$ – искомая функция; $F(x, y)$ – заданная функция.

✉ А.Д. Полянин: polyanin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию: 23.09.2025
После доработки: 19.10.2025
Принята к публикации: 21.10.2025

EDN KREEFH

Уравнение (1) с нулевой правой частью называется однородным уравнением Монжа – Ампера.

Общее решение однородного уравнения Монжа – Ампера (1) при $F(x, y) = 0$ можно записать в параметрической форме [14] (см. также [13, 19]):

$$\begin{gathered} u = \beta x + \varphi(\beta) y + \psi(\beta), \\ x + \varphi'(\beta) y + \psi'(\beta) = 0, \end{gathered} \tag{2}$$

где β – свободный параметр, а $\varphi = \varphi(\beta)$ и $\psi = \psi(\beta)$ – произвольные функции.

Отметим, что однородное уравнение Монжа – Ампера (1) при $F(x, y) = 0$ имеет простое точное решение

$$u = \varphi\big(k_1 x + k_2 y\big) + k_3 x + k_4 y,$$

где $\varphi(z)$ – произвольная функция; k_1, k_2, k_3, k_4 – произвольные постоянные.

Общее решение неоднородного уравнения Монжа – Ампера (1) при $F(x, y) = -a^2$, где $a \neq 0$ – произвольная постоянная, также можно представить в параметрическом виде [14] (см. также [13, 19]):

$$x = \frac{\beta - \lambda}{2a}, \quad y = \frac{\psi'(\lambda) - \varphi'(\beta)}{2a}, \quad u = \frac{(\beta + \lambda)\big[\psi'(\lambda) - \varphi'(\beta)\big] + 2\varphi(\beta) - 2\psi(\lambda)}{4a}, \tag{3}$$

где β и λ – свободные параметры, а $\varphi = \varphi(\beta)$ и $\psi = \psi(\lambda)$ – произвольные функции. Отметим, что уравнение (1) при $F(x, y) = -a^2$ является гамильтоновым [20].

Отметим, что неоднородное уравнение Монжа – Ампера (1) при $F(x, y) = -a^2$ имеет два точных решения, которые можно представить в явном виде

$$u = \varphi(k_1 x + k_2 y) + C_1 x^2 + \left(2C_1 \frac{k_2}{k_1} \pm a\right) xy + \left(C_1 \frac{k_2^2}{k_1^2} \pm a \frac{k_2}{k_1}\right) y^2 + C_2 x + C_3 y,$$

где $\varphi(z)$ – произвольная функция; k_1, k_2, C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные ($k_1 \neq 0$); перед a берутся либо верхние, либо нижние знаки.

Общие решения (2) и (3) уравнения Монжа – Ампера (1) в указанных специальных случаях можно получить путем использования контактного преобразования Эйлера, которое рассматривается далее в разд. 1.

Симметрии и инвариантные решения уравнения (1) рассматривались в [16, 21] (см. также [13, 18]). В [13, 19] получен ряд неинвариантных решений с обобщенным и функциональным разделением переменных уравнения (1), правая часть которого зависит от одной или двух произвольных функций одного аргумента. В [22, 23] рассматривались точные решения уравнения (1) с квадратичной и более сложной полиномиальной правой частью.

Далее описаны два полезных утверждения о преобразованиях эквивалентности неоднородного уравнения Монжа – Ампера (1).

Утверждение 1. Преобразование [16, 18]:

$$\begin{gathered} \bar{x} = a_1 x + b_1 y + c_1, \quad \bar{y} = a_2 x + b_2 y + c_2, \quad \bar{u} = ku + a_3 x + b_3 y + c_3, \\ \bar{F} = k^2 (a_1 b_2 - a_2 b_1)^{-2} F, \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0, \end{gathered}$$

где a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, k – произвольные постоянные, преобразует неоднородное уравнение Монжа – Ампера (1) в уравнение аналогичного вида.

Утверждение 2. Преобразование [16, 18]:

$$\overline{x} = x(1+\alpha x+\beta y)^{-1}, \quad \overline{y} = y(1+\alpha x+\beta y)^{-1}, \quad \overline{u} = u(1+\alpha x+\beta y)^{-1}, \quad \overline{F} = F(1+\alpha x+\beta y)^{4},$$

где α, β – произвольные постоянные, преобразует неоднородное уравнение Монжа – Ампера (1) в уравнение аналогичного вида.

В [16, 24] (см. также далее разд. 1 и 3) показано, что уравнение (1) может быть линеаризовано в следующих двух случаях:

$$1) \quad F(x,y) = f_1(x); \quad 2) \quad F(x,y) = x^{-4} f_2(y/x), \tag{4}$$

где $f_1(x)$ и $f_2(z)$ – произвольные функции.

Из утверждения 1 и выражений (4) следует, то уравнение (1) линеаризуется также для более общих функций

$$1) \quad F(x,y) = f_1(a_1x+b_1y+c_1); \tag{5}$$

$$2) \quad F(x,y) = \frac{1}{(a_1x+b_1y+c_1)^4} f_2\left(\frac{a_2x+b_2y+c_2}{a_1x+b_1y+c_1}\right), \tag{6}$$

где $f_1(z_1)$ и $f_2(z_2)$ – произвольные функции, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 – произвольные постоянные; при $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ функция (6) сводится к (5).

Отметим, что квадратичное относительно старших производных уравнение (1) является сильно нелинейным и имеет свойства, необычные для квазилинейных уравнений, которые линейны относительно старших производных. В частности, качественные особенности этого уравнения зависят от знака функции $F = F(x, y)$, поскольку при $F < 0$ уравнение (1) является уравнением гиперболического типа, а при $F > 0$ – уравнением эллиптического типа [2, 13]. Кроме того, при $F > 0$ задача Дирихле для этого уравнения с нулевым условием на границе имеет не единственное решение.

2. В [13] было показано, что уравнение Монжа – Ампера

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = f(u),$$

в правой части которого стоит произвольная функция $f(u)$, допускает точное решение с функциональным разделением переменных вида

$$u = U(z), \quad z = C_1x^2 + C_2xy + C_3y^2 + C_4x + C_5y,$$

где $C_1, \ldots, C_5$ – произвольные постоянные, а функция $U(z)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$2(Az+B)U_zU_{zz} + AU_z^2 = f(U);$$
$$A = 4C_1C_3 - C_2^2, \quad B = C_1C_5^2 + C_3C_4^2 - C_2C_4C_5.$$

При $A = 0$ общее решение этого уравнения можно выразить в квадратурах в неявном виде.

3. В общем случае уравнение Монжа – Ампера с двумя независимыми переменными имеет вид

$$F_1\left(u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2\right) + F_2u_{xx} + F_3u_{xy} + F_4u_{yy} + F_5 = 0, \tag{7}$$

где F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 – гладкие функции, зависящие от x, y, u, u_x, u_y, причем $F_1 \not\equiv 0$. Уравнения этого типа встречаются, например, в дифференциальной геометрии [1, 2], метеорологии и геофизике [11] и теории конечно деформированных несжимаемых упругих материалов [7, 8] (при $F_2 = F_3 = F_4 = 0$). Точные решения некоторых таких и других сильно нелинейных уравнений, содержащих квадратичные комбинации старших производных, можно найти в [13, 19].

Тип сильно нелинейного уравнения (7) зависит от знака дискриминанта [2]:

$$\Delta = \left(F_3^2 - 4F_2F_4 + 4F_5\right)F_1^{-2}, \tag{8}$$

который не содержит вторых производных u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}. При $\Delta > 0$ уравнение (7) будет гиперболическим, при $\Delta < 0$ – эллиптическим, а при $\Delta = 0$ – параболическим.

Отметим, что уравнения Монжа – Ампера вида (7) при $F_1 = 1$, $F_2 = F_3 = F_4 = 0$ и $F_5 = F_5(x, y, u, u_x, u_y) < 0$ могут иметь не единственное решение задачи Дирихле для замкнутой выпуклой области [25].

4. Стационарное неоднородное уравнение Монжа – Ампера с квадратичной нелинейностью по старшим производным (1) допускает многомерное обобщение на случай произвольного числа пространственных переменных

$$\det\left[u_{x_i x_j}\right] = F(\mathbf{x}), \tag{9}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $u_{x_i x_j}$ – вторая производная искомой функции u по переменным x_i и x_j. Матрица вторых производных $\left[u_{x_i x_j}\right]$, входящая в это уравнение, описывает локальную кривизну функции многих переменных и называется *матрицей Гессе*.

Симметрии и точные решения нелинейного однородного уравнения (9) с нулевой правой частью исследовались в [26, 27]. В [28–31] были описаны некоторые редукции и точные решения соответствующего неоднородного уравнения и более сложных, чем (9), родственных уравнений, содержащих сильную нелинейность вида $\det\left[u_{x_i x_j}\right]$.

5. Качественные особенности, симметрии, преобразования, редукции и точные решения параболических уравнений типа Монжа – Ампера с тремя независимыми переменными, которые содержат первую производную по времени u_t и квадратичную нелинейность относительно комбинации старших производных по пространственным переменным вида $u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2$, рассматривались в [13, 32–38].

Данная работа посвящена точной линеаризации в замкнутой форме различных классов уравнений Монжа – Ампера достаточно общего вида, зависящих от одной до шести произвольных функций одного или двух аргументов. Для линеаризации использованы контактные преобразования Эйлера и Лежандра и специальные точечные преобразования (включая преобразование годографа) их комбинации, которые приводят уравнение (7) к уравнению аналогичного вида с другими функциональными коэффициентами F_n.

Замечание 1. Под точной линеаризацией в замкнутой форме в данной статье понимаются невырожденные преобразования, записанные в виде аналитических формул, связывающих старые и новые независимые и зависимые переменные и их первые производные, которые приводят нелинейные уравнения с частными производными к линейным уравнениям с частными производными. При этом не допускаются никакие упрощения и аппроксимации. Считается также, что все члены, входящие в используемые преобразования, известны и выписаны явно.

1. Преобразование Эйлера и линеаризация уравнений

1. Для упрощения, линеаризации и поиска точных решений нелинейных уравнений в частных производных применяется контактное преобразование Эйлера, которое определяется формулами (см., например, [13, 39, 40]):

$$x = X, \quad y = U_Y, \quad u = YU_Y - U \quad \text{(прямое преобразование)}, \tag{10}$$

$$X = x, \quad Y = u_y, \quad U = yu_y - u \quad \text{(обратное преобразование)}, \tag{11}$$

где $u = u(x, y)$ и $U = U(X, Y)$, а первые производные u_x и U_x и вторые производные связаны соотношениями [13, 40]:

$$u_x = -U_X, \quad u_{xx} = \frac{U_{XY}^2 - U_{XX}U_{YY}}{U_{YY}}, \quad u_{xy} = -\frac{U_{XY}}{U_{YY}}, \quad u_{yy} = \frac{1}{U_{YY}}. \tag{12}$$

Из (12) также следует, что

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = -\frac{U_{XX}}{U_{YY}}.$$

Преобразование Эйлера (10) – (11), как и другие контактные преобразования, не повышает порядок уравнений, к которым оно применяется. Пусть $U = U(X, Y)$ будет решением преобразованного уравнения. Тогда формулы (10) определяют соответствующее решение исходного уравнения в параметрической форме.

При применении преобразований Эйлера отдельные решения могут быть потеряны, если в некоторой подобласти вторая производная u_{xx} (или u_{yy}) тождественно равна нулю.

Альтернативное преобразование Эйлера можно получить из (10) – (11) путем переобозначений независимых переменных $x \rightleftharpoons y$ и $X \rightleftharpoons Y$.

2. Преобразование Эйлера (10) приводит более общее, чем (1), уравнение Монжа – Ампера вида

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = F\left(x, y, u_x, u_y\right), \tag{13}$$

к более простому уравнению, линейному относительно старших производных:

$$U_{XX} = -F\left(X, U_Y, -U_X, Y\right)U_{YY}. \tag{14}$$

Отсюда, в частности, следует, что уравнение Монжа – Ампера

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = F\left(x, u_y\right) \tag{15}$$

линеаризуется преобразованием Эйлера для любой функции двух аргументов $F(x, z)$. Отметим, что линеаризация уравнения (15) для частного случая, когда F зависит только от x, была доказана в [16, 24].

Замечание 2. Преобразование Эйлера (10) – (11) позволяет получить общие решения уравнения Монжа – Ампера (1) при $F(x, y) = 0$ и $F(x, y) = -a^2$ в параметрическом виде, эквивалентном (2) и (3). Это следует из решений преобразованного уравнения (14) при $F = 0$ и $F = -a^2$.

3. Более общее, чем (15), уравнение Монжа – Ампера

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = F\left(x, u_y\right) + G\left(x, u_y\right)u_{yy} \tag{16}$$

с помощью преобразования Эйлера (10) приводится к линейному уравнению с частными производными

$$U_{XX} = -F\left(X, Y\right)U_{YY} - G\left(X, Y\right). \tag{17}$$

Рассмотрим два специальных случая, когда можно получить в явном виде общее решение преобразованного уравнения (17).

Случай 1. При $F \equiv 0$ общее решение уравнения (17) можно представить в виде

$$U = \varphi(Y)X + \psi(Y) - \int_{X_0}^{X} (X - \xi) G(\xi, Y)\, d\xi,$$

где $\varphi(Y)$ и $\psi(Y)$ – произвольные функции; X_0 – произвольная постоянная.

Случай 2. При $F = -a^2 > 0$, $G(X, Y) = G_1(X) + G_2(Y)$ общее решение уравнения (17) записывается так:

$$U = \Phi(Y + aX) + \Psi(Y - aX) - \int_{X_0}^{X} (X - \xi) G_1(\xi)\, d\xi + \frac{1}{a^2}\int_{Y_0}^{Y} (Y - \eta) G_2(\eta)\, d\eta,$$

где $\Phi(Y)$ и $\Psi(Y)$ – произвольные функции; X_0 и Y_0 – произвольные постоянные.

4. Нетрудно показать, что следующие пять уравнений Монжа – Ампера:

$$\begin{aligned}
u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 &= F(x, u_y) + G(x, u_y)u_{xy}, \\
u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 &= F(x, u_y) + yG(x, u_y)u_{yy}, \\
u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 &= F(x, u_y) + uG(x, u_y)u_{yy}, \\
u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 &= F(x, u_y) + u_x G(x, u_y)u_{yy}, \\
u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 &= F(x, u_y)u_{xy} + G(x, u_y)u_{yy},
\end{aligned} \tag{18}$$

где F и G – произвольные функции двух аргументов, линеаризуются с помощью преобразования Эйлера (10).

5. Более общее, чем (16) и (18), уравнение Монжа – Ампера

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 + \left[f(x, u_y)u_x + g(x, u_y)u + h(x, u_y)y + p(x, u_y)\right]u_{yy} + q(x, u_y)u_{xy} + r(x, u_y) = 0, \tag{19}$$

где f, g, h, p, q, r – произвольные функции двух аргументов, с помощью преобразования Эйлера (10) приводится к линейному уравнению с частными производными

$$U_{XX} + q(X, Y)U_{XY} - r(X, Y)U_{YY} + f(X, Y)U_X - \left[g(X, Y)Y + h(X, Y)\right]U_Y + g(X, Y)U - p(X, Y) = 0. \tag{20}$$

При $g = h = r = 0$ уравнение (20) подстановкой $W = U_X$ сводится к линейному уравнению с частными производными первого порядка.

6. Другое линеаризуемое уравнение Монжа – Ампера, зависящее от шести произвольных функций двух аргументов, можно получить с помощью альтернативного преобразования Эйлера, переобозначив независимые переменные $x \rightleftharpoons y$ и $X \rightleftharpoons Y$ в (10), (11) и (19), (20).

2. Преобразование Лежандра и линеаризация уравнений

1. Помимо преобразования Эйлера (10) для линеаризации и упрощения нелинейных уравнений с частными производными используется также контактное преобразование Лежандра, которое определяется формулами (см., например, [2, 13, 39]):

$$x = U_X, \quad y = U_Y, \quad u = XU_X + YU_Y - U \quad \text{(прямое преобразование)}, \tag{21}$$

$$X = u_x, \quad Y = u_y, \quad U = xu_x + yu_y - u \quad \text{(обратное преобразование)}, \tag{22}$$

где $u = u(x, y)$ и $U = U(X, Y)$, а вторые производные вычисляются по формулам

$$u_{xx} = JU_{YY}, \quad u_{xy} = u_{yx} = -JU_{XY}, \quad u_{yy} = JU_{XX}, \quad J = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2, \quad 1/J = U_{XX}U_{YY} - U_{XY}^2. \tag{23}$$

Пусть $U = U(X, Y)$ будет решением преобразованного уравнения. Тогда формулы (21) определяют соответствующее решение исходного уравнения в параметрической форме. При применении преобразования Лежандра отдельные решения могут быть потеряны, если в некоторой подобласти якобиан J тождественно равен нулю.

2. Более общее, чем (1), уравнение Монжа – Ампера (13) с помощью преобразования Лежандра (21)–(22) приводится к уравнению аналогичного вида

$$U_{XX}U_{YY} - U_{XY}^2 = G(X, Y, U_X, U_Y), \quad G(X, Y, U_X, U_Y) = \frac{1}{F(U_X, U_Y, X, Y)}. \tag{24}$$

Отсюда, в частности, следует, что уравнение Монжа – Ампера

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = F(u_x, u_y) \tag{25}$$

преобразованием Лежандра сводится к более простому уравнению вида (1).

Замечание 3. Нестационарное (параболическое) уравнение Монжа – Ампера

$$u_t = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2,$$

которое встречается в электронной магнитной гидродинамике [9], допускает двумерные решения [35]:

$$u = U(\xi, \eta) + ct, \quad \xi = x + at, \quad \eta = y + bt,$$

где a, b, c – произвольные постоянные, а функция $U = U(\xi, \eta)$ описывается уравнением Монжа – Ампера вида (25):

$$U_{\xi\xi}U_{\eta\eta} - U_{\xi\eta}^2 = aU_\xi + bU_\eta + c.$$

Это уравнение может быть линеаризовано, см. далее п. 1 в разд. 4.

3. Уравнение Монжа – Ампера

$$\begin{gathered}\left[up(u_x, u_y) + xq(u_x, u_y) + yr(u_x, u_y) + s(u_x, u_y)\right](u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2) + \\ + f(u_x, u_y)u_{xx} + g(u_x, u_y)u_{xy} + h(u_x, u_y)u_{yy} = 0,\end{gathered} \tag{26}$$

где f, g, h, p, q, r, s – произвольные функции двух аргументов, преобразованием Лежандра приводится к линейному уравнению

$$\begin{gathered}f(X,Y)U_{YY} - g(X,Y)U_{XY} + h(X,Y)U_{XX} + [q(X,Y) + X]U_X + \\ + [r(X,Y) + Y]U_Y - p(X,Y)U + s(X,Y) = 0.\end{gathered} \tag{27}$$

Из (26), в частности, следует, что могут быть линеаризованы следующие два уравнения:

$$u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2=f(|\nabla u|)\Delta u,\\ u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2=u^{-1}f(|\nabla u|)\Delta u, \tag{28}$$

где $f(z)$ – произвольная функция; $|\nabla u|=\left(u_x^2+u_y^2\right)^{1/2}$; $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}$. Эти уравнения входят в класс обобщенных уравнений типа Монжа – Ампера, которые рассматривались в [31].

3. Неклассическое преобразование годографа и линеаризация уравнений

1. Для упрощения и анализа некоторых нелинейных уравнений математической физики используется неклассическое преобразование годографа [13, 40, 41]. Для уравнения с двумя независимыми переменными x и y и искомой функцией $u=u(x,y)$ неклассическое преобразование годографа заключается в том, что решение ищется в неявном виде (x и y можно поменять местами):

$$x=x(u,y), \tag{29}$$

т.е. u и y принимаются за независимые переменные, а x – за неизвестную функцию. Преобразование годографа (29) не меняет порядок уравнения и является важным частным случаем точечного преобразования (его можно записать в эквивалентном виде: $x=\bar{u},\ y=\bar{y},\ u=\bar{x}$).

Дифференцируя (29) по обеим переменным как неявную функцию и учитывая, что $u=u(x,y)$, можно получить следующие формулы для производных [13, 40]:

$$u_x=\frac{1}{x_u},\quad u_y=-\frac{x_y}{x_u},\quad u_{xx}=-\frac{x_{uu}}{x_u^3},\quad u_{xy}=-\frac{x_u x_{uy}-x_y x_{uu}}{x_u^3},\quad u_{yy}=\frac{-x_u^2x_{yy}+2x_u x_y x_{uy}-x_y^2 x_{uu}}{x_u^3}. \tag{30}$$

Из (30) также следует, что

$$u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2=x_u^{-4}\left(x_{uu}x_{yy}-x_{uy}^2\right).$$

Неклассическое преобразование годографа (29) в комбинации с контактными преобразованиями Эйлера и Лежандра можно использовать для линеаризации некоторых классов уравнений Монжа – Ампера.

2. Применив преобразование годографа (29) к линеаризуемому уравнению Монжа – Ампера (15), получим другое линеаризуемое уравнение Монжа – Ампера, которое после обратных переобозначений ($u\rightleftharpoons x$) можно записать в виде

$$u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2=u_x^4H\left(u,u_y/u_x\right), \tag{31}$$

где $H(x,z)=F_1(x,-z)$ – произвольная функция двух аргументов. Отметим, что уравнение (31) из других соображений было получено в [24].

Применяя далее преобразование Лежандра (21) с частному случаю линеаризуемого уравнения (31) при $H(x,z)=h(z)$, после очевидных переобозначений приходим к линеаризуемому уравнению Монжа – Ампера

$$u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2=x^{-4}f\left(y/x\right),$$

где $f(z)$ – произвольная функция (см. случай 2) в (4)).

Более сложные линеаризуемые уравнения Монжа – Ампера можно получить, например, применив преобразование годографа (29) к линеаризуемым уравнениям (16) и (18).

4. Линеаризация уравнений Монжа – Ампера, встречающихся в метеорологии и геофизике

Ниже рассматриваются некоторые линеаризуемые уравнения типа Монжа – Ампера (7), которые встречаются в метеорологии и геофизике [11, 12].

1. Рассмотрим уравнение Монжа – Ампера (25) специального вида

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = au_x + bu_y + c, \qquad (32)$$

где a, b, c – свободные параметры. Некоторые точные решения этого уравнения и его модификаций приведены в [11, 13].

Уравнение (32) преобразованием Лежандра (21)–(22) сводится к уравнению

$$U_{XX}U_{YY} - U_{XY}^2 = \frac{1}{aX + bY + c},$$

которое является частным случаем линеаризуемого уравнения Монжа – Ампера вида (1) с правой частью (5).

Отметим, что уравнение Монжа – Ампера (32) допускает точное решение

$$u = \varphi(ay - bx) + bC_1x - \left(aC_1 + \frac{c}{b}\right)y + C_2,$$

где $\varphi(z)$ – произвольная функция; C_1 и C_2 – произвольные постоянные. На этом решении левая часть уравнения (32) обращается в нуль, поэтому оно будет потеряно при использовании преобразования Лежандра.

2. Уравнение Монжа – Ампера

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 + au_{xx} + bu_{xy} + g(x)u_{yy} + h(x) = 0, \qquad (33)$$

где $g(x)$, $h(x)$ – произвольные функции, a, b – свободные параметры, заменой

$$u = w(x,y) - \int_0^x (x-t)g(t)\,dt + \frac{1}{2}bxy - \frac{1}{2}ay^2 \qquad (34)$$

приводится к допускающему линеаризацию более простому уравнению вида (15) при $F = F(x)$:

$$w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2 + h(x) - ag(x) + \frac{1}{4}b^2 = 0.$$

3. Более общее, чем (33), уравнение Монжа – Ампера

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 + au_{xx} + f(x)u_{xy} + g(x)u_{yy} + h(x) = 0, \qquad (35)$$

где $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ – произвольные функции; a – свободный параметр, заменой

$$u = V(x,y) - \frac{1}{2}ay^2 \qquad (36)$$

приводится к частному случаю уравнению вида (19):

$$V_{xx}V_{yy} - V_{xy}^2 + f(x)V_{xy} + g(x)V_{yy} + h(x) - ag(x) = 0,$$

которое допускает точную линеаризацию с помощью преобразования Эйлера (10).

4. Уравнение Монжа – Ампера

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 + au_{xy} + f(x)u_{yy} + g(x)u_y + h(x) = 0, \qquad (37)$$

где $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ – произвольные функции; a – свободный параметр, заменой

$$u = W(x,y) + \frac{1}{2}axy$$

приводится к уравнению

$$W_{xx}W_{yy} - W_{xy}^2 + f(x)W_{yy} + g(x)W_y + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}axg(x) + h(x) = 0.$$

Это уравнение является частным случаем уравнения (16) при $F(x,z) = g(x)z + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}axg(x) + h(x)$, $G(x, z) = f(x)$ (и после переобозначения W на u), которое линеаризуется преобразованием Эйлера (10).

5. Уравнение Монжа – Ампера вида

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 + au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = \Phi(x,y), \qquad (38)$$

где a, b, c – свободные параметры, заменой

$$u = w(x,y) - \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{2}bxy - \frac{1}{2}ay^2 \qquad (39)$$

приводится к более простому уравнению вида (1):

$$w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2 = \Phi(x,y) + ac - \frac{1}{4}b^2. \qquad (40)$$

Сопоставление (40) с уравнением (1) в случаях (5) и (6) показывает, что исходное уравнение (38) может быть точно линеаризовано для следующих двух функций:

$$1) \quad \Phi(x,y) = f_1\left(a_1x + b_1y + c_1\right);$$

$$2)\quad \Phi(x,y) = -ac + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{\left(a_1x + b_1y + c_1\right)^4} f_2\left(\frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_1x + b_1y + c_1}\right),$$

где $f_1(z_1)$ и $f_2(z_2)$ – произвольные функции; a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 – свободные параметры.

Замечание 4. При $\Phi(x, y) = k = \mathrm{const}$ и $k + ac - \frac{1}{4}b^2 < 0$ общее решение преобразованного уравнения (40) (и соответственно исходного уравнения (38)) можно получить с помощью очевидных переобозначений в формулах (3).

6. Уравнение Монжа – Ампера

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 + au_{xx} + bu_x + c = 0, \tag{41}$$

где a, b, c – свободные параметры, заменой (36) приводится к более простому линеаризуемому уравнению вида (32):

$$V_{xx}V_{yy} - V_{xy}^2 + bV_x + c = 0.$$

7. Нестационарное уравнение с нелинейностью типа Монжа – Ампера [37]:

$$u_{tt} = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 \tag{42}$$

в переменных бегущей волны имеет двумерное симметрийное решение

$$u = U(\xi,\eta),\quad \xi = x + at,\quad \eta = y + bt,$$

где a, b – произвольные постоянные, а функция $U = U(\xi, \eta)$ описывается линеаризуемым уравнением Монжа – Ампера вида (33):

$$U_{\xi\xi}U_{\eta\eta} - U_{\xi\eta}^2 = a^2U_{\xi\xi} + 2abU_{\xi\eta} + b^2U_{\eta\eta}.$$

Замечание 5. Уравнение (42) встречается в геофизической гидродинамике. Симметрии и точные решения этого уравнения рассматривались в [43].

Краткие выводы

Рассмотрены различные классы уравнений типа Монжа – Ампера с двумя независимыми переменными, зависящих от одной до шести произвольных функций одного или двух аргументов, которые допускают точную линеаризацию. Для линеаризации использованы контактные преобразования Эйлера и Лежандра, а также неклассическое преобразование годографа и другие точечные преобразования. Найдены также некоторые точные решения рассматриваемых уравнений. Особое внимание уделяется уравнениям Монжа – Ампера, которые встречаются в метеорологии и геофизике.

Финансирование

Работа выполнена по темам государственного задания (номера госрегистрации 124012500440-9 и FSWU-2023-0031).

Конфликт интересов

Конфликт интересов отсутствует.

Вклад авторов

А.Д. Полянин – выбор нелинейных уравнений, преобразования, линеаризация, точные решения, подготовка текста статьи, обсуждение результатов.

А.В. Аксенов – выбор нелинейных уравнений, преобразования, линеаризация, точные решения, подготовка текста статьи, обсуждение результатов.

Список литературы

1. *Погорелов А.В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М.: Наука, 1969. 759 с.
2. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
3. *Caffarelli L.A., Milman M.* (eds). Monge – Ampère Equation: Applications to Geometry and Optimization. Providence: American Mathematical Society, 1999.
4. *Figalli A.* The Monge – Ampère Equation and Its Applications. Zürich: European Mathematical Society, 2017. 212 p.
5. *Martin M.N.* The propagation of a plane shock into a quiet atmosphere // Canadian Journal of Mathematics, 1953. V. 5. P. 37 – 39. DOI: 10.4153/CJM-1953-004-2.
6. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике, изд. 2-е. М.: Наука, 1978. 687 с.
7. *Hill J.M., Arrigo D.J.* New families of exact solutions for finitely deformed incompressible elastic materials // IMA Journal of Applied Mathematics, 1995. V. 54(2). P. 109 – 123. DOI: 10.1093/imamat/54.2.109.
8. *Hill J.M., Arrigo D.J.* Transformations and equation reductions in finite elasticity I: Plane strain deformations // Mathematics and Mechanics of Solids, 1996. V. 1. Iss. 2. P. 155 – 175.
9. *Zaburdaev V.Yu., Smirnov V.V., Chukbar K.V.* Nonlinear dynamics of electron vortex lattices // Plasma Phys. Reports, 2014. V. 30. № 3. P. 214 – 217.
10. *Жабборов Н.М., Коробов П.В., Имомназаров Х.Х.* Применение дифференциальных тождеств Меграбова к уравнениям двухскоростной гидродинамики с одним давлением // Журн. Сибир. федер. университета (СФУ). Сер. Матем. и физ., 2012. Т. 5. № 2. С. 156 – 163.
11. *Розендорн Э.Р.* Некоторые классы частных решений уравнения $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 + a\nabla z = 0$ и их приложение к задачам метеорологии // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика, 1984. № 2, С. 56 – 58.
12. *Розендорн Э.Р.* Поверхности отрицательной кривизны. Итоги науки и техники. Сер. Соврем. проблемы математики. Фунд. направления, 1989. Т. 48. С. 98 – 195.
13. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.
14. *Гурса Э.* Курс математического анализа. Т. 3. Ч. 1. М.: Гостехиздат, 1933. 1764 с.
15. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
16. *Хабиров С.В.* Неизэнтропические одномерные движения газа, построенные с помощью контактной группы неоднородного уравнения Монжа – Ампера // Математический сборник, 1990. Т. 181. № 12. С. 1607 – 1622.
17. *Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И.* Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. Киев: Наукова думка, 1989.
18. *Ibragimov N.H.* (ed.) CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Vol. 1. Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws. Boca Raton: CRC Press, 1994.
19. *Polyanin A.D.* Handbook of Exact Solutions to Mathematical Equations. Boca Raton: CRC Press, 2025.
20. *Gutshabash E.S.* Legendre transformation in the Born – Infeld model, Monge – Ampère equation and exact solutions // Journal of Mathematical Sciences, 2024. V. 284. P. 673 – 680. DOI: 10.1007/s10958-024-07378-5.
21. *Feroze T., Umair M.* Optimal system and exact solutions of Monge – Ampère equation // Communications in Mathematics and Applications, 2021. V. 12. № 4. P. 825 – 833. DOI: 10.26713/cma.v12i4.1516.
22. *Aminov Yu., Arslan K., Bayram B., Bulca B., Murathan C., Öztürk G.* On the solution of the Monge – Ampère equation $Z_{xx}Z_{yy} - Z_{xy}^2 = f(x,y)$ with quadratic right side // Журн. матем. физ., анал., геом., 2011. Т. 7. № 3. P. 203 – 211.
23. *Аминов Ю.А.* О полиноминальных решениях уравнения Монжа – Ампера // Математический сборник, 2014. Т. 205. № 11. С. 3 – 38. DOI: 10.4213/sm8356.

24. *Arrigo D.J., Hill J.M.* On a class of linearizable Monge – Ampère equations // J. Nonlinear Math. Phys., 1998. V. 5. № 2. P. 115–119. DOI: 10.2991/jnmp.1998.5.2.1

25. *Бакельман И.Я., Красносельский М.А.* Нетривиальные решения задачи Дирихле для уравнений с операторами Монжа – Ампера // ДАН СССР, 1961. Т. 137. № 5. С. 1007 – 1010.

26. *Фущич В.И., Серов Н.И.* Симметрия и некоторые точные решения многомерного уравнения Монжа – Ампера // Докл. АН СССР, 1983. Т. 273. № 3. С. 543 – 546.

27. *Leibov O.S.* Reduction and exact solutions of the Monge – Ampère equation // Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 1997. V. 4. № 1–2. P. 146 – 148. DOI:10.2991/jnmp.1997.4.1-2.17

28. *Fedorchuk V.M., Fedorchuk V.I.* On the symmetry reduction of the (1+3)-dimensional inhomogeneous Monge – Ampère equation to algebraic equations // Journal of Mathematical Sciences, 2024. V. 282 (5). P. 1 – 10. DOI: 10.1007/s10958-024-07208-8.

29. *Рахмелевич И.В.* Многомерное уравнение Монжа – Ампера со степенными нелинейностями по первым производным // Вестн. Воронежского гос. ун-та. Сер. Физика. Математика, 2020. № 2. С. 86 – 98.

30. *Косов А.А., Семенов Э.И.* О многомерных точных решениях обобщенного уравнения Монжа – Ампера // Дифференциальные уравнения, 2024. Т. 60. № 10. С. 1334 – 1349.

31. *Косов А.А., Семенов Э.И.* Обобщенное уравнение типа Монжа – Ампера и его многомерные точные решения // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 2025. Т. 35. № 2. С. 215 – 230.

32. *Dubinov A.E., Kitayev I.N.* New exact solutions of the equation of non-linear dynamics of a lattice of electronic vortices in plasma in the framework of electron magnetohydrodynamics // Magnetohydrodynamics, 2020. V. 56. № 4. P. 369 – 375.

33. *Рахмелевич И.В.* Неавтономное эволюционное уравнение типа Монжа – Ампера с двумя пространственными перемнными // Известия вузов. Математика, 2023. № 2. С. 66–80.

34. *Аксенов А.В., Полянин А.Д.* Групповой анализ, редукции и точные решения уравнения Монжа – Ампера магнитной гидродинамики // Дифференциальные уравнения, 2024. Т. 60. № 6. С. 750 – 763.

35. *Polyanin A.D., Aksenov A.V.* Unsteady magnetohydrodynamics PDE of Monge – Ampère type: Symmetries, closed-form solutions, and reductions // Mathematics, 2024. V. 12. № 13. 2127.

36. *Полянин А.Д.* Точные решения и редукции нестационарных уравнений математической физики типа Монжа – Ампера // Вестник НИЯУ «МИФИ», 2023. Т. 12. № 5. С. 276 – 288.

37. *Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R.* Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2007.

38. *Aksenov A.V., Polyanin A.D.* Symmetries, reductions and exact solutions of nonstationary Monge – Ampère type equations // Mathematics, 2025. V. 13. № 3. 525. DOI: 10.3390/math13030525.

39. *Zwillinger D.* Handbook of Differential Equations, 3rd ed. San Diego: Academic Press, 1998.

40. *Polyanin A.D.* Exact Methods for Nonlinear PDEs. Boca Raton–London: Chapman and Hall/CRC Press, 2025.

41. *Clarkson P.A., Fokas A.S., Ablowitz M.J.* Hodograph transformations of linearizable partial differential equations // SIAM J. Appl. Math., 1989. V. 49. № 4. P. 1188 – 1209.

42. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems. Boca Raton: CRC Press, 2018.

43. *Polyanin A.D., Aksenov A.V.* Geophysical Monge-Ampère-type equation: Symmetries and exact solutions // Mathematics, 2025. V. 13. № 21. 3522.

Vestnik Natsional'nogo Issledovatel'skogo Yadernogo Universiteta «MIFI», 2025, vol. 14, no. 6, pp. 500 – 515

Exact linearization of fully nonlinear Monge – Ampère type equations

A. D. Polyanin [1], A. V. Aksenov [2]

[1] Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia
[2] Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, Main Building, Moscow, 119991 Russia

Received September 23, 2025; revised October 19, 2025; accepted October 21, 2025

New classes of Monge – Ampère equations of a fairly general form are described, depending on one to six arbitrary functions of one or two arguments that allow exact linearization in closed form. For linearization, contact Euler and Legendre transformations and special point transformations (including the nonclassical hodograph transformation) of their combinations are used. Special attention is given to the Monge – Ampère equations encountered in meteorology and geophysics. Equivalence transformations of classes of Monge – Ampère equations of a special kind are also considered. For some nonlinear equations, exact solutions were obtained depending on arbitrary functions. Two nonstationary, strongly nonlinear Monge-Ampère type equations with three independent variables, encountered in electron magnetohydrodynamics and geophysical fluid dynamics, were also considered. For these equations, two-dimensional reductions to simpler equations that allow exact linearization were constructed in traveling-wave variables.

Keywords: Monge – Ampère equations, fully nonlinear PDEs, exact linearization, Euler and Legendre transformations, hodograph transformation, contact and point transformations.

References

1. *Pogorelov A.V.* Vneshnyaya geometriya vypuklyh poverhnostej [Extrinsic Geometry of Convex Surfaces]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 759 p.

2. *Courant R.* Uravneniya s chastnymi proizvodnymi [Partial differential equations]. Moscow, Mir Publ., 1964. 830 p.

3. *Caffarelli L.A., Milman M.* (eds). Monge – Ampère Equation: Applications to Geometry and Optimization. Providence, American Mathematical Society, 1999.

4. *Figalli A.* The Monge – Ampère Equation and Its Applications. Zürich, European Mathematical Society, 2017. 212 p.

5. *Martin M.N.* The propagation of a plane shock into a quiet atmosphere. Canadian Journal of Mathematics, 1953. Vol. 5. Pp. 37 – 39. DOI: 10.4153/CJM-1953-004-2.

6. *Rozhdestvenskii B.L., Yanenko N.N.* Sistemy kvazilinejnyh uravnenij i ih prilozheniya k gazovoj dinamike, izd. 2-e. [Systems of Quasilinear Equations and Their Applications to Gas Dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 687 p.

7. *Hill J.M., Arrigo D.J.* New families of exact solutions for finitely deformed incompressible elastic materials. IMA Journal of Applied Mathematics, 1995. Vol. 54(2). Pp. 109 – 123. DOI: 10.1093/imamat/54.2.109.

8. *Hill J.M., Arrigo D.J.* Transformations and equation reductions in finite elasticity I: Plane strain deformations . Mathematics and Mechanics of Solids, 1996. Vol. 1. Iss. 2. Pp. 155 – 175.

9. *Zaburdaev V.Yu., Smirnov V.V., Chukbar K.V.* Nonlinear dynamics of electron vortex lattices. Plasma Phys. Reports, 2014. Vol. 30. No. 3. Pp. 214 – 217.

10. *Zhabborov N.M., Korobov P.V., Imomnazarov Kh.Kh.* Primeneniye differentsial'nykh tozhdestv Megrabova k uravneniyam dvukhskorostnoy gidrodinamiki s odnim davleniyem [Application of Megrabov's differential identities to the two-velocity hydrodynamics equations with one pressure]. Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 2012. Vol. 5. No. 2. Pp. 156 – 163 (in Russian).

11. *Rozendorn E.R.* Nekotoryye klassy chastnykh resheniy uravneniya $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 + a\nabla z = 0$ i ikh prilozheniye k zadacham meteorologii [Some classes of particular solutions of the equation $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 + a\nabla z = 0$ and their application to meteorological problems]. Vestn. Mosk. Univ. Ser. 1. Mat., Mech., 1984. No. 2. Pp. 56 – 58 (in Russian).

12. *Rozendorn E.R.* Poverkhnosti otritsatel'noy krivizny [Surfaces of negative curvature]. Results of science and technology. Series: Modern problems of mathematics. Fundamental directions, 1989. Vol. 48. Pp. 98 – 195.

13. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.

14. *Goursa E.* Kurs matematicheskogo analiza [Course of Mathematical Analysis. Vol. 3, Part 1]. Moscow, Gostekhizdat Publ.: Russia, 1933. 1764 p.

15. *Ovsiannikov L.V.* Gruppovoj analiz differencial'nyh uravnenij [Group Analysis of Differential Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 399 p.

16. *Khabirov S.V.* Neizentropicheskiye odnomernyye dvizheniya gaza, postroyennyye s pomoshch'yu kontaktnoy gruppy neodnorodnogo uravneniya Monzha – Ampera [Nonisentropic one-dimensional gas motions constructed by means of the contact group of the nonhomogeneous Monge – Ampère equation]. Math. Sbornik, 1990. Vol. 181. No. 12. Pp. 1607 – 1622 (in Russian).

17. *Fushchich W.I., Shtelen W.M, Serov N.I.* Simmetrijnyj analiz i tochnye resheniya nelinejnyh uravnenij matematicheskoj fiziki. [Symmetry Analysis and Exact Solutions of Equations of Nonlinear Mathematical Physics]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1989.

18. *Ibragimov N.H.* (ed.) CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Vol. 1, Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws. Boca Raton: CRC Press, 1994.

19. *Polyanin A.D.* Handbook of Exact Solutions to Mathematical Equations. Boca Raton: CRC Press, 2025.

20. *Gutshabash E.S.* Legendre transformation in the Born – Infeld model, Monge – Ampère equation and exact solutions. Journal of Mathematical Sciences, 2024. Vol. 284. Pp. 673 – 680. DOI: 10.1007/s10958-024-07378-5.

21. *Feroze T., Umair M.* Optimal system and exact solutions of Monge – Ampère equation. Communications in Mathematics and Applications, 2021. Vol. 12. № 4. Pp. 825 – 833. DOI: 10.26713/cma.v12i4.1516.

22. *Aminov Yu., Arslan K., Bayram B., Bulca B., Murathan C., Öztürk G.* On the solution of the Monge – Ampère equation $Z_{xx}Z_{yy} - Z_{xy}^2 = f(x, y)$ with quadratic right side. Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom., 2011. Vol. 7. No. 3. Pp. 203 – 211.

23. *Aminov Yu.A.* O polinominal'nykh resheniyakh uravneniya Monzha–Ampera [On polynomial solutions of the Monge – Ampère equation]. Math. Sbornik, 2014. Vol. 205. No. 11. Pp. 3 – 38 (in Russian). DOI: 10.4213/sm8356.

24. *Arrigo D.J., Hill J.M.* On a class of linearizable Monge – Ampère equations. J. Nonlinear Math. Phys., 1998. Vol. 5. No. 2. Pp. 115–119. DOI: 10.2991/jnmp.1998.5.2.1.

25. *Bakelman I.Ya., Krasnosel'skii M.A.* Netrivial'nyye resheniya zadachi Dirikhle dlya uravneniy s operatorami Monzha–Ampera [Nontrivial solutions of the Dirichlet problem for equations with Monge – Ampère operators]. DAN SSSR, 1961. Vol. 137. No. 5. Pp. 1007 – 1010 (in Russian).

26. *Fushchich W.I., Serov N.I.* Simmetriya i nekotoryye tochnyye resheniya mnogomernogo uravneniya Monzha–Ampera [Symmetry and some exact solutions of the multidimensional Monge – Ampère]. Dokl. Acad. Nauk USSR. 1983. Vol. 273. Pp. 543 – 546 (in Russian).

27. *Leibov O.S.* Reduction and exact solutions of the Monge – Ampère equation. Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 1997. Vol. 4. No. 1–2. Pp. 146–148. DOI:10.2991/jnmp.1997.4.1-2.17.

28. *Fedorchuk V.M., Fedorchuk V.I.* On the symmetry reduction of the (1+3)-dimensional inhomogeneous Monge – Ampère equation to algebraic equations. Journal of Mathematical Sciences, 2024. Vol. 282 (5). Pp. 1 – 10. DOI: 10.1007/s10958-024-07208-8.

29. *Rakhmelevich I.V.* Mnogomernoye uravneniye Monzha – Ampera so stepennymi nelineynostyami po pervym proizvodnym [Multidimensional Monge–Ampere equation with power nonlinearities in the first derivatives]. Vestn. Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics, 2020. No. 2. Pp. 86 – 98 (in Russian).

30. *Kosov A.A., Semenov E.I.* On exact solutions to multidimensional generalized Monge – Ampère equation. Differential Equations, 2024. Vol. 60. No. 10. Pp. 1404–1418.

31. *Kosov A.A., Semenov E.I.* Obobshchennoye uravneniye tipa Monzha – Ampera i yego mnogomernyye tochnyye resheniya [Generalized equation of Monge – Ampère type and its multidimensional exact solutions]. Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mech. Comput. Sciences, 2025. Vol. 35. No. 2. Pp. 215 – 230 (in Russian).

32. *Dubinov A.E., Kitayev I.N.* New exact solutions of the equation of non-linear dynamics of a lattice of electronic vortices in plasma in the framework of electron magnetohydrodynamics. Magnetohydrodynamics, 2020. Vol. 56. No. 4. Pp. 369 – 375.

33. *Rakhmelevich I.V.* Nonautonomous evolution equation of Monge – Ampère type with two space variables. Russian Mathematics, 2023. Vol. 67. No. 2. Pp. 52 – 64.

34. *Aksenov A.V., Polyanin A.D.* Group analysis, reductions, and exact solutions of the Monge – Ampère equation in magnetic hydrodynamics. Differential Equations, 2024. Vol. 60. No. 6. Pp. 716 – 728.

35. *Polyanin A.D., Aksenov A.V.* Unsteady magnetohydrodynamics PDE of Monge – Ampère type: Symmetries, closed-form solutions, and reductions. Mathematics, 2024. Vol. 12. No. 13. 2127.

36. *Polyanin A.D.* Tochnyye resheniya i reduktsii nestatsionarnykh uravneniy matematicheskoy fiziki tipa Monzha – Ampera [Exact solutions and reductions of non-stationary equations of mathematical physics of the Monge – Ampère type]. Vestnik NIYaU MIFI, 2023. Vol. 12. No. 5. Pp. 276–288 (in Russian).

37. *Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R.* Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics. Boca Raton, Chapman & Hall/CRC Press, 2007.

38. *Aksenov A.V., Polyanin A.D.* Symmetries, reductions and exact solutions of nonstationary Monge – Ampère type equations. Mathematics, 2025. Vol. 13. No. 3. 525. DOI: 10.3390/math13030525

39. *Zwillinger D.* Handbook of Differential Equations, 3rd ed. San Diego, Academic Press, 1998.

40. *Polyanin A.D.* Exact Methods for Nonlinear PDEs. Boca Raton – London: Chapman and Hall/CRC Press, 2025.

41. *Clarkson P.A., Fokas A.S., Ablowitz M.J.* Hodograph transformations of linearizable partial differential equations. SIAM J. Appl. Math., 1989. Vol. 49. No. 4. Pp. 1188 – 1209.

42. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems. Boca Raton, CRC Press, 2018.

43. *Polyanin A.D., Aksenov A.V.* Geophysical Monge-Ampère-type equation: Symmetries and exact solutions // Mathematics, 2025. Vol. 13. No 21. 3522.